Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Яровая, Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 123–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:58:36

Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий

Е. Б. Яровая

Вводится модель ветвящегося случайного блуждания по конечномерной целочисленной решетке с непрерывным временем и конечным числом источников ветвления трех типов. Исследуются спектральные свойства оператора, описывающего эволюцию средних численностей частиц как в произвольном узле, так и на всей решетке. Установлены условия существования старшего положительного собственного значения оператора, определяющие экспоненциальный рост численностей частиц в модели.

Библиография: 18 названий.

1. Введение

Моделям ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) частиц по конечномерным целочисленным решеткам $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем посвящен ряд публикаций, см., например, [1]–[6]. До последнего времени основное внимание при исследовании такого рода моделей уделялось случаю ВСБ с одним источником ветвления (т.е. источником размножения и гибели частиц). Для анализа этого случая были предложены различные подходы, среди которых достаточно плодотворным оказался подход, основанный на представлении эволюционных уравнений для моментов численностей частиц как уравнений в банаховых пространствах [1]–[4].

При таком подходе исследование ВСБ разбивается на три этапа. На первом из них эволюционные уравнения для переходных вероятностей и моментов численностей частиц представляются как линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. На втором этапе в силу линейности полученных уравнений исследование асимптотического поведения решений при $t \rightarrow \infty$ сводится к изучению спектра операторов в правых частях соответствующих уравнений. Наконец, на третьем этапе анализ структуры спектра эволюционных операторов позволяет выявить фазовые переходы в асимптотическом поведении моментов численностей частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке.

В ряде моделей исследование спектра возникающих линейных операторов оказалось возможным довести до конструктивных результатов. В простейшем случае [3]

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00266).

это удалось сделать за счет самосопряженности оператора переходных вероятностей, а в более сложной ситуации [4], [7] – за счет того, что этот оператор, хотя и не является самосопряженным, но допускает симметризацию подходящей заменой переменных. Как показано в [4], при одночастичном возмущении самосопряженных и “симметризуемых” операторов, в их спектре могут появляться положительные собственные значения, которые определяют экспоненциальный рост моментов численностей частиц. Более того, проблема моментов для рассматриваемых ВСБ в ряде случаев оказалась однозначно разрешимой, что позволило получать теоремы о предельном поведении численностей частиц.

Цель настоящей работы – распространить описанную выше схему исследования на модели ВСБ с конечным числом источников ветвления и показать, что основные принципиальные сложности, возникающие при изучении спектра таких линейных операторов, могут быть конструктивно преодолены. Особое внимание уделяется второму этапу предложенной схемы, поскольку первый и третий этапы при переходе к случаю с несколькими источниками не претерпевают существенных изменений.

В работе рассматривается модель ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем и конечным числом источников ветвления. Предполагается, что частицы в системе эволюционируют независимо друг от друга и от всей предыстории. Каждая из частиц блуждает по решетке до тех пор пока не попадет в один из источников ветвления, поведение в котором зависит от типа источника. Исходя из анализа моделей в [3]–[6], [8] предполагается, что источники ветвления бывают трех типов. В источниках первого типа гибель и размножение частиц происходит без нарушения симметричности случайного блуждания. В источниках второго типа нарушается симметричность блуждания за счет введения дополнительного параметра, усиливающего степень преобладания ветвления или блуждания в источнике. Источники третьего типа более правильно было бы назвать “псевдо-источниками”, так как в них лишь нарушается симметричность блуждания без размножения или гибели частиц. Для ВСБ с r источниками первого, k источниками второго и m источниками третьего типа введем обозначение $\text{BRW}/r/k/m$, где BRW – аббревиатура от “branching random walk” (перевод с *англ.* “ветвящееся случайное блуждание”). Формальное описание модели $\text{BRW}/r/k/m$ дается в разделе 2.

В [3], [4], [8] исследовались модели $\text{BRW}/1/0/0$ и $\text{BRW}/0/1/0$, для которых были установлены условия экспоненциального роста численностей частиц как в произвольном узле, так и на всей решетке в смысле сходимости моментов. Такой характер роста численностей частиц в этих процессах определялся наличием изолированного положительного собственного значения в спектре оператора, описывающего эволюцию средних численностей частиц. Отметим, что для $\text{BRW}/1/0/0$ соответствующий эволюционный оператор может быть представлен как сумма ограниченного самосопряженного оператора $A: l^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^d)$ и вполне непрерывного оператора (одночастичное возмущение), а для $\text{BRW}/0/1/0$ – как сумма оператора A и двух вполне непрерывных операторов (двухчастичное возмущение) или как сумма ограниченного (несамосопряженного) оператора и одного вполне непрерывного оператора (одночастичное возмущение несамосопряженного ограниченного оператора) [4]. Необходимые и достаточные условия, при которых подобного рода возмущения приводят к появлению изолированного положительного собственного значения в структуре спектра эволюционного оператора, не меняя при этом его существенного спектра, указаны, например в [3], [4].

В моделях BRW/ $r/k/m$ с конечным числом источников возникают более сложные (многочастичные) возмущения генератора симметричного случайного блуждания A , имеющие вид

$$Y = A + \sum_i \zeta_i \Delta_{u_i} A + \sum_j \beta_j \Delta_{v_j}, \quad (1.1)$$

в которых $A: l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, — это симметрический оператор, $\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$, а $\delta_x = \delta_x(\cdot)$ обозначает вектор-столбец на решетке, принимающий единичное значение в точке x и нули в остальных точках, и правая часть содержит конечное число слагаемых. При этом в каждом из множеств $\mathbb{U} = \{u_i\}$ и $\mathbb{V} = \{v_j\}$ точки попарно различны, но сами множества $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ могут иметь непустое пересечение. Точки из множества $\mathbb{V} \setminus \mathbb{U}$ отвечают r источникам первого типа в рассматриваемой вероятностной модели, точки из множества $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ — k источникам второго типа, а точки из множества $\mathbb{U} \setminus \mathbb{V}$ — m источникам третьего типа. Именно изучению операторов вида (1.1) уделяется основное внимание в настоящей работе. Будет показано, что только возмущения $\sum_j \beta_j \Delta_{v_j}$ могут привести к появлению положительных собственных значений оператора Y , причем кратность каждого такого собственного значения не превышает числа слагаемых в последней сумме. Ключевым моментом при исследовании спектра оператора Y является то, что оператор $A + \sum_i \zeta_i \Delta_{u_i} A$ оказывается симметризуемым (теорема 4). Отметим при этом, что исследование спектральных свойств ограниченных самосопряженных операторов с многочастичным возмущением представляет самостоятельный интерес и имеет иные приложения, например, в статистической физике [9], [10]. Более того, задача для ВСБ с нарушением симметрии блуждания в источниках позволяет получить результаты для многочастичных возмущений ограниченных (но уже несамосопряженных) операторов.

Структура работы следующая. Раздел 2 посвящен формальному описанию модели ВСБ с несколькими источниками ветвления. В нем показывается, каким образом операторы вида (1.1) возникают в таких моделях, и демонстрируется, что структура их спектра определяет асимптотическое поведение численностей частиц. При исследовании эволюционных уравнений для средних численностей частиц в этом разделе используется техника дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Вспомогательный раздел 3 посвящен введению обозначений, определений и изложению фактов, необходимых для применения этой техники. В разделе 4 показывается, что Y является линейным ограниченным оператором в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$. При этом все точки его спектра, не принадлежащие кругу $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$, где $a(0) = \delta_0^T A \delta_0$, могут быть только собственными значениями конечной кратности. Это утверждение позволяет предложить общий метод получения конечного набора (нелинейных) уравнений, определяющих в пространстве параметров ζ_i, β_j условия существования в спектре оператора изолированных положительных собственных значений, не принадлежащих C . Соответствующие условия для ВСБ с двумя источниками ветвления выписаны в явном виде в разделе 5. Доказательства утверждений вынесены в раздел 6.

2. Модель ВСБ с несколькими источниками

Ниже $\mathbb{Z}^d$ обозначает множество векторов $\{n_1, n_2, \dots, n_d\}$ с целочисленными координатами n_i , называемое в дальнейшем d -мерной целочисленной решеткой.

Эволюция системы частиц в ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ описывается числом частиц $\mu_t(y)$ в момент времени t в каждом из узлов $y \in \mathbb{Z}^d$ в предположении, что при $t = 0$ система состоит из одной частицы, находящейся в некотором узле $x \in \mathbb{Z}^d$, т.е. $\mu_0(y) = \delta_x(y)$. Таким образом, общее число частиц на $\mathbb{Z}^d$ удовлетворяет равенству $\mu_t = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mu_t(y)$. Через $\mathbf{p}(t; x, y)$ будет обозначаться переходная вероятность случайного блуждания в рассматриваемом ВСБ. Пусть E_x обозначает математическое ожидание численностей частиц при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$; тогда моменты численностей частиц определяются как $\mathbf{m}_n(t; x, y) := E_x \mu_t^n(y)$ и $\mathbf{m}_n(t; x) := E_x \mu_t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Опишем три “базовых” модели ВСБ с одним источником. Предполагается, что частицы блуждают по $\mathbb{Z}^d$, и в некотором источнике каждая из частиц может дать произвольное число потомков, погибнуть или изменить интенсивность блуждания.

Закон блуждания удобно описывать в терминах вспомогательной функции $a(z)$, $z \in \mathbb{Z}^d$, для которой $a(0) < 0$, $a(z) \geq 0$ при $z \neq 0$ и $a(z) \equiv a(-z)$. Будем предполагать, что $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) = 0$ и $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |z|^2 a(z) < \infty$, где $|z|$ – евклидова норма вектора z . Для описания ветвления в источнике будет использоваться функция b_n , $n \geq 0$, где $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 \leq 0$ и $\sum_n b_n = 0$.

2.1. Модель BRW/1/0/0. В этой модели случайное блуждание частиц определяется матрицей переходных интенсивностей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ (генератором случайного блуждания), в которой $\mathbf{a}(x, y) = a(x - y)$ при всех x и y . Таким образом, переходные интенсивности пространственно однородны, а матрица $\mathbf{A}$ симметрична.

Ветвление осуществляется в некотором источнике z_0 и задается инфинитезимальной производящей функцией $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$ такой, что $\beta_r = f^{(r)}(1) < \infty$ при всех $r \in \mathbb{N}$. Величина $\beta_1 = f'(1)$, характеризующая интенсивность источника, в дальнейшем обозначается через β . Отметим, что время пребывания частицы в источнике экспоненциально распределено с параметром $-(a(0) + b_1)$ [7].

Анализ модели BRW/1/0/0 в [1], [3], [4], [8] показал, что поведение средних численностей частиц как в произвольном узле, так и на всей решетке, определяется структурой спектра линейного оператора $H = A + \beta \Delta_{z_0}$. Здесь A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$, определяющий случайное блуждание, а $\beta \Delta_{z_0}$ – слагаемое, задающее механизм ветвления в источнике z_0 . Отметим, что оператор A порождается матрицей переходных интенсивностей $\mathbf{A}$; его формальное определение приводится в разделе 4.

Трактуя переходную вероятность $\mathbf{p}(t; \cdot, y)$ как функцию $\mathbf{p}(t)$ со значениями в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$, зависящую от времени t и параметра y , запишем, следуя [3], эволюционное уравнение для $\mathbf{p}(t)$ в виде дифференциального уравнения в $l^2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}(0) = \delta_y.$$

Аналогично, для математического ожидания $\mathbf{m}_1(t; \cdot, y)$, трактуемого как функция $\mathbf{m}_1(t)$ в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, может быть получено следующее дифференциальное уравнение в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\frac{d\mathbf{m}_1}{dt} = A\mathbf{m}_1 + \beta \Delta_{z_0} \mathbf{m}_1, \quad \mathbf{m}_1(0) = \delta_y.$$

Формально это же уравнение, но уже в пространстве $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$, справедливо и для $\mathbf{m}_1(t) = \mathbf{m}_1(t; \cdot)$ с начальным условием $\mathbf{m}_1(0) = 1$.

2.2. Модель BRW/1/0/0. В этой модели случайное блуждание частиц определяется матрицей переходных интенсивностей $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\mathbf{a}}(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ (генератором случайного блуждания), в которой $\bar{\mathbf{a}}(x, y) = a(x - y)$ лишь при $x \neq x_0$ (и всех y). В источнике $x = x_0$ элементы $\bar{\mathbf{a}}(x, y)$ определяются соотношением

$$\bar{\mathbf{a}}(x_0, y) = -(1 - \alpha) \frac{a(x_0 - y)}{a(0)}$$

при любом $y \in \mathbb{Z}^d$, где $\alpha \in (0, 1)$ – некоторый параметр. В отличие от случая BRW/1/0/0, матрица $\bar{\mathbf{A}}$ оказывается несимметричной. В то же время при $x \neq x_0$ столбцы $\bar{\mathbf{a}}(x, \cdot)$ матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ совпадают со столбцами $\mathbf{a}(x, \cdot)$ матрицы $\mathbf{A}$, т.е. $\bar{\mathbf{a}}(x, \cdot) \equiv \mathbf{a}(x, \cdot) \equiv a(x)$ при $x \neq x_0$.

Ветвление осуществляется в узле x_0 и задается инфинитезимальной производящей функцией $\bar{f}(u) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n u^n$. Время пребывания частицы в источнике x_0 экспоненциально распределено с параметром $-(\alpha \bar{b}_1 + \alpha - 1)$ [4]. Если при всех $n \geq 0$ выполняются соотношения $\alpha \bar{b}_n = b_n$, то $\bar{f}(u) \equiv f(u)$.

Трактуя, как и выше, переходную вероятность $\mathbf{p}(t; \cdot, y)$ как функцию $\mathbf{p}(t)$ со значениями в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, зависящую от времени t и параметра y , получаем [4]:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \zeta \Delta_{x_0} \mathbf{A}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}(0) = \delta_y, \quad (2.1)$$

и, аналогично,

$$\frac{d\mathbf{m}_1}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{m}_1 + \zeta \Delta_{x_0} \mathbf{A}\mathbf{m}_1 + \beta \Delta_{x_0} \mathbf{m}_1, \quad \mathbf{m}_1(0) = \delta_y, \quad (2.2)$$

для средних численностей частиц $\mathbf{m}_1(t; \cdot, y)$. Как уже было отмечено выше, уравнение (2.2), но уже в пространстве $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$, справедливо и для $\mathbf{m}_1(t) = \mathbf{m}_1(t; \cdot)$ с начальным условием $\mathbf{m}_1(0) = 1$. Таким образом, динамика средних численностей частиц описывается дифференциальным уравнением с оператором $V = A + \zeta \Delta_{x_0} A + \beta \Delta_{x_0}$. При этом, как показано в [4], генератор случайного блуждания $V = A + \zeta \Delta_{x_0} A$, где $\zeta = (\alpha - 1)/a(0) - 1$, не является самосопряженным оператором. Однако, с помощью замены переменных $D = I + (\sqrt{1 + \zeta} - 1)\Delta_{x_0}$ удастся установить ограниченность и самосопряженность оператора $D^{-1}VD$ в $l^2(\mathbb{Z}^d)$.

2.3. Модель BRW/0/0/1. Эта модель получается как частный случай модели BRW/0/1/0 в предположении отсутствия ветвления в источнике, что влечет тождество $\bar{b}_n \equiv 0$. Такую модель естественно назвать моделью с “псевдо-источником”. При этом $\bar{f}(u) \equiv 0$ и, соответственно, $\beta = 0$. Время пребывания частицы в источнике в этом случае экспоненциально распределено с параметром $1 - \alpha$. Таким образом, эта модель описывает случайное блуждание без ветвления с нарушением симметрии в источнике.

Предполагая, что ветвление происходит в точке y_0 , в этом случае из уравнений (2.1) и (2.2) получаем, что эволюция переходных вероятностей описывается дифференциальным уравнением в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \zeta \Delta_{y_0} \mathbf{A}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}(0) = \delta_y. \quad (2.3)$$

а эволюция средних численностей частиц $\mathbf{m}_1(t; x, y)$ описывается дифференциальным уравнением в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$$\frac{d\mathbf{m}_1}{dt} = A\mathbf{m}_1 + \zeta\Delta_{y_0}A\mathbf{m}_1, \quad \mathbf{m}_1(0) = \delta_y. \quad (2.4)$$

Так как начальные условия в уравнениях (2.3) и (2.4) совпадают, то для модели BRW/0/0/1 справедливо равенство $\mathbf{p} = \mathbf{m}_1$.

2.4. Модель BRW/ $r/k/m$. Обобщим описанные выше модели на случай нескольких источников ветвления. Введем ветвящееся случайное блуждание с r источниками первого типа в точках $\{z_s\}$, k источниками второго типа в точках $\{x_i\}$ и m источниками третьего типа в точках $\{y_j\}$. Тогда для этой модели нетрудно получить аналоги приведенных выше уравнений для переходных вероятностей

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A\mathbf{p} + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{x_i} A\mathbf{p} + \sum_{j=1}^m \chi_j \Delta_{y_j} A\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}(0) = \delta_y, \quad (2.5)$$

а также для средних численностей частиц $\mathbf{m}_1(t) = \mathbf{m}_1(t; \cdot, y)$:

$$\frac{d\mathbf{m}_1}{dt} = Y\mathbf{m}_1, \quad \mathbf{m}_1(0) = \delta_y, \quad (2.6)$$

где

$$Y = A + \left(\sum_{s=1}^r \beta_s \Delta_{z_s} \right) + \left(\sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{x_i} A + \sum_{i=1}^k \eta_i \Delta_{x_i} \right) + \left(\sum_{j=1}^m \chi_j \Delta_{y_j} A \right).$$

Как следует из общей теории линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах (см., например, [11]), вопрос о поведении решений уравнения (2.6) при $t \rightarrow \infty$ сводится к анализу спектра линейных операторов в правых частях соответствующих уравнений. В необходимом для целей настоящей работы объеме спектральный анализ оператора Y вида (1.1) выполнен в теоремах 5 и 6.

Опишем кратко схему применения полученных результатов к исследованию поведения численностей частиц в ВСБ с несколькими источниками. Старшее положительное собственное значение оператора Y обозначим через λ_0 . Если найдены условия, при которых $\lambda_0 > 0$, то эти условия обеспечивают экспоненциальный рост первого момента как локальных, так и общих численностей частиц. Тогда, как и в моделях BRW/1/0/0 и BRW/0/1/0, можно показать, что эти условия обеспечивают также экспоненциальный рост старших моментов. Пусть, кроме того, при всех $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ выполнены соотношения

$$\mathbf{m}(n, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{m}_n(t; x, y)}{\mathbf{m}_1^n(t; x, y)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{m}_n(t; x)}{\mathbf{m}_1^n(t; x)}. \quad (2.7)$$

Тогда для нескольких источников в смысле сходимости моментов будут справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(y) e^{-\lambda_0 t} = \xi \psi(y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\lambda_0 t} = \xi, \quad (2.8)$$

где $\psi(y)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению λ_0 , а ξ – невырожденная случайная величина. Эти соотношения обеспечивают экспоненциальный

рост численностей частиц как в произвольном узле, так и общего числа частиц на решетке с параметром λ_0 . Более того, если скорость роста $\mathbf{m}(n, x)$ ограничена условием $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(n, x)^{-1/(2n)} = \infty$, то моменты однозначно определяют распределение ξ (критерий Карлемана). В этом случае соотношения (2.8) окажутся справедливы также и в смысле сходимости по распределению.

3. Линейные операторы в пространствах $l^p(\mathbb{Z}^d)$

Операторы, в терминах которых описываются уравнения (2.5), (2.6), в литературе имеют различное название: дифференциально-разностные, конечно-разностные, псевдоразностные и т.п. Многие факты, относящиеся к соответствующим операторам и уравнениям, обычно предполагаются известными, хотя найти их цельного описания автору не удалось. Поэтому, чтобы избежать путаницы, напомним некоторые необходимые в дальнейшем понятия.

Через $l^p(\mathbb{Z}^d)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначается банахово пространство функций (вещественных или комплексных) на $\mathbb{Z}^d$, “суммируемых со степенью p ”. В случае $1 \leq p < \infty$ норма в $l^p(\mathbb{Z}^d)$ определяется равенством $\|u\|_p = \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |u(z)|^p \right)^{1/p}$, а в пространстве $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ норма определяется равенством $\|u\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{Z}^d} |u(z)|$. Наряду с приведенным “функциональным” описанием пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, часто применяется равносильное “векторное” описание, при котором элементами $l^p(\mathbb{Z}^d)$ являются векторы (столбцы), координаты которых индексируются наборами $\{n_1, n_2, \dots, n_d\} \in \mathbb{Z}^d$.

Важную роль в описании пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$ играет линейно независимый набор элементов, определяемый функциями $\delta_x(z)$, где $x \in \mathbb{Z}^d$, такими, что $\delta_x(z) = 1$ при $z = x$ и $\delta_x(z) = 0$ при $z \neq x$. Очевидно, $\delta_x \in l^p(\mathbb{Z}^d)$ и $\|\delta_x\|_p = 1$ при каждом $p \in [1, \infty]$.

Если $u \in l^p(\mathbb{Z}^d)$, а $v \in l^q(\mathbb{Z}^d)$, где числа $p, q \geq 1$ связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$, то определено внешнее произведение $\langle u, v \rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u(z)v(z)$ элементов u и v . В случае $p = q = 2$ внешнее произведение называется скалярным произведением в $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Выражение $\langle u, v \rangle$ может быть также записано в виде $\langle u, v \rangle = u^T v$.

Пространства $l^p(\mathbb{Z}^d)$ и $l^q(\mathbb{Z}^d)$, где $1/p + 1/q = 1$ и $p, q > 1$, взаимно сопряжены друг другу, а пространством, сопряженным к $l^1(\mathbb{Z}^d)$, является $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ [12; гл. II]. Поэтому каждый непрерывный линейный функционал $l(u)$ в пространстве $l^p(\mathbb{Z}^d)$, где $p \in [1, \infty)$ может быть представлен как внешнее произведение некоторого вектора $v \in l^q(\mathbb{Z}^d)$, где $1/p + 1/q = 1$, на $u \in l^p(\mathbb{Z}^d)$, т.е. $l(u) = \langle u, v \rangle$. Описание пространства, сопряженного к $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$, более сложное [12; гл. II], и ниже не требуется.

Пусть для каждой пары элементов $z, z' \in \mathbb{Z}^d$ определено (вещественное или комплексное) число $\mathbf{L}(z, z')$. Тогда формальное выражение

$$(Lu)(z) := \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{L}(z, z')u(z'), \quad z \in l^p(\mathbb{Z}^d), \quad (3.1)$$

определяет линейный (возможно, неограниченный) оператор. Функция $\mathbf{L}(z, z')$ называется ядром линейного оператора L . Учитывая, что $\mathbf{L}(z, z') = \langle \delta_z, L\delta_{z'} \rangle$, функцию $\mathbf{L}(z, z')$ часто интерпретируют как бесконечную матрицу и называют также

матрицей оператора L . Если $\mathbf{L}(z, z') \equiv \mathbf{L}(z', z)$, то ядро оператора L называют симметричным, а оператор L – симметрическим (независимо от того, в каком пространстве он действует). Достаточное условие ограниченности оператора (3.1) в $l^p(\mathbb{Z}^d)$ предоставляет следующая лемма Шура [13]:

ЛЕММА 1. Пусть $\sum_z |\mathbf{L}(z, z')| \leq c$ и $\sum_{z'} |\mathbf{L}(z, z')| \leq c$ при некотором $c < \infty$. Тогда при любом $p \in [1, \infty]$ выражение (3.1) определяет линейный ограниченный оператор $L: l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d)$, причем $\|L\|_p \leq c$.

В работе Шура [14] эта лемма доказана для $p = 2$. В общем случае она может быть получена как следствие из интерполяционных теорем Рисса–Торина или Марцинкевича (см., например, [15; гл. IX] или [16; п. 7.1]).

Для оператора $L: l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d)$ будет применяться сокращение $L_{l^p \rightarrow l^p}$. Спектр линейного оператора L обозначается в дальнейшем $\sigma(L)$, а множество его собственных значений (точечный спектр) $\sigma_\bullet(L)$.

4. Основные результаты

В разделе определяются основные операторы, возникающие при рассмотрении уравнений (2.5) и (2.6), и исследуются их основные свойства. В теоремах 5 и 6 проводится спектральный анализ оператора Y вида (1.1).

4.1. Оператор A . Пусть задана функция $a(\cdot) \in l^1(\mathbb{Z}^d)$. Тогда выражение

$$(Au)(z) := \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} a(z - z')u(z') \quad (4.1)$$

по лемме Шура задает при каждом $p \in [1, \infty]$ линейный ограниченный оператор $A_{l^p \rightarrow l^p}$. Предположим дополнительно, что функция $a(z)$ удовлетворяет условию

A1: $a(z) \geq 0$ при $z \neq 0$ и $a(0) = -\sum_{z \neq 0} a(z) \leq 0$.

Тогда, представив оператор A в виде

$$(Au)(z) - a(0)u(z) = \sum_{z' \neq z} a(z - z')u(z'),$$

и заметив, что

$$\sum_{z \neq z'} |a(z - z')| = \sum_{z' \neq z} |a(z - z')| = |a(0)|,$$

из леммы Шура получаем:

$$\|A - a(0)I\|_p \leq |a(0)|, \quad p \in [1, \infty], \quad (4.2)$$

откуда

$$\sigma(A_{l^p \rightarrow l^p}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}, \quad p \in [1, \infty]. \quad (4.3)$$

Если на функцию $a(z)$ наложить дополнительное условие

A2: $a(z) = a(-z)$ при всех $z \in \mathbb{Z}^d$,

то ядро оператора A становится симметричным. Тогда в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ оператор A оказывается самосопряженным, что влечет вещественность его спектра. В совокупности с (4.3) это означает, что $\sigma(A_{l^2 \rightarrow l^2}) \subseteq [2a(0), 0]$. Для удобства сведем полученные сведения об операторе A в следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $a(\cdot)$, удовлетворяющая условию A1, определена на $\mathbb{Z}^d$. Тогда выражение (4.1) определяет при каждом $p \in [1, \infty]$ линейный ограниченный оператор $A_{l^p \rightarrow l^p}$, для которого справедлива оценка (4.2) и включение (4.3).

Если функция $a(\cdot)$ дополнительно удовлетворяет условию A2, то в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ оператор A оказывается самосопряженным и $\sigma(A_{l^2 \rightarrow l^2}) \subseteq [2a(0), 0]$.

При $p \neq 2$ локализация (4.3) спектра $\sigma(A_{l^p \rightarrow l^p})$ достаточно груба. Более точные результаты под названием “теоремы о совпадении спектра” можно найти в [13].

Различные свойства оператора A часто удобно формулировать в терминах преобразования Фурье $\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i\langle z, \theta \rangle}$, где $\theta \in [-\pi, \pi]^d$, от функции $a(z)$. Так как $a(\cdot) \in l^1(\mathbb{Z}^d)$, то функция $\phi(\theta)$ непрерывна на множестве $[-\pi, \pi]^d$. А если предположить, что для функции $a(z)$ выполняется более сильное чем A1 условие

$$A3: \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |z|^2 a(z) < \infty,$$

то функция $\phi(\theta)$ будет дважды непрерывно дифференцируемой [3]. Кроме того, при выполнении условия A2 функция $\phi(\theta)$ вещественна, так как в этом случае $\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) \cos\langle z, \theta \rangle$. А поскольку в силу условия A1 $a(0) = -\sum_{z \neq 0} a(z)$, то

$$\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d, z \neq 0} a(z) (\cos\langle z, \theta \rangle - 1) \leq 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d.$$

Полученное неравенство означает, что $z = 0$ является точкой локального максимума функции $\phi(\theta)$. В приводимой ниже теореме указаны условия, при которых этот глобальный максимум функции $\phi(\theta)$ невырожден [3; лемма 2.1.2].

Функцию $a(z)$ назовем *неразложимой*, если для любого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется набор векторов $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть неразложимая функция $a(z)$ удовлетворяют условиям A1, A2 и A3. Тогда функция $\phi(\theta)$ корректно определена, дважды непрерывно дифференцируема и при этом найдется такое $\gamma > 0$, что $\phi(\theta) \leq -\gamma|\theta|^2$ при всех $\theta \in [-\pi, \pi]^d$.

В дальнейшем предполагается, что функция $a(z)$ неразложима и удовлетворяет условиям A1, A2 и A3. Подчеркнем, что эти предположения естественны с содержательной точки зрения при анализе ВСБ, см., например, [3], [4].

4.2. Оператор Δ_x . Для произвольной точки $x \in \mathbb{Z}^d$ выражение

$$\Delta_x u = \delta_x \langle \delta_x, u \rangle, \quad u \in l^p(\mathbb{Z}^d), \quad (4.4)$$

определяет линейный ограниченный оператор в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, норма которого не превосходит единицы. Более того, $\Delta_x^2 = \Delta_x$, и поэтому Δ_x является проектором [17]. Так как область значений оператора Δ_x одномерна (совпадает с линейной оболочкой вектора δ_x), оператор Δ_x вполне непрерывен.

Из равенства $\langle u, v \rangle = u^T v$ вытекает, что $\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$. Ядро $\Delta_x(z, z')$ оператора Δ_x задается равенством $\Delta_x(z, z') = \delta_x(z) \delta_x(z')$ и, значит, симметрично. Тогда в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ оператор Δ_x оказывается самосопряженным. Для удобства ссылок сведем полученные сведения об операторе Δ_x в следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольной точки $x \in \mathbb{Z}^d$ выражение (1.1) определяет в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, проектор на одномерное подпространство, натянутое на вектор δ_x . При этом оператор Δ_x является симметрическим, а в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ – самосопряженным, и $\|\Delta_x\|_p \leq 1$ при $p \in [1, \infty]$.

4.3. Оператор Y . Перейдем к анализу оператора

$$Y = A + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{u_i} A + \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j},$$

определяемому равенством (1.1). Мы предполагаем, что каждое из множеств $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$ состоит из попарно различных точек. При этом некоторые из точек $\{u_i\}$ могут совпадать с какими-то точками $\{v_j\}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в представлении (1.1) оператора Y параметры $\{\zeta_i\}$ и $\{\beta_j\}$ вещественны и $\zeta_i > -1$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ оператор $D = I + \sum_{i=1}^k (\sqrt{1 + \zeta_i} - 1) \Delta_{u_i}$ является обратимым и самосопряженным, а оператор $D^{-1} Y D$ имеет вид $D^{-1} Y D = D A D + \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j}$ и является самосопряженным.

Доказательство теоремы вынесено в раздел 6.1.

В условиях этой теоремы $\sigma(Y_{l^2 \rightarrow l^2}) \subset \mathbb{R}$. Справедливо ли аналогичное включение $\sigma(Y_{l^p \rightarrow l^p}) \subset \mathbb{R}$ при $p \neq 2$, неясно. Известно, что это так при дополнительных предположениях о скорости убывания на бесконечности функции $a(z)$ [13]. Через $\mathbb{R}_+$ обозначим множество положительных вещественных чисел.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\beta_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, r$. Тогда в условиях теоремы 4 оператор $Y_{l^2 \rightarrow l^2}$ не имеет собственных значений $\lambda > 0$, т.е. $\sigma_\bullet(Y_{l^2 \rightarrow l^2}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Для доказательства следствия заметим, что в силу самосопряженности оператора $A_{l^2 \rightarrow l^2}$ и включения $\sigma(A_{l^2 \rightarrow l^2}) \subseteq [2a(0), 0]$ (см. теорему 1), $\langle Au, u \rangle \leq 0$ при всех $u \in l^2(\mathbb{Z}^d)$. Тогда в силу самосопряженности оператора D , построенного в теореме 4, $\langle D A D u, u \rangle = \langle A D u, D u \rangle \leq 0$ при $u \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ и, значит, оператор $D A D = D^{-1} Y D$ в $l^2(\mathbb{Z}^d)$ не имеет собственных значений $\lambda > 0$, а тогда и подобный ему оператор $Y_{l^2 \rightarrow l^2}$ также не имеет собственных значений $\lambda > 0$.

