Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, Х. Ф. Жвамер Карван, Г. А. Джалаева,
Оценки собственных функций задачи Редже, *Матем.
заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 141–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:45:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Оценки собственных функций задачи Редже

Г. А. Айгунов, Х. Ф. Жвамