Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, О методе нахождения точных оценок длин выводов в системах Туэ, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 07:43:16

О методе нахождения точных оценок длин выводов в системах Туэ

С. И. Адян

Рассматривается следующая система подстановок в алфавите из трех букв:

$$\Sigma = \langle a, b, c \mid a^2 \rightarrow bc, b^2 \rightarrow ac, c^2 \rightarrow ab \rangle.$$

В работе изложено подробное доказательство результатов, которые были вкратце изложены в заметке автора [1]. Они давали ответ на поставленный в литературе конкретный вопрос о возможности нахождения полиномиальной верхней оценки длин выводов из данного слова в системе подстановок Σ . *Вычислительной сложностью* $\mathbf{D}(W)$ слова W в системе подстановок Σ называется максимально возможная длина цепочки подстановок, начинающейся со слова W . Через $\mathbf{D}(l)$ обозначается максимальное значение этой функции на всех словах длины l . Доказано, что максимальная вычислительная сложность $\mathbf{D}(W)$ для слов данной длины $|W| = m + 2$ достигается только для слов вида $W = c^2 b^m$ и $W = b^m a^2$. Для вычислительной сложности этих слов получена следующая точная оценка:

$$\mathbf{D}(m + 2) = \mathbf{D}(c^2 b^m) = \mathbf{D}(b^m a^2) = \left\lceil \frac{3m^2}{2} \right\rceil + m + 1 < \frac{3(m + 1)^2}{2},$$

где для данных целых чисел x и y через $\lceil x/y \rceil$ обозначается результат округления дроби x/y до ближайшего сверху целого числа.

Библиография: 5 названий.

В работе автора [1] была получена квадратичная верхняя оценка максимальной длины цепочек вывода из данного слова в системе подстановок в алфавите из трех букв

$$\Sigma = \langle a, b, c \mid a^2 \rightarrow bc, b^2 \rightarrow ac, c^2 \rightarrow ab \rangle. \quad (1)$$

В этой системе Σ допускаются подстановки вида

$$Xa^2Y \rightarrow XbcY, \quad Xb^2Y \rightarrow XacY, \quad Xc^2Y \rightarrow XabY, \quad (2)$$

где X, Y – произвольные слова.

Заметке [1] предшествовала статья Хофмана и Валдмана, в которой впервые было доказано, что для любого слова W , начинающаяся с нее цепочка вывода системы Σ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы “Ведущие научные школы”.

обрывается, т.е. через конечное число шагов получается слово, к которому не применима ни одна из трех подстановок. Приведенное в [2] доказательство этого результата позволяло авторам дать только экспоненциальную верхнюю оценку возможной длины вывода из данного слова.

Длина слова W обозначается через $|W|$, а графическое равенство слов X и Y через $X = Y$.

Через $\mathbf{D}(W)$ будем обозначать максимально возможное число шагов в цепочке вывода, начинающейся со слова W . Число $\mathbf{D}(W)$ будем называть *сложностью вывода из слова W , или вычислительной сложностью слова W в системе Σ* . Через $\mathbf{D}(l)$ будем обозначать максимальное значение этой функции среди всех слов W длины l .

Мы доказываем, что максимум $\mathbf{D}(l)$ длины цепочки подстановок $\mathbf{D}(W)$ для исходных слов данной длины $l = |W|$ достигается только для слов вида $W = c^2b^m$ и $W = b^ma^2$. Эта длина при четных $m = 2t$ в точности равна

$$\mathbf{D}(c^2b^m) = \mathbf{D}(b^ma^2) = \frac{3m^2}{2} + m + 1 < \frac{3(m+1)^2}{2},$$

а при $m = 2t + 1$ она равна

$$\mathbf{D}(c^2b^m) = \mathbf{D}(b^ma^2) = \frac{3m^2}{2} + m + \frac{3}{2} = \left\lceil \frac{3m^2}{2} \right\rceil + m + 1 < \frac{3}{2}(m+1)^2.$$

Такие точные оценки удастся получить благодаря подробному анализу всех возможных выводов, начинающихся с любого данного слова W фиксированной длины $|W| = l$. Этот анализ основывается на использовании таких понятий, как *затрагивание* или *не затрагивание* данного вхождения буквы в рассматриваемой цепочке подстановок, *сохранение индивидуальности* в этой цепочке для вхождений данной буквы или вхождений подслова в разные слова цепочки и других свойств конкретных вхождений букв или подслов в преобразуемое слово, *инвариантных относительно рассматриваемых преобразований*.

С начала 20 века, когда А. Туэ ввел в рассмотрение свои системы подстановок и сформулировал проблему распознавания равенства слов для этих систем, а М. Дэн сформулировал аналогичную проблему распознавания равенства слов для групповых исчислений, имеющих широкое применение в топологии, все эти понятия широко и плодотворно используются в многочисленных исследованиях, посвященных решению различных алгоритмических и комбинаторных проблем теории групп и полугрупп, задаваемых определяющими соотношениями или тождествами, т.е. системами подстановок в более широком смысле. В частности, это относится и к монографиям автора [3] и [4].

В заметке [1] были опущены некоторые детали доказательства, ввиду известного ограничения на длину публикуемых в Докл. АН статей. Вполне допуская, что квалифицированный читатель, знакомый с используемой в [1] техникой анализа дерева вывода в подобного рода системах подстановок, сможет восполнить доказательство, я считаю целесообразным опубликовать дополнение к статье [1], содержащее некоторые комментарии к отдельным леммам, а также более подробное доказательство леммы 9 и всех утверждений теоремы 1. Это будет особенно полезно для тех, кто впервые знакомится с используемой здесь техникой.

Мы говорим, что в системе Σ слово W делится на заданную букву d справа (или слева), если найдется цепочка подстановок, переводящая W в некоторое слово вида Xd (соответственно, – в слово вида dX).

Из определения подстановок (2) непосредственно следует

ЛЕММА 1. *Если буква c не есть начало слова X , то X не делится слева на c . Если буква a не является концом слова X , то X не делится справа на a .*

Мы говорим, что в данной подстановке $XaaY \rightarrow XbcY$ выделенные два вхождения буквы a *затрагиваются*, а все буквы, входящие в подслова X и Y , *не затрагиваются* и переходят по индивидуальности в соответствующие буквы тех же подслов X и Y в слове $XbcY$. При этом первая выделенная буква a *затрагивается справа* и меняет свое состояние на b , а вторая буква a – *затрагивается слева* и меняет свое состояние на c . Аналогично определяется понятие *затрагивания слева или справа* для двух других типов подстановок $XbbY \rightarrow XacY$ и $XccY \rightarrow XabY$, где затрагиваются только выделенные буквы подслов bb и cc , соответственно.

Пусть дана произвольная цепочка подстановок

$$W \rightarrow W_1 \rightarrow W_2 \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda. \quad (3)$$

Будем считать, что данное вхождение некоторой буквы в данное слово W_i *затрагивается в последовательности (3)* в том и только в том случае, если эта буква сохраняет свое состояние до некоторого слова W_j (при некотором $j \geq i$) и затрагивается в подстановке $W_j \rightarrow W_{j+1}$ рассматриваемой цепочки. Каждая буква сохраняет свое написание до тех пор, пока она не затронется. В момент затрагивания эта буква меняет свое состояние.

Непустое подслово D данного слова $W = XDY$ называется *тупиковым подсловом*, если буквы этого подслова не могут затрагиваться ни в какой цепочке подстановок, начинающейся со слова $W = XDY$. Очевидно, это будет в том и только том случае, если D не содержит квадратов букв, X не делится справа на первую букву слова D , а Y не делится слева на последнюю букву слова D .

ЛЕММА 2. *Пусть E – тупиковое подслово слова $W = PEQ$. Тогда любая цепочка подстановок, начинающаяся со слова W , имеет вид*

$$W = PEQ \rightarrow W_1 = P_1EQ_1 \rightarrow W_2 = P_2EQ_2 \rightarrow \dots \rightarrow W_k = P_kEQ_k. \quad (4)$$

При этом для функции $D(W)$ выполняется соотношение

$$D(W) = D(P) + D(Q).$$

Будем говорить, что в данной последовательности (3) выделенная в слове $W = XaaY$ пара соседних букв a *преобразуются совместно*, если (3) имеет вид

$$\begin{aligned} W = XaaY &\rightarrow W_1 = X_1aaY_1 \rightarrow W_2 = X_2aaY_2 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow W_i = X_iaaY_i \rightarrow W_{i+1} = X_ibcY_i \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

где в преобразованиях от W до W_i обе буквы aa не затрагиваются. Такое вхождение подслова aa в слово W будем называть *активным в (5)*. Аналогично определяется понятие *активного в последовательности (3) вхождения* подслова вида bb или cc .

При перестановке порядка преобразований в данной цепочке подстановок (3) мы руководствуемся следующей очевидной леммой.

ЛЕММА 3. Если выделенное в слове $W = XaaY$ подслово aa активно в данной последовательности (3), то можно так переставить порядок преобразований в цепочке (3), чтобы в ней первой выполнялась замена указанного активного вхождения aa на bc в исходном слове W , а затем остальные подстановки; т.е. можно считать, что в цепочке (3) имеем $W_1 = XbcY$.

Из задания подстановок (1) следует, что если слово W в алфавите системы Σ есть начало некоторой цепочки подстановок максимально возможной длины, то в слове W не должны входить подслowa вида bc , ac и ab . Это означает, что в таком слове W перед любым вхождением буквы c может стоять только другое вхождение c , а после любого вхождения буквы a может стоять только другое вхождение a . Отсюда следует, что между степенями буквы c и буквы a должны находиться только буквы b , т.е. верна

ЛЕММА 4. Слова W , дающие цепочки максимальной длины нужно искать только среди слов вида

$$W = c^k b^m a^n, \quad k, m, n \geq 0. \quad (6)$$

Принцип симметрии. Для любого слова W пусть $\bar{W}$ означает результат считывания слова W справа налево. Через W^* обозначим результат замены в слове $\bar{W}$ каждого вхождения буквы a на c и каждого вхождения буквы c на a . Это слово $\bar{W}$ будем называть симметричным слову W в системе Σ . Следующее свойство системы Σ очевидно.

Для любой подстановки $XEY \rightarrow XDY$ системы Σ можно указать соответствующую подстановку вида $(XEY)^* \rightarrow (XDY)^*$ и обратно.

Из этого принципа симметрии легко следует

ЛЕММА 5. Для любого слова W верно следующее равенство

$$D(W) = D(W^*),$$

т.е. слова W и W^* имеют одну и ту же вычислительную сложность.

В частности, для любого m верны равенства

$$D(c^2 b^m) = D(b^m a^2) \quad \text{и} \quad D(abb^m) = D(b^m bc).$$

ЛЕММА 6. Если слово вида $W = c^k b^m a^n$ дает цепочку (3) максимальной длины $D(k+m+n)$, то оба показателя k и n должны быть четными, т.е. $k = 2r$ и $n = 2s$ при некоторых r и s . При этом цепочку подстановок (3) можно перетасовать так, чтобы в ней сначала слово W переводилось в слово вида

$$W_{r+s} = (ab)^r b^m (bc)^s, \quad (7)$$

а затем происходили остальные подстановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по параметру $k+n$. Для удобства в формулировке индуктивного предположения докажем утверждение леммы для более широкого класса слов вида $W' = (ab)^i c^k b^m a^n (bc)^j$, где $i, j \geq 0$. В силу принципа симметрии, при $k+n > 0$ можем ограничиться рассмотрением случая $k > 0$.

В силу леммы 2 мы можем предполагать, что в последовательности максимальной длины $W' \rightarrow W'_1 \rightarrow \dots \rightarrow W'_\lambda$ все буквы слова W' затрагиваются.

Если $k = 1$, то первая буква c не может затрагиваться ни слева, ни справа. Допустим, что $k \geq 2$. Тогда вторая буква c не может затрагиваться раньше первой, так как, если вторая буква c преобразуется раньше, то после этого справа от первой буквы c появится буква a . Тогда в силу леммы 1 начало $(ab)^i c$ никогда не затронется и мы будем иметь равенство $\mathbf{D}((ab)^i c^k b^m a^n (bc)^j) = \mathbf{D}(c^{k-1} b^m a^n (bc)^j)$. Следовательно, первые две буквы c должны преобразоваться совместно. По лемме 3 их замену можно выполнить первой. Выполнив замену начального вхождения c^2 , получим слово $W'_1 = (ab)^{i+1} c^{k-2} b^m a^n (bc)^j$. Далее проходит индукция по параметру k , в результате чего получим сначала цепочку

$$W' \rightarrow^r W'_k = (ab)^i (ab)^r b^m a^n (bc)^j.$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Нам понадобятся следующие цепочки подстановок, которые реализуют цепочки максимальной длины для исходных слов.

$$\begin{aligned} (ab)b &\rightarrow aac \rightarrow bcc \rightarrow b(ab), \\ b(bc) &\rightarrow acc \rightarrow aab \rightarrow (bc)b, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (ab)(bc) &\rightarrow aacc \rightarrow bccc \rightarrow (bc)(ab), \\ b(ab)b &\rightarrow baac \rightarrow bbcc \rightarrow accc \rightarrow aabc \rightarrow bc bc, \\ b(bc)b &\rightarrow accb \rightarrow aabb \rightarrow aaac \rightarrow abcc \rightarrow abab, \end{aligned} \quad (9)$$

$$b^m \rightarrow acb^{m-2} \rightarrow (ac)^2 b^{m-4} \rightarrow \dots \rightarrow (ac)^{\lceil m/2 \rceil} b^{m-2\lceil m/2 \rceil}. \quad (10)$$

Через $U \rightarrow^i U_1$ будем обозначать утверждение о том, что U переводится в V цепочкой из i подстановок вида (2). Это же обозначение $U \rightarrow^i U_1$ мы используем и для самих цепочек такой длины.

ЛЕММА 8. Максимум длины цепочки вывода для слов данной длины l может достигаться только если эта цепочка начинается с некоторого слова W длины l , имеющего один из видов

$$c^2 b^m, \quad b^m a^2, \quad c^2 b^m a^2. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано число l и дана последовательность подстановок (3) максимальной длины для слов данной длины l . Согласно лемме 4 можно считать, что последовательность (3) начинается с некоторого слова W вида (6), имеющего длину l . В силу леммы 6 эта цепочка с точностью до перестановки подстановок в своем начале переводит слово W в слово вида (7), а затем переводит его в слово W_λ , где $\lambda = \mathbf{D}(W)$. Следовательно, цепочка (3) имеет вид

$$W = c^{2r} b^m a^{2s} \rightarrow^{r+s} W_{r+s} = (ab)^r b^m (bc)^s \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda. \quad (12)$$

Легко убедиться, что если $s \geq 2$, то слово $W_{r+s} = (ab)^r b^m (bc)^s$ можно вывести из некоторого слова $(ab)^{r+1} b^{m+2} (bc)^{s-2}$ такого же вида, имеющего меньшее значение показателя степени bc . При этом длина вывода будет больше. Такой вывод осуществляется с применением цепочек вида (8) и (9) следующим образом:

$$(ab)^{r+1} b^{m+2} (bc)^{s-2} \rightarrow^{3(m+1)} (ab)^r b^m b(ab)b(bc)^{s-2} \rightarrow^5 W_{r+s} = (ab)^r b^m (bc)^s. \quad (13)$$

Если $r \geq 2$, то аналогично получим вывод слова W_{r+s} с помощью $3m+8$ подстановок из некоторого слова вида (7) с меньшим значением $r-2$ показателя степени ab :

$$(ab)^{r-2}b^{m+2}(bc)^{s+1} \rightarrow^{3(m+1)} (ab)^{r-2}b(bc)bb^m(bc)^s \rightarrow^5 W_{r+s} = (ab)^r b^m (bc)^s. \quad (14)$$

Таким образом, из условия максимальности длины цепочки (3) следует, что слово (7) удовлетворяет условию $r, s \leq 1$. А это означает, что оно, в свою очередь, было получено из некоторого слова вида (11) при $r, s \leq 1$, т.е. исходное слово W имеет один из трех видов, указанных в (12). Лемма 8 доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Максимальная вычислительная сложность $\mathbf{D}(W)$ для слов данной длины $|W| = m+2$ достигается только для слов $W = c^2b^m$ и $W = b^ma^2$.*

Для вычислительной сложности этих слов верны равенства

$$\mathbf{D}(m+2) = \mathbf{D}(c^2b^m) = \mathbf{D}(b^ma^2) = \left\lceil \frac{3m^2}{2} \right\rceil + m + 1 < \frac{3(m+1)^2}{2} = \frac{3(|W|-1)^2}{2}. \quad (15)$$

Простым следствием соотношения (15) является равенство

$$\mathbf{D}(abb^m) = \mathbf{D}(c^2b^m) - 1 = \left\lceil \frac{3m^2}{2} \right\rceil + m. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из леммы 8 и теоремы 2 (см. ниже с. 16). Соотношения (15) и (16) докажем для любых m индукцией по m . При $m = 1$ они очевидны.

Индуктивное предположение I. Допустим, что при некотором значении $m > 1$ для слова $W = c^2b^m$ существует максимальная по длине цепочка подстановок

$$W = c^2b^m \rightarrow W_1 = abb^m \rightarrow W_2 \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \quad (17)$$

где λ больше, чем значения, указанные в соотношениях (15) и (16). Предположим, что m есть минимальное такое число, т.е. при любых $l < m$ для слов вида $W = c^2b^l$ эти оценки верны.

ЛЕММА 9. *Если индуктивное предположение I верно для цепочки (17), то в этой цепочке каждое вхождение b^2 , содержащееся в отрезке b^m слова $W = abb^m$ не активно. (Неактивные пары bb будут оставаться неактивными парами, пока одна из этих букв не затронется с другой стороны.)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6 можно считать, что цепочка (17) начинается с замены c^2 на ab . Если некоторое вхождение b^2 в отрезок b^m слова $W = abb^m$ активно, то мы можем выполнить соответствующую подстановку с самого начала. В результате получим цепочку вида

$$W = c^2b^r \rightarrow W_1 = abb^m = abb^t b^2 b^{m-t-2} \rightarrow W'_2 = abb^r acb^{m-r-2} \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \quad (18)$$

где подслово ac в W'_2 тупиковое. Тогда по лемме 2 мы получим равенство $\lambda = 2 + \mathbf{D}(abb^r) + \mathbf{D}(b^{m-r-2})$. Это противоречит индуктивному предположению I, так как в силу (10) имеем

$$\mathbf{D}(b^{m-r-2}) = \left\lceil \frac{m-r-2}{2} \right\rceil.$$

Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Пусть для данного слова $W = c^2b^m$ цепочка подстановок (17) выбрана согласно индуктивному предположению I. Тогда можно так переставить в ней порядок независимых подстановок (см. лемму 3), чтобы в результате она началась следующим образом:

$$\begin{aligned} W = c^2b^m &\rightarrow W_1 = abb^m \rightarrow^3 W_4 = babb^{m-1} \rightarrow^{3(m-2)} W_{1+3(m-1)} = b^{m-2}babb \\ &\rightarrow^5 W_{1+3m+2} = b^{m-2}(bc)(bc) \rightarrow^{3(m-3)} W_{1+6m-7} = b(bc)bb^{m-4}(bc) \\ &\rightarrow^5 W_{1+6m-2} = ab(ab)b^{m-4}bc \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \end{aligned} \quad (19)$$

где все вхождения b^2 в подслово b^{m-4} слова W_{1+6m-2} не активны, т.е. буквы b из b^{m-4} в рассматриваемой цепочке не должны преобразоваться вместе с соседями из этого же подслова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены c^2 на ab единственное активное вхождение b^2 в слове $W = (ab)b^m$ в силу леммы 9 должно содержать первую букву b . Дальнейшие 3 подстановки однозначно реализуют первую цепочку из (8), переставив соседние множители ab и b , т.е. мы получим цепочку подстановок

$$\begin{aligned} W = c^2b^m &\rightarrow W_1 = abb^m \rightarrow W_2 = a^2cb^{m-1} \\ &\rightarrow W_3 = bc^2b^{m-1} \rightarrow W_4 = babb^{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

В частности, это означает, что $\mathbf{D}(c^2b) = 4$.

Пусть $m > 1$. В слове W_4 активно только первое вхождение b^2 после буквы a . Применив к этому слову первые две однозначно определенные подстановки, получим цепочку

$$W \rightarrow W_4 = b(ab)b^{m-1} \rightarrow W_5 = ba^2cb^{m-2} \rightarrow W_6 = b^2c^2b^{m-2} \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda. \quad (21)$$

В слове W_6 могут быть активны как b^2 , так и c^2 . Разберем две возможности:

- 1) вхождение c^2 активно;
- 2) вхождение c^2 не активно.

Случай 1). В этом случае, заменив c^2 на ab , получим слово

$$W_7 = b^2(ab)b^{m-2},$$

в котором множитель ab , начиная со слова W_4 , переставился вправо еще на одну букву b .

Допустим, что $m = 2$. Тогда в полученном слове $W_7 = b^2(ab)$ активно только начало b^2 , замена которого дает тупиковое слово $W'_8 = ac(ab)$. Легко видеть, что если в слове W_6 сначала заменить b^2 , а потом c^2 , то для $m = 2$ получим более длинное продолжение

$$W_6 = b^2c^2 \rightarrow W'_7 = acc^2 \rightarrow W_8 = aabc \rightarrow W_9 = bc bc.$$

Следовательно, при $m = 2$ имеем $\mathbf{D}(c^2b^2) = 9$.

Пусть $m > 2$. При $m > 2$ в преобразуемом слове W_7 пара b^2 , расположенная слева от ab , не должна быть активна, так как иначе, выполнив ее преобразование, мы получили бы слово с тупиковым началом ac

$$W'_8 = acabb^{m-2}.$$

Тогда, используя лемму 2 для конца цепочки (21), начинающегося со слова W'_8 , получим

$$\lambda = 8 + \mathbf{D}(abb^{m-2}) = 8 + \left\lceil \frac{3(m-2)^2}{2} \right\rceil + m - 2 < \frac{3m^2}{2},$$

а это при $m > 2$ противоречит предположению I.

Следовательно, если $m > 2$ и в последовательности (17) максимальной длины вхождение c^2 в слово W_6 активно, то вхождение b^2 , расположенное левее него, не должно быть активно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Допустим, что при анализе цепочки (21) случай 1) возникает много раз подряд. При этом каждый раз слева от c^2 будет возникать еще одна буква b . Эти буквы b будут накапливаться, но на каждом шаге аналогично предыдущему мы будем убеждаться, что после подстановки ab вместо c^2 ближайшее слева вхождение b так же, как и все буквы b , возникшие еще раньше, не должны преобразоваться вместе с предыдущей буквой b , так как, в случае замены его на ac это вхождение ac в преобразуемом слове окажется тупиковым подсловом.

Это означает, что все буквы b , через которые ab “перепрыгивает” слева направо при повторениях случая 1), должны в дальнейшем преобразоваться поодиночке. Другими словами, эти пары соседних букв bb сохраняют свойство, которое согласно лемме 9 они имели в исходном слове c^2b^m , когда были справа от c^2 .

Если случай 1) возникает m раз подряд, то в результате получим цепочку

$$W \xrightarrow{3m} W_{3m} = b^m c^2 \rightarrow W_{3m+1} = b^m ab,$$

в которой последнее слово содержит тупиковый конец ab . Тогда по лемме 2 имеем соотношение

$$\lambda = 1 + 3m + \mathbf{D}(b^m) = 1 + 3m + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil < \frac{3m^2}{2} + m + 1, \quad (22)$$

а это при $m > 2$ противоречит условию I выбора числа m .

Следовательно, в цепочке (21) при движении множителя ab вправо случай 2) должен возникать хотя бы один раз.

Случай 2). В этом случае вхождение c^2 в слово $W_6 = b^2 c^2 b^{m-2}$ не активно по условию. Тогда может быть активно только вхождение b^2 , расположенное слева от c^2 . В слове $W_7 = acc^2 b^{m-2}$, полученном после замены b^2 на ac , должно быть активно первое вхождение c^2 . После его замены на (ab) , получим слово $W_8 = a^2 bcb^{m-2}$, в котором должно быть активно вхождение a^2 . Выполнив его преобразование, получим продолжение цепочки (21) следующего вида:

$$\begin{aligned} W &\rightarrow W_4 = b(ab)b^{m-1} \rightarrow W_5 = ba^2 cb^{m-2} \\ &\rightarrow W_6 = b^2 c^2 b^{m-2} \rightarrow W_7 = acc^2 b^{m-2} \xrightarrow{2} W_9 = (bc)(bc)b^{m-2}, \end{aligned} \quad (23)$$

которое можно рассматривать как результат применения первой максимальной цепочки (9) к слову $W_4 = b(ab)b^{m-1}$ из цепочки (21).

Легко показать, что при $m > 2$ полученная нами цепочка (23) не может быть началом максимальной последовательности подстановок (17), так как при наличии

в слове W_6 справа от c^2 хотя бы одной буквы b у нас есть возможность заменить начало (23) последовательности (17) до последнего слова $W_9 = (bc)(bc)b^{m-2}$ более длинной цепочкой, в которой после замены c^2 в слове W_6 на ab мы переставим ab вправо еще с одной буквой b , затем применим первую цепочку (9) к слову $W'_7 = b(ab)b^{m-1}$ и после этого, используя вторую цепочку (8), переставим оба вхождения bc в начало слова. В результате начало (23) максимальной цепочки (17) удлинится на 12 шагов с тем же последним словом $(bc)(bc)b^{m-2}$.

Это означает, что для получения максимальной цепочки (17) случай 2 целесообразно реализовать только после того, как пара ab переставится со всеми буквами b , лежащими в слове $W_1 = abb^m$ правее нее, кроме одной, т.е. когда появится слово $W_{1+3(m-1)} = b^{m-2}babb$. Таким образом, мы можем считать, что цепочка (17) имеет вид

$$\begin{aligned} W = c^2b^m &\rightarrow W_1 = (ab)b^m \rightarrow^3 W_4 = babb^{m-1} \rightarrow^3 \dots \\ &\rightarrow^{3(m-2)} W_{1+3(m-1)} = b^{m-2}(babb) \\ &\rightarrow^5 W_{1+3m+2} = b^{m-2}bcbc \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \end{aligned} \quad (24)$$

где после слова $W_1 = abb^m$ мы сначала переставили ab вправо через $m-1$ букву b , затем применили первую максимальную цепочку (9) длины 5 к концу $babb$ полученного слова $W_{1+3(m-1)}$.

Заметим, что максимальность числа шагов при переходе в цепочке (24) от слова W_1 к слову

$$W_{1+3m+2} = b^{m-2}bcbc \quad (25)$$

вытекает из проведенного выше анализа всех промежуточных подстановок. При этом согласно замечанию 1 должно выполняться условие, что все пары соседних букв bb , входящие в начальный отрезок b^{m-2} слова (25), не активны в (24), т.е. в цепочке (24) активно только последнее вхождение bb в слово (25). Выполнив его замену, мы аналогично (21) однозначно получим цепочку вида

$$\begin{aligned} W &\rightarrow W_4 = b(ab)b^{m-1} \rightarrow W_{3m+3} = b^{m-2}bcbc \\ &\rightarrow^2 W_{3m+5} = b^{m-3}a^2b^2c \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \end{aligned} \quad (26)$$

где в слове

$$W_{3m+5} = b^{m-3}a^2b^2c \quad (27)$$

могут быть активны только выделенные вхождения a^2 и b^2 .

Сначала допустим, что $m = 3$. Тогда имеем $W_{3m+5} = W_{14} = a^2b^2c$.

Если a^2 в слове $W_{14} = a^2b^2c$ не активно, то активно b^2 и после его замены мы получим цепочку $W_{14} \rightarrow W_{15} = a^2acc \rightarrow W_{16} = a^2aab$, где в последнем слове первое и третье вхождения a^2 не активны, т.е. активно второе вхождение a^2 , замена которого приводит к тупиковому слову $W_{17} = abcab$.

Пусть в слове $W_{14} = a^2b^2c$ вхождение a^2 активно. Тогда, после его замены, получим при $m = 3$ однозначно определенную с точностью до перестановки цепочку

$$W = c^2b^3 \rightarrow^{15} W_{3m+6} = W_{15} = bcb(bc) \rightarrow^3 W_{18} = bcbcb. \quad (28)$$

Следовательно, при $m = 3$ имеем равенство

$$D(c^2b^3) = 3m + 9 = 18.$$

При $m \geq 4$ после замены в (27) вхождения a^2 на bc , получим слово

$$W_{3m+6} = b^{m-3}bcbbc. \quad (29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Докажем, что при $m \geq 4$ в последовательности (26) максимальной длины вхождение a^2 в слове (27) должно быть активно независимо от активности последнего b^2 в том же слове.

Допустим, что в слове (27) вхождение a^2 не активно. Тогда активно последнее вхождение b^2 . Его замена приводит к слову $W_{3m+6} = b^{m-3}a^2acc$, в котором активно либо второе вхождение a^2 , либо вхождение c^2 . Если в полученном слове второе вхождение a^2 активно, то заменив его на bc , получим слово $W_{3m+7} = b^{m-3}abccc$, в котором активно одно из двух вхождений cc . Замена любого из них приведет к некоторому слову W_{3m+8} с тупиковым концом вида $ababc$ или $abcab$, не содержащему активных вхождений. В обоих случаях при любом m начальный отрезок b^{m-3} по условию не должен содержать квадратов b^2 , т.е. это возможно только при $m \leq 4$. Очевидно, при $m = 3$ полученная цепочка короче чем (28), а при $m = 4$ в силу леммы 2 это противоречит условию выбора числа m .

Следовательно, при неактивном a^2 остается подслучай, когда второе вхождение aa в слове $W_{3m+6} = b^{m-3}a^2acc$ тоже не активно. Тогда замена в этом слове cc на ab даст нам новое слово $W_{3m+7} = b^{m-3}a^2aab$, в котором должно быть активно последнее вхождение aa , замена которого дает слово $W_{3m+8} = b^{m-3}a^2bcb$. В этом слове должно быть активно a^2 . Это означает, что и в слове (27) соответствующая пара a^2 активна. Замечание 2 доказано.

В дальнейшем будем считать, что $m \geq 4$.

Пусть $m = 4$. Тогда слово (29) имеет вид $W_{18} = bcbcb^2c$.

Заменив в этом слове первое вхождение b^2 , мы легко получим следующую цепочку максимальной длины при $m = 4$:

$$\begin{aligned} W = c^2b^4 &\rightarrow W_1 = (ab)b^4 \rightarrow^3 W_4babbb^3 \rightarrow^6 W_{10} = b^2(babb) \\ &\rightarrow^5 W_{15} = b^2(bc)bc \rightarrow^3 W_{18} = (bcbcb)bc \rightarrow^5 W_{23} = ab(ab)(bc) \\ &\rightarrow^3 W_{26} = (ab)(bc)ab \rightarrow^3 W_{29} = bcabab, \end{aligned} \quad (30)$$

где после слова W_{18} , мы применили вторую цепочку из (9), а затем переставили множитель ab в конец слова, используя третью цепочку из (8).

Таким образом, в ходе анализа структуры максимальной цепочки (17) и возможных перестановок независимых подстановок активных вхождений в (17) мы вычислили точные значения $D(c^2b^m)$ при $m = 1, 2, 3, 4$, которые подытожены в следующей лемме.

ЛЕММА 11. Простой подсчет подтверждает, что соотношения (15) и (16) верны для найденных выше значений $D(c^2b^m)$ при $m = 1, 2, 3$ и 4:

$$D(c^2b) = 4, \quad D(c^2b^2) = 9, \quad D(c^2b^3) = 18, \quad D(c^2b^4) = 29.$$

В частности, это означает, что в нашем доказательстве мы можем использовать в качестве индуктивного шага число 4, так как индуктивное предположение теоремы 1 доказано для всех $m \leq 4$.

Для $m > 4$ продолжим анализ возможных продолжений максимальной цепочки (26) после, того как появилось слово (29):

$$\begin{aligned} W &\xrightarrow{4} W_4 = b(ab)b^{m-1} \rightarrow W_{3m+3} = b^{m-2}bcbc \\ &\xrightarrow{3} W_{3m+6} = b^{m-3}bcbbc \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \end{aligned} \quad (31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в рассматриваемой цепочке непересекающиеся вхождения b^2 в данное слово оба активны, то преобразование любого из них мы можем выполнить первым.

Те отрезки рассматриваемой цепочки подстановок, в которых пара bc последовательно переставляется с буквами b , лежащими слева от нее, мы называем *левонаправленными*. Соответственно, те отрезки рассматриваемой цепочки подстановок, где последовательно пара ab переставляется с буквами b , лежащими справа от нее, мы называем *правонаправленными*.

В частности, в цепочке (24) при движении вхождения ab вправо мы применяли *правонаправленную* цепочку подстановок.

Напомним, что вхождения b^2 , содержащиеся в начальном отрезке b^{m-3} слова $W_{3m+6} = b^{m-3}bcb^2c$, по условию не активны в цепочке (31). В этом слове активными могут быть только вхождения b^2 , лежащие рядом слева от каждой из двух вхождений буквы c . Очевидно, первое из этих вхождений b^2 должно быть активно независимо от активности последнего вхождения b^2 , так как в противном случае левее первой буквы c не могли бы происходить никакие преобразования при наличии там вхождения b^2 . Выполнив его замену и замену возникшего активного квадрата cc , получим цепочку

$$\begin{aligned} W &\rightarrow W_{3m+6} = b^{m-3}bcb^2c \rightarrow W_{3m+7} = b^{m-4}accb^2c \\ &\rightarrow W_{3m+8} = b^{m-4}a^2b^3c \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

Мы можем рассмотреть два случая:

- 1') в итоговом слове W_{3m+8} цепочки (32) вхождение a^2 активно;
- 2') вхождение a^2 в слово $W_{3m+8} = b^{m-4}a^2b^3c$ не активно.

В случае 1') после подстановки bc вместо a^2 получим слово $W_{3m+9} = b^{m-4}bcb^2bc$, которое является результатом перестановки в слове (25) первого вхождения bc влево через две буквы b начального отрезка b^{m-2} . При этом мы можем считать, что эти две буквы b , “перепрыгнувшие” через bc вправо сохранили свое свойство составлять неактивную пару b^2 , так как если заменить эту пару b^2 на ac , то получим слово $W'_{3m+10} = b^{m-4}bcacbc$ с тушиковым концом $acbc$, откуда по лемме 2 вытекает соотношение

$$\lambda = 3m + 10 + \mathbf{D}(b^{m-4}bc) < \frac{3m^2}{2} + m + 1,$$

которое противоречит индуктивному предположению **I**. Это замечание симметрично приведенному выше замечанию 1 об ограничении на активность соседних пар букв b , которые в слове $W = abb^m$ “перепрыгнули” влево через слово ab .

Если при нашем анализе цепочки (24) после слова $W_{1+3m+2} = b^{m-2}bcbc$ случат 1') возникнет подряд $m - 2$ раза, то после перестановки влево множителя bc со всеми буквами b , мы получим слово $W_{1+6m-4} = bcb^{m-2}bc$, начало которого bc

в силу леммы 1 является тупиковым подсловом. Тогда по лемме 2 и индуктивному предположению I получим неравенство

$$\lambda = 6m - 3 + \mathbf{D}(b^{m-2}bc) = 6m - 3 + \left\lceil \frac{3(m-2)^2}{2} \right\rceil + m - 2 = \left\lceil \frac{3m^2}{2} \right\rceil + m + 1,$$

а это противоречит условию выбора числа $\mathbf{m}$.

Следовательно, в цепочке (24) при движении множителя bc влево случай 2') должен возникнуть хотя бы один раз.

Согласно принципу симметрии и приведенным выше аргументам для случая, когда ab передвигалось вправо, максимальная длина цепочки (24) может быть достигнута только при условии, что случай 2') возникает в момент, когда bc переставилось влево через $m - 3$ буквы b и слева осталась только одна буква b . В таком случае аналогично тому, как это было ранее в симметричных преобразованиях, в результате $(m - 3)$ -х перестановок букв b вправо мы получим слово

$$W_{1+3m+2+3(m-3)} = (bbcb)b^{m-4}bc, \quad (33)$$

где вхождение bb в его начале должно быть активно, так как иначе буква c при наличии слева неактивной пары bb не могла бы затронуться вообще. Замена начальной пары bb на ac вместе с последующими четырьмя однозначно определенными заменами активных квадратов преобразует слово (33) в слово

$$W_{1+6m-2} = ababb^{m-4}bc, \quad (34)$$

которое можно рассматривать как результат применения второй максимальной цепочки (9) к начальному отрезку $bbcb$ слова (33). Тем самым мы завершили построение цепочки (19).

При этом, как указано выше, можно считать, что все квадраты bb , лежащие в отрезке b^{m-4} слова (34) не активны в продолжении рассматриваемой последовательности. Лемма 10 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 продолжим анализ и возможные перестановки порядка подстановок в максимальной по длине последовательности (19).

В слове $W_{1+6m-2} = ababb^{m-4}bc$ могут быть активны только первое и последнее вхождения bb . Эти два случая симметричны.

Замена первого вхождения b^2 приведет к перестановке ab вправо с соседней буквой b , а замена последнего b^2 приведет к перестановке bc влево с соседней буквой b . В общем случае эти вхождения будут переставляться навстречу друг другу, пока они не встретятся. При встрече они должны переставиться друг с другом и продолжить движение в том же направлении до конца слова.

Сначала рассмотрим правонаправленное движение ab вправо. Анализ, проведенный при доказательстве леммы 10, показывает, что в правонаправленной цепочке подстановок максимальной длины вхождение ab переставится со всеми буквами b справа, кроме одной, после чего применяется первое соотношение (9). Как мы убедились, разбирая случаи 1 и 2 при доказательстве леммы 10, максимальная длина цепочки вывода будет достигаться правонаправленной цепочкой перестановок вхождения ab с буквами b справа от него, пока оно не дойдет до последней буквы b , т.е. появления слова вида $W_{1+6m-2+3(m-4)} = ab^{m-4}babbc$.

Если ab переставится и с последней буквой b , то возникнет тупиковый конец abc в конце слова $W'_{1+9m-11} = ab^{m-4}bbabc$, что не даст максимальной цепочки в силу леммы 2.

Это означает, что либо ab должно переставиться с bc и мы получим слово

$$W_{1+9m-11} = ab^{m-4}bbcab \quad (35)$$

с тупиковым концом ab , либо будет применена первая цепочка (9) длины 5 и мы получим слово $W_{1+9m-9} = ab^{m-4}bcbcc$, где должно быть активно c^2 , так как иначе в этом слове вторая справа буква c должна была бы затрагиваться слева, а это тут же создаст тупиковый конец abc .

Следовательно, можем считать, что продолжение максимальной последовательности (19) при движении ab вправо имеет вид

$$\begin{aligned} W = c^2b^m \xrightarrow{1+6m-2} W_{1+6m-2} &= ab(ab)b^{m-4}bc \\ &\xrightarrow{3(m-3)} W_{9m-10} = abb^{m-4}bcab \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda. \end{aligned} \quad (36)$$

В силу принципа симметрии аналогичная картина будет при поступательном движении bc влево до конца слова.

В слове $W_{9m-10} = ab^{m-4}bbc(ab)$ с тупиковым концом ab опять могут быть активны два крайних вхождения b^2 . Замена первого вхождения b^2 аналогично предыдущему приведет к перестановке ab вправо с соседней буквой b , а замена последнего b^2 приведет перестановке bc влево с соседней буквой b . В общем случае эти вхождения будут переставляться навстречу друг другу, пока они не встретятся. Допустим, что они встретятся после i перестановок bc влево. В момент их встречи получим слово

$$W_{9m-10+3(m-4)} = b^{m-4-i}(ab)(bc)b^i(ab),$$

в котором активно только вхождение b^2 , расположенное между буквами a и c . Его замена приведет к перестановке ab и bc , т.е. получим слово $W_{9m-10+3(m-4)+3} = b^{m-4-i}(bc)(ab)b^iab$, в котором ОПЯТЬ будут активны только вхождения b^2 слева от c и справа от a .

В силу ранее приведенного анализа продвижения ab вправо в цепочке (36) и принципа симметрии итоговый результат преобразований не зависит от места встречи ab и bc . Поэтому с точностью до перестановки независимых преобразований мы можем считать, что на этот раз сначала движется bc влево до конца, т.е. имеем $i = m - 4$. Это означает, что дальнейшее продолжение максимальной последовательности (36) с точностью до перестановки независимых подстановок имеет вид

$$\begin{aligned} W = c^2b^m \xrightarrow{1+6m-2} W_{1+6m-2} &= ab(ab)b^{m-4}bc \\ &\xrightarrow{3(m-3)} W_{1+9m-11} = abb^{m-4}bcab \\ &\xrightarrow{3(m-3)} W_{9m-10+3(m-3)} = (bc)(ab)b^{m-4}ab \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda, \end{aligned} \quad (37)$$