Обратимся теперь к общему случаю, когда оператор Y действует в пространстве $l^p(\mathbb{Z}^d)$ при $p \in [1, \infty]$.

ТЕОРЕМА 5. Линейный оператор $Y_{l^p \rightarrow l^p}$ ограничен при каждом $p \in [1, \infty]$. При этом множество $\sigma(Y_{l^p \rightarrow l^p}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$, если оно не пусто, состоит из собственных значений конечной кратности.

Доказательство теоремы 5 приводится в разделе 6.2. Отметим, что если в условиях теоремы 5 параметры $\{\zeta_i\}$ и $\{\beta_j\}$ в представлении (1.1) оператора Y вещественны и $\zeta_i > -1$ при $i = 1, 2, \dots, k$, то множество $\sigma(Y_{l^p \rightarrow l^p}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ на самом деле от p не зависит (см. замечание 4 ниже). Таким образом, для нахождения собственных значений оператора $Y_{l^p \rightarrow l^p}$, не принадлежащих множеству $\{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$, достаточно ограничиться случаем $p = 2$.

Найдем условия, при которых $\lambda \in \sigma_\bullet(Y_{l^2 \rightarrow l^2})$. По определению $\lambda \in \sigma_\bullet(Y)$ тогда и только тогда, когда уравнение $Yh - \lambda h = 0$ имеет ненулевое решение. Перепишем это уравнение в виде

$$Ah - \lambda h + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{u_i} Ah + \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j} h = 0. \quad (4.5)$$

Обозначив через $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ резольвенту оператора A и применив R_λ к обеим частям последнего уравнения, получим:

$$h + \sum_{i=1}^k \zeta_i R_\lambda \Delta_{u_i} A h + \sum_{j=1}^r \beta_j R_\lambda \Delta_{v_j} h = 0.$$

Здесь $\Delta_z w = \delta_z \langle \delta_z, w \rangle$, а A – самосопряженный оператор, и поэтому

$$h + \sum_{i=1}^k \zeta_i \langle A \delta_{u_i}, h \rangle R_\lambda \delta_{u_i} + \sum_{j=1}^r \beta_j \langle \delta_{v_j}, h \rangle R_\lambda \delta_{v_j} = 0. \quad (4.6)$$

В силу линейной независимости векторов δ_{u_i} , δ_{v_j} и обратимости оператора R_λ вектор h отличен от нуля тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из чисел $U_i = \zeta_i \langle A \delta_{u_i}, h \rangle$ или $V_j = \beta_j \langle \delta_{v_j}, h \rangle$ отлично от нуля. Поэтому, умножая скалярно слева обе части уравнения (4.6) на $\zeta_i A \delta_{u_i}$ и $\beta_j \delta_{v_j}$, получим, что уравнение (4.6) имеет ненулевое решение h тогда и только тогда, когда набор чисел U_i и V_j образует нетривиальное решение следующей системы линейных уравнений:

$$U_{\bar{i}} + \sum_{i=1}^k \zeta_{\bar{i}} \langle A \delta_{u_{\bar{i}}}, R_\lambda \delta_{u_i} \rangle U_i + \sum_{j=1}^r \zeta_{\bar{i}} \langle A \delta_{u_{\bar{i}}}, R_\lambda \delta_{v_j} \rangle V_j = 0, \quad \bar{i} = 1, \dots, k, \quad (4.7)$$

$$V_{\bar{j}} + \sum_{i=1}^k \beta_{\bar{j}} \langle \delta_{v_{\bar{j}}}, R_\lambda \delta_{u_i} \rangle U_i + \sum_{j=1}^r \beta_{\bar{j}} \langle \delta_{v_{\bar{j}}}, R_\lambda \delta_{v_j} \rangle V_j = 0, \quad \bar{j} = 1, \dots, r. \quad (4.8)$$

Таким образом, уравнение (4.6) имеет ненулевое решение h тогда и только тогда, когда полученная конечномерная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение, т.е. ее детерминант равен нулю. Если $\{U_i\}$, $\{V_j\}$ – ненулевой набор решений последней системы уравнений при некотором λ , то согласно (4.6)

$$h = - \sum_{i=1}^k U_i R_\lambda \delta_{u_i} - \sum_{j=1}^r V_j R_\lambda \delta_{v_j}$$

является собственным вектором оператора Y , отвечающим λ . Заметим также, что скалярные произведения $\langle \delta_y, R_\lambda \delta_x \rangle$ в полученной линейной системе имеют вид

$$\langle \delta_y, R_\lambda \delta_x \rangle = - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{\cos \langle y - x, \theta \rangle}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta, \quad (4.9)$$

а поскольку

$$\langle A \delta_y, R_\lambda \delta_x \rangle = \langle \delta_y, A R_\lambda \delta_x \rangle = \langle \delta_y, (A - \lambda I + \lambda I) R_\lambda \delta_x \rangle = \langle \delta_y, \delta_x \rangle + \lambda \langle \delta_y, R_\lambda \delta_x \rangle,$$

то

$$\langle A \delta_y, R_\lambda \delta_x \rangle = \delta(y - x) - \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{\cos \langle y - x, \theta \rangle}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta. \quad (4.10)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 6. Пусть R_λ – резольвента оператора A и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\lambda \in \sigma_\bullet(Y_{l^2 \rightarrow l^2})$ в том и только том случае, когда числа $\{U_i\}_{i=1}^k, \{V_j\}_{j=1}^r$ образуют нетривиальное решение системы уравнений (4.7), (4.8).

Согласно (4.7), (4.8), размерность пространства собственных векторов, отвечающих $\lambda \in \sigma_\bullet(Y)$, не более $k + r$. Эта оценка может быть усилена. Действительно, по следствию 1 оператор $A - \lambda I + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{u_i} A$ обратим при $\lambda > 0$. Тогда в силу (4.5) множество собственных векторов h , отвечающих $\lambda \in \sigma_\bullet(Y)$, подчиняется уравнению

$$h + \left(A - \lambda I + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{u_i} A \right)^{-1} \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j} h = 0,$$

в котором $\sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j} h = \sum_{j=1}^r \beta_j \langle \delta_{v_j}, h \rangle \delta_{v_j}$ есть линейная комбинация векторов δ_{v_j} , $j = 1, 2, \dots, r$. Следовательно, размерность подпространства собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda > 0$ оператора Y , не превосходит r .

4.4. Оператор $V = A + \zeta \Delta_{x_0} A + \beta \Delta_{x_0}$. Для этого частного случая оператора Y анализ положительных собственных значений может быть проведен более детально. Рассмотрим функцию

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{-i\langle z, \theta \rangle}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta, \quad z \in \mathbb{Z}^d, \quad (4.11)$$

являющуюся преобразованием Фурье от $(\lambda - \phi(\theta))^{-1}$. Для функции $G_\lambda(0)$ в дальнейшем будем использовать обозначение G_λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях теоремы 2 функция $\phi^{-1}(\theta)$ в точке $\theta = 0$ имеет особенность, суммируемую только при $d \geq 3$. Следовательно, естественно считать, что $G_0 = \infty$ при $d = 1, 2$ и $G_0 < \infty$ при $d \geq 3$, и при этом функция G_λ строго убывает при $\lambda > 0$ и $G_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} G_\lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях теоремы 2 функция $G_\lambda(z)$ допускает представление $G_\lambda(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{p}(t; z) dt$, где $\mathbf{p}(t; z)$ – это функция со значениями в интервале $[0, 1]$, удовлетворяющая начальному условию $\mathbf{p}(0, z) = \delta(z)$ и абсолютно суммируемая при каждом $t \geq 0$, т.е. $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{p}(t; z) < \infty$ (см., например, [3; раздел 2.2]). Тогда из абсолютной суммируемости функции $\mathbf{p}(t; z)$ по z вытекает, что $G_\lambda(z) \geq 0$ при всех $\lambda > 0$ и $z \in \mathbb{Z}^d$. Кроме того $G_\lambda(\cdot) \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ при $\lambda > 0$, откуда следует, что $G_\lambda(\cdot) \in l^p(\mathbb{Z}^d)$ при каждом $p \in [1, \infty]$. В [3] функция $\mathbf{p}(t; z)$ появляется как переходная вероятность некоторого случайного блуждания.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\zeta > -1$, $p \in [1, \infty]$. Тогда

$$\sigma(V_{l^p \rightarrow l^p}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\} \cup \mathbb{R}_+,$$