где слово $W_{12m-19} = (bc)(ab)b^{m-4}ab$ имеет тупиковое начало bc и тупиковый конец ab . Отсюда, используя лемму 2, лемму 11 и индуктивное предположение об истинности равенства (16) для меньших значений m , получаем равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(c^2b^m) &= 12m - 19 + \mathbf{D}(abb^{m-4}) = 12m - 19 + \left\lceil \frac{3(m-4)^2}{2} \right\rceil + m - 4 \\ &= 12m - 19 + \left\lceil \frac{3m^2}{2} \right\rceil - 12m + 24 + m - 4 = \left\lceil \frac{3m^2}{2} \right\rceil + m + 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Имеем*

$$\mathbf{D}(c^2b^ka^2) = \mathbf{D}(c^2b^{k+2}) - 3k - 4. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим начинающуюся со слова $W = c^2b^{k+4}$ последовательность преобразований максимальной длины. Согласно лемме 10 эта последовательность с точностью до перестановки независимых подстановок имеет вид

$$W = c^2b^{k+4} \xrightarrow{1+6(k+4)-2} W_{6k+23} = ab(ab)b^k(bc) \rightarrow \dots \rightarrow W_\lambda. \quad (40)$$

Из анализа, проведенного при доказательстве теоремы 1, следует, что с точностью до перестановки порядка независимых подстановок можно считать, что в максимальной цепочке подстановок (40) вхождение bb рядом со второй буквой a активно. Переставив второе вхождение ab вправо через все буквы b и через пару bc с использованием цепочек типа (8), получим последовательность

$$W = c^2b^{k+4} \xrightarrow{6k+23} W_{6k+23} = ababb^kbc \xrightarrow{3(k+1)} W_{9k+26} = abb^kbcab, \quad (41)$$

где заключительное слово имеет тупиковый конец ab . Из проведенного при доказательстве леммы 9 анализа максимальной цепочки, начинающейся со слова c^2b^m , следует, что максимальная цепочка, начинающаяся со слова c^2b^{k+4} с точностью до перестановки порядка подстановок, может иметь своим началом цепочку (41), которая аналогична цепочке (36) при $m = k + 4$. Отсюда, используя леммы 6 и 2 и теорему 1, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(c^2b^ka^2) &= \mathbf{D}(abb^kbc) + 2 = \mathbf{D}(c^2b^{k+4}) - 9k - 26 = \frac{3}{2}((k+2)+2)^2 - 8k - 19 \\ &= \frac{3}{2}(k+2)^2 + 6(k+2) + 6 - 8k - 19 = \mathbf{D}(c^2b^{k+2}) - 3k - 4. \end{aligned} \quad (42)$$

Теорема 2 доказана.

Пример X. Зантемы. В ходе обсуждения теоремы 1 естественно возник вопрос о том, можно ли указать сохраняющую длины слов систему подстановок в алфавите из трех букв, в которой все выводы терминируют, т.е. обрываются на конечном шаге, и при этом слова из некоторого класса имеют экспоненциальный рост длин выводов

из них. В статье [5] Ханс Зантема указал простой пример такого рода с тремя правилами подстановок в алфавите из четырех символов¹.

Система подстановок Ханса Зантемы $\mathbf{R}$ определяется следующими тремя сохраняющими длину слова подстановками в алфавите $\Delta = \{0, 1, b, d\}$:

$$\begin{aligned} 0d &\rightarrow 1d, & (\text{I}) \\ 01 &\rightarrow b0, & (\text{II}) \\ b1 &\rightarrow 10. & (\text{III}) \end{aligned} \tag{43}$$

В подстановках (43) системы $\mathbf{R}$ вхождения левых частей подстановок так же, как и в рассмотренной нами системе Σ , не пересекаются. Поэтому можно менять порядок выполнения любых двух независимых подстановок в данное слово, т.е. от перестановки порядка этих подстановок результат не зависит. Для системы $\mathcal{R}$ верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого слова $W = 0^k d$ существует однозначно определенная с точностью до перестановки порядка преобразований максимальная последовательность подстановок системы $\mathbf{R}$*

$$0^k d \rightarrow^m 1^k d,$$

имеющая длину $m \geq 2^k - 1$, т.е. вычислительная сложность $\mathbf{D}(0^k d)$ растет как экспонента от длины слова $0^k d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по k . При $k = 1$ имеем одну подстановку $0d \rightarrow 1d$. Допустим, что при $k = i$ существует цепочка подстановок

$$0^i d \rightarrow^{m(i)} 1^i d, \tag{44}$$

где $m(i) \geq 2^i - 1$, и докажем то же самое при $k = i + 1$.

Используя последовательно индуктивное предположение (44), подстановки (II) (i раз), подстановку (I) 1 раз, подстановку (III) (i раз) и опять индуктивное предположение (44), получим цепочку

$$00^i d \rightarrow^{m(i)} 01^i d \rightarrow^i b^i 0d \rightarrow b^i 1d \rightarrow^i 10^i d \rightarrow^{m(i)} 11^i d, \tag{45}$$

длина которой равна $2m(i) + 2i + 1 \geq 2^{i+1} - 1 + 2i$.

Очевидно, эту цепочку вывода укоротить невозможно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, “Оценка сложности вывода в одной системе подстановок”, *Докл. РАН*, **428:3** (2009), 295–299.

¹Как указывает Зантема в [5], этот пример является упрощением первоначального примера с тем же свойством, задаваемого четырьмя правилами подстановок, который был предложен Хофманом и Валдманом в их докладе на конференции: “Proof Theory and Rewriting in Obergurgl”, March 30, 2010.

В конце прошлого века системы Туэ некоторые авторы стали называть “Word Rewriting Systems” (сокращенно: WRS-системы). В последнее время другие авторы, работающие в компьютерных науках (Computer Science), предпринимают попытки заменить WRS-системы на “SRS-системы”, в связи с тем, что они (почему-то без всяких оговорок) используют термин *строка* (“string”) вместо классического термина “слово” (“word”). Мы не считаем такую практику приемлемой.

- [2] D. Hofbauer, J. Waldmann, “Termination of $\{aa \rightarrow bc, bb \rightarrow ac, cc \rightarrow ab\}$ ”, *Inform. Process. Lett.*, **98**:4 (2006), 156–158.
- [3] С. И. Адян, “Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп”, Тр. МИАН СССР, **85**, М., 1966, 3–123.
- [4] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.
- [5] H. Zantema, “Complexity of guided insertion-deletion in RNA-editing”, *Language and Automata Theory and Applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., **6031**, Springer-Verlag, Berlin, 2010, 608–619.

С. И. Адян

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступило

09.01.2012