причем множество $\sigma_\bullet(Y_{l^p \rightarrow l^p}) \cap \mathbb{R}_+$, если оно не пусто, состоит из собственных значений оператора $Y_{l^p \rightarrow l^p}$. При этом справедливы следующие утверждения:

а) $\lambda \in \sigma_\bullet(Y_{l^p \rightarrow l^p}) \cap \mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда

$$(1 + \zeta)^{-1}(\zeta\lambda + \beta)G_\lambda = 1; \quad (4.12)$$

- б) $\lambda \in \sigma_{\bullet}(Y_{l^p \rightarrow l^p}) \cap \mathbb{R}_+$ – простое собственное значение, и собственный вектор h_{λ} , отвечающий этому собственному значению, определяется равенством

$$h_{\lambda}(z) = G_{\lambda}^{-1} G_{\lambda}(z), \quad z \in \mathbb{Z}^d; \quad (4.13)$$

- в) спектральный проектор P_{λ} оператора $V_{l^p \rightarrow l^p}$ на одномерное собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda > 0$, имеет вид

$$P_{\lambda} u = \frac{(1 + \zeta) \langle h_{\lambda}, u \rangle - \zeta \langle \delta_{x_0}, h_{\lambda} \rangle \langle \delta_{x_0}, u \rangle}{(1 + \zeta) \langle h_{\lambda}, h_{\lambda} \rangle - \zeta \langle \delta_{x_0}, h_{\lambda} \rangle^2} h_{\lambda} \quad \text{для всех } u \in l^p(\mathbb{Z}^d). \quad (4.14)$$

Из (4.11) видно, что при $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda > 0$, величина G_{λ} всегда имеет предел G_0 , конечный или бесконечный. Положим $\beta_c = (1 + \zeta) G_0^{-1}$. Из замечания 1 вытекает, что $\beta_c = 0$ при $d = 1, 2$ и $\beta_c > 0$ при $d \geq 3$. Кроме того, $\sigma(V_{l^2 \rightarrow l^2}) \subset \mathbb{R}$.

При $p = 2$ и $x_0 = 0$ теорема 7 и включение $\sigma(V_{l^2 \rightarrow l^2}) \subset \mathbb{R}$ доказаны в [4]. В общем случае $p \in [1, \infty]$ теорема 7 доказывается в разделе 6.3. Теорему 7 дополняет следующее утверждение, доказательство которого вынесено в раздел 6.4.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\zeta > -1$. Тогда и только тогда $\sigma_{\bullet}(V_{l^p \rightarrow l^p}) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, когда $\beta > \beta_c$. При $\beta > \beta_c$ множество $\sigma_{\bullet}(V_{l^p \rightarrow l^p}) \cap \mathbb{R}_+$ состоит из одной точки.

5. Приложения к исследованию ВСБ с двумя источниками

Остановимся на примерах ВСБ с двумя источниками ветвления, в которых уравнения для собственных значений $\lambda > 0$ оператора Y выписываются в явном виде.

5.1. Модель BRW/1/0/1. Оператор (1.1) для модели ВСБ с одним источником ветвления в точке z (без нарушения в нем симметрии блуждания) и одним “псевдо-источником” в точке $y \neq z$ имеет вид $Y = A + \zeta \Delta_z A + \beta \Delta_y$. Действуя по изложенной в предыдущем разделе схеме, получаем, что оператор $\lambda \in \sigma(Y)$ тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\begin{aligned} U + \zeta \langle A \delta_z, R_{\lambda} \delta_z \rangle U + \zeta \langle A \delta_z, R_{\lambda} \delta_y \rangle V &= 0, \\ V + \beta \langle \delta_y, R_{\lambda} \delta_z \rangle U + \beta \langle \delta_y, R_{\lambda} \delta_y \rangle V &= 0, \end{aligned}$$

имеет нетривиальное решение, т.е. когда ее детерминант равен нулю:

$$(1 + \zeta \langle A \delta_z, R_{\lambda} \delta_z \rangle)(1 + \beta \langle \delta_y, R_{\lambda} \delta_y \rangle) - \beta \zeta \langle A \delta_z, R_{\lambda} \delta_y \rangle \langle \delta_y, R_{\lambda} \delta_z \rangle = 0.$$

В силу (4.9)–(4.11) последнее уравнение может быть представлено в виде

$$\beta = \mathcal{B}(\zeta, \lambda) := \frac{(1 + \zeta) - \zeta \lambda G_{\lambda}}{(1 + \zeta) G_{\lambda} - \zeta \lambda (G_{\lambda}^2 - G_{\lambda}^2(z - y))}. \quad (5.1)$$

Из определения (4.11) функции $G_{\lambda}(z)$ следует, что при $-1 < \zeta < 0$ справедливы соотношения

$$\mathcal{B}(\zeta, 0) = \frac{1}{G_0}, \quad \mathcal{B}(\zeta, \lambda) > \frac{(1 + \zeta) - \zeta \lambda G_{\lambda}}{(1 + \zeta) G_{\lambda} - \zeta \lambda G_{\lambda}^2} = \frac{1}{G_{\lambda}} \quad \text{при } \lambda > 0. \quad (5.2)$$

Так как функция G_{λ}^{-1} при изменении λ на интервале $[0, \infty)$ принимает все значения из интервала $[\beta_c, \infty)$, где $\beta_c = \mathcal{B}(\zeta, 0) = G_0^{-1}$, в силу (5.2) область значений функции $\mathcal{B}(\zeta, \lambda)$ на интервале $[0, \infty)$ также совпадает с интервалом $[\beta_c, \infty)$. Следовательно, условие $\beta > \beta_c$ необходимо и достаточно для существования решения уравнения (5.1), а значит, и положительного собственного значения λ оператора Y .

Рис. 1. Области значений параметров $\{\beta_1, \beta_2\}$, при которых оператор Y имеет положительные собственные значения

5.2. Модель BRW/2/0/0. Для модели ВСБ с двумя источниками ветвления без нарушения симметрии блуждания в источниках оператор (1.1) имеет вид $Y = A + \beta_1 \Delta_{z_1} + \beta_2 \Delta_{z_2}$. По теореме 6 $\lambda \in \sigma_\bullet(Y)$ тогда и только тогда, когда система

$$\begin{aligned} V_1 + \beta_1 \langle \delta_{z_1}, R_\lambda \delta_{z_1} \rangle V_1 + \beta_1 \langle \delta_{z_1}, R_\lambda \delta_{z_2} \rangle V_2 &= 0, \\ V_2 + \beta_2 \langle \delta_{z_2}, R_\lambda \delta_{z_1} \rangle V_1 + \beta_2 \langle \delta_{z_2}, R_\lambda \delta_{z_2} \rangle V_2 &= 0, \end{aligned}$$

имеет нетривиальное решение, что равносильно равенству нулю ее детерминанта:

$$(1 + \beta_1 \langle \delta_{z_1}, R_\lambda \delta_{z_1} \rangle)(1 + \beta_2 \langle \delta_{z_2}, R_\lambda \delta_{z_2} \rangle) - \beta_1 \beta_2 \langle \delta_{z_1}, R_\lambda \delta_{z_2} \rangle \langle \delta_{z_2}, R_\lambda \delta_{z_1} \rangle = 0.$$

В силу (4.9)–(4.11) последнее уравнение может быть представлено в виде

$$(1 - \beta_1 G_\lambda)(1 - \beta_2 G_\lambda) - \beta_1 \beta_2 G_\lambda^2(z_2 - z_1) = 0, \quad z_1 \neq z_2. \quad (5.3)$$

На рис. 1 представлен вид областей значений пар параметров $\{\beta_1, \beta_2\}$ для оператора Y в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$, отвечающего случаю $d = 3$, $z_2 - z_1 = \{0, 1, 2\}$, а оператор A есть стандартный лапласиан, т.е. $a(0) = -1$, $a(z) = 1/6$ для $z = \{z_1, z_2, z_3\}$ таких, что $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 1$, и $a(z) = 0$ в остальных случаях. В этом случае моделирование в системе MATLAB[®] показало, что $G_0 = 1.1424$, $G_0(z_2 - z_1) = 0.0401$.

Белым цветом на рис. 1 выделена область значений параметров $\{\beta_1, \beta_2\}$, при которых оператор Y не имеет положительных собственных значений; светло-серым цветом – при которых Y имеет одно положительное собственное значение; темно-серым цветом – при которых Y имеет два положительных собственных значения.

Более детально рассмотрим случай, когда интенсивности источников равны $\beta = \beta_1 = \beta_2 > 0$. В этом случае (5.3) принимает вид уравнения

$$(1 - \beta G_\lambda)^2 = \beta^2 G_\lambda^2(z_2 - z_1), \quad z_1 \neq z_2, \quad (5.4)$$

которое при разрешении относительно β распадается на два уравнения

$$\beta = (G_\lambda + G_\lambda(z_2 - z_1))^{-1}, \quad \beta = (G_\lambda - G_\lambda(z_2 - z_1))^{-1}.$$

Обозначив через λ_1 корень первого из этих уравнений, а через λ_2 – корень второго, нетрудно заметить, что $\lambda_1 < \lambda_2$.

Таким образом, при $d \geq 3$ и $\beta \leq (G_0 + G_0(z_2 - z_1))^{-1}$ уравнение (5.4) не имеет положительных корней. При $(G_0 + G_0(z_2 - z_1))^{-1} < \beta \leq (G_0 - G_0(z_2 - z_1))^{-1}$ у уравнения (5.4) будет существовать один корень λ_1 , а при $\beta > (G_0 - G_0(z_2 - z_1))^{-1}$ уравнение (5.4) имеет два корня λ_1 и λ_2 . В размерностях $d = 1, 2$ уравнение (5.4) имеет два корня при $\beta > 0$.

6. Доказательства

6.1. Доказательство теоремы 4. Так как $\Delta_{u_i} \Delta_{u_j} = 0$ при $u_i \neq u_j$, то

$$D^2 = I + 2 \sum_{i=1}^k (\sqrt{1 + \zeta_i} - 1) \Delta_{u_i} + \sum_{i=1}^k (\sqrt{1 + \zeta_i} - 1)^2 \Delta_{u_i}^2.$$

Здесь по теореме 3 $\Delta_{u_i}^2 \equiv \Delta_{u_i}$, откуда $D^2 = I + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{u_i}$. Тогда

$$Y = A + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{u_i} A + \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j} = D^2 A + \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j}.$$

Так как по теореме 3 $\sigma(\Delta_{u_i}) = \{0, 1\}$, при выполнении условия теоремы $\zeta_i > -1$, $i = 1, 2, \dots, k$, оператор $D = I + \sum_{i=1}^k (\sqrt{1 + \zeta_i} - 1) \Delta_{u_i}$ обратим. Значит,

$$D^{-1} Y D = D^{-1} D^2 A D + \sum_{j=1}^r \beta_j D^{-1} \Delta_{v_j} D = D A D + \sum_{j=1}^r \beta_j D^{-1} \Delta_{v_j} D.$$

Здесь $D^{-1} \Delta_{v_j} D \equiv \Delta_{v_j}$, так как оператор D (а с ним и D^{-1}) коммутирует с каждым оператором Δ_{v_j} . Поэтому

$$D^{-1} Y D = D A D + \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j}. \quad (6.1)$$

Наконец, по теореме 3 операторы вида Δ_x являются самосопряженными, а тогда самосопряженным является и оператор $D = I + \sum_{i=1}^k (\sqrt{1 + \zeta_i} - 1) \Delta_{u_i}$. Кроме того, по теореме 1 оператор A также является самосопряженным. Тогда самосопряженными оказываются все слагаемые в правой части (6.1), откуда и следует самосопряженность оператора $D^{-1} Y D$. Теорема доказана.

6.2. Доказательство теоремы 5. По теоремам 1 и 3 операторы A и Δ_x ограничены. Поскольку оператор $Y_{l^p \rightarrow l^p}$ представим в виде конечной суммы операторов вида A , $\Delta_x A$ и Δ_x , он также ограничен при каждом $p \in [1, \infty]$.

Для анализа спектра оператора Y воспроизведем рассуждения из [18; п. 2.1.1]. Заметим, что при $\lambda \notin \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ оператор $\lambda I - A$ в силу (4.3) ограниченно обратим. Тогда разрешимость уравнения $\lambda x - Yx = y$ равносильна разрешимости уравнения $x - (\lambda I - A)^{-1}(Y - A)x = (\lambda I - A)^{-1}y$, которое разрешимо при каждом y тогда и только тогда, когда $1 \notin \sigma((\lambda I - A)^{-1}(Y - A))$. Это равносильно тому, что $\lambda \in \sigma(Y)$ тогда и только тогда, когда $1 \in \sigma((\lambda I - A)^{-1}(Y - A))$. Но

оператор $Y - A = \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{u_i} A + \sum_{j=1}^r \beta_j \Delta_{v_j}$, а с ним и оператор $(\lambda I - A)^{-1}(Y - A)$, вполне непрерывен. В этом случае $1 \in \sigma((\lambda I - A)^{-1}(Y - A))$ лишь в том случае, когда единица является собственным значением конечной кратности для оператора $(\lambda I - A)^{-1}(Y - A)$. Следовательно, $\lambda \in \sigma_p(Y)$ тогда и только тогда, когда λ является собственным значением конечной кратности оператора Y . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В условиях теоремы 5 точки спектра оператора Y , не принадлежащие кругу $\{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$, если таковые существуют, являются изолированными собственными значениями. Это утверждение, вытекает из общей теории фредгольмовых операторов (см., напр., [17; гл. IV, § 5]).

6.3. Доказательство теоремы 7. При $p = 2$ теорема доказана в [4]. Поэтому в доказательстве нуждаются лишь случаи, когда $1 \leq p < 2$ и $2 < p \leq \infty$.

Случай $1 \leq p < 2$. Оператор V является частным случаем оператора Y , поэтому по теореме 5 все точки множества $\sigma(V_{l^p \rightarrow l^p}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$, если таковые существуют, являются собственными значениями конечной кратности.

Пусть $\lambda \notin \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ – собственное значение оператора V , а $h_\lambda \in l^p(\mathbb{Z}^d)$ – отвечающий ему собственный вектор. Тогда

$$Vh_\lambda = \lambda h_\lambda, \quad h_\lambda \in l^p(\mathbb{Z}^d), \quad V: l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d). \quad (6.2)$$

При этом, в силу условия $1 \leq p < 2$ имеет место включение $h_\lambda \in l^2(\mathbb{Z}^d)$. А поскольку оператор V по теореме 5 действует в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, то он действует и в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Тогда соотношения (6.2) выполняются при $p = 2$ и, значит, $\lambda \in \sigma_\bullet(V_{l^2 \rightarrow l^2})$. Аналогично показывается, что собственное значение λ оператора $V_{l^p \rightarrow l^p}$, имеет такую же кратность, как собственное значение λ оператора $V_{l^2 \rightarrow l^2}$.

Из сделанного замечания и доказанных в [4] утверждений теоремы 7 для случая $p = 2$ вытекает, что каждое $\lambda \in \sigma_\bullet(V_{l^p \rightarrow l^p}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ вещественно и положительно. Кроме того, такое собственное значение простое и однозначно определяется уравнением (4.12), а собственный вектор и соответствующий собственный проектор определяются равенствами (4.13) и (4.14), соответственно. При этом соотношения (4.13) и (4.14) имеют корректный смысл в пространстве $l^p(\mathbb{Z}^d)$, поскольку в силу замечания 2 функция $G_\lambda(\cdot)$ в (4.13) принадлежит $l^1(\mathbb{Z}^d)$, а значит, и $h_\lambda \in l^1(\mathbb{Z}^d)$.

Для завершения доказательства теоремы 7 в случае $1 \leq p < 2$ осталось показать, что каждое $\lambda > 0$, удовлетворяющее (4.12), принадлежит не только множеству $\sigma_\bullet(V_{l^2 \rightarrow l^2})$, но и множеству $\sigma_\bullet(V_{l^p \rightarrow l^p})$. Для доказательства этого снова заметим, что по уже доказанному в [4] утверждению а) теоремы 7 для случая $p = 2$, если $\lambda > 0$, то $\lambda \in \sigma_\bullet(V_{l^2 \rightarrow l^2})$ и ему отвечает собственный вектор h_λ , определяемый равенством (4.13). Но в силу замечания 2 $G_\lambda(\cdot) \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ в (4.13), а значит и $h_\lambda \in l^p(\mathbb{Z}^d)$ при $1 \leq p < 2$. Так как оператор V по теореме 5 действует в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, то равенство $Vh_\lambda = \lambda h_\lambda$, связывающее λ и h_λ в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, имеет место и в пространстве $l^p(\mathbb{Z}^d)$ при $1 \leq p < 2$, а значит, число $\lambda \in \sigma_\bullet(V_{l^p \rightarrow l^p})$. Доказательство теоремы 7 в случае $1 \leq p < 2$ завершено.

Случай $2 < p \leq \infty$. Наряду с V рассмотрим оператор $V' = A + \zeta A \Delta_{x_0} + \beta \Delta_{x_0}$. Так же, как при доказательстве теоремы 5 для оператора V , может быть доказано, что V' является линейным ограниченным оператором в каждом из $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$. При этом все точки множества $\sigma(V'_{l^p \rightarrow l^p}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$, если таковые

существуют, являются его собственными значениями конечной кратности. Кроме того, оператор $V_{lp \rightarrow lp}$, где $p \in [1, \infty]$, сопряжен к $V'_{lq \rightarrow lq}$ при $q = p/(1-p)$.

Далее, дословным повторением рассуждений, проводившихся в случае $1 \leq p < 2$, можно показать, что всякое собственное значение $\lambda \notin \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ оператора $V'_{lq \rightarrow lq}$, где $1 \leq q < 2$, является в то же время и собственным значением оператора $V'_{l^2 \rightarrow l^2}$, и при этом кратность собственного значения λ оператора $V'_{lq \rightarrow lq}$ совпадает с кратностью значения λ оператора $V'_{l^2 \rightarrow l^2}$. Но оператор $V'_{l^2 \rightarrow l^2}$ в силу самосопряженности операторов A и Δ_0 в $l^2(\mathbb{Z}^d)$ сопряжен, очевидно, оператору $V_{l^2 \rightarrow l^2}$. Следовательно, спектр оператора $V'_{l^2 \rightarrow l^2}$ является зеркальным отражением относительно вещественной оси спектра оператора $V_{l^2 \rightarrow l^2}$ (с учетом кратности собственных значений) [17; гл. III, т. 6.22], и в силу уже доказанного в [4] для случая $p = 2$ утверждения теоремы 7 множество $\sigma_\bullet(V'_{l^2 \rightarrow l^2}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ может состоять только из единственного, притом простого, собственного значения $\lambda > 0$ оператора $V'_{l^2 \rightarrow l^2}$, однозначно определяемого уравнением (4.12).

Из сказанного следует, что при $q = p/(1-p)$, где $2 < p \leq \infty$, множество $\sigma(V'_{lq \rightarrow lq}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ также может состоять только из единственного, притом вещественного и простого, собственного значения $\lambda > 0$, однозначно определяемого уравнением (4.12). А тогда [17; гл. III, т. 6.22] спектр оператора $V_{lp \rightarrow lp}$, сопряженного к оператору $V'_{lq \rightarrow lq}$, также может состоять только из единственного, притом вещественного и простого, собственного значения $\lambda > 0$, однозначно определяемого уравнением (4.12).

Для завершения доказательства теоремы 7 в случае $2 < p \leq \infty$ осталось показать, что каждое $\lambda > 0$, удовлетворяющее (4.12), действительно принадлежит множеству $\sigma_\bullet(V_{lp \rightarrow lp})$. Требуемое доказательство дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 7 для случая $1 \leq p < 2$, и потому опускается. Доказательство теоремы 7 в случае $2 < p \leq \infty$ завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Применявшиеся выше рассуждения очевидным образом обобщаются на случай операторов Y . Это дает возможность доказать, что если в условиях теоремы 5 параметры $\{\zeta_i\}$ и $\{\beta_j\}$ в представлении (1.1) оператора Y вещественны и $\zeta_i > -1$ при $i = 1, 2, \dots, k$, то множество $\sigma(Y_{lp \rightarrow lp}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$ от p не зависит.

6.4. Доказательство теоремы 8. Для доказательства первого утверждения теоремы 8 установим сначала, что условие $\beta > \beta_c$ влечет существование у оператора V хотя бы одного положительного собственного значения. В силу утверждения а) теоремы 7 для этого достаточно показать, что при выполнении условия $\beta > \beta_c$ уравнение (4.12) имеет по крайней мере одно положительное решение λ . При $d = 1, 2$ доказательство очевидно, поэтому рассмотрим только случай $d \geq 3$. Из определения β_c при $d \geq 3$ следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (1 + \zeta)^{-1} (\zeta \lambda + \beta) G_\lambda = (1 + \zeta)^{-1} \beta G_0 > 1 \quad \text{при} \quad \beta > \beta_c.$$

Кроме того, из определения функции G_λ вытекает, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda G_\lambda = 1$, и значит,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 + \zeta)^{-1} (\zeta \lambda + \beta) G_\lambda = (1 + \zeta)^{-1} \zeta < 1 \quad \text{при} \quad \zeta > -1.$$

Из полученных предельных соотношений следует, что уравнение (4.12) имеет по крайней мере одно положительное решение. Достаточность условия $\beta > \beta_c$ для

существования у оператора V хотя бы одного положительного собственного значения доказана. Необходимость условия $\beta > \beta_c$ для оператора $V_{l^p \rightarrow l^p}$ при $p = 2$ доказана в [4; теорема 3.2]; в общем случае $p \in [1, \infty]$ она доказывается аналогично.

Автор признателен А. Н. Ширяеву и Л. Г. Афанасьевой за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Alberverio, L. V. Bogachev, E. B. Yarovaya, "Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **326**:8 (1998), 975–980.
- [2] S. Alberverio, L. Bogachev, "Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations", *Positivity*, **4**:1 (2000), 41–100.
- [3] Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Центр прикл. исслед. при мех.-мат. фак-те МГУ, М., 2007.
- [4] Е. Б. Яровая, "Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий", *ТВП*, **55**:4 (2010), 705–731.
- [5] V. A. Vatutin, V. A. Topchii, E. B. Yarovaya, "Catalytic branching random walks and queueing systems with a random number of independently operating servers", *Teor. Imovir. Mat. Stat.*, **69** (2003), 1–15.
- [6] В. А. Ватутин, В. А. Топчий, "Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий", *ТВП*, **49**:3 (2004), 461–484.
- [7] Е. Б. Яровая, "Об исследовании ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам", *Современные проблемы математики и механики*, Теория вероятностей и математическая статистика, **4**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2009, 119–136.
- [8] Л. В. Богачев, Е. Б. Яровая, "Предельная теорема для надкритического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с одним источником", *УМН*, **53**:5 (1998), 229–230.
- [9] А. Г. Голицына, С. А. Молчанов, "Многомерная модель редких случайных рассеивателей", *Докл. АН СССР*, **294**:6 (1987), 1302–1306.
- [10] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [11] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [12] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Библиотека сборника "Математика", Мир, М., 1967.
- [13] М. А. Шубин, "Псевдоразностные операторы и их функция Грина", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:3 (1985), 652–671.
- [14] I. Schur, "Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen", *J. Reine Angew. Math.*, **140**:1 (1911), 1–28.
- [15] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.
- [16] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [17] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [18] *Меры некомпактности и уплотняющие операторы*, ред. Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский, Наука, Новосибирск, 1986.

Е. Б. Яровая

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su

Поступило

05.04.2011

Исправленный вариант

21.04.2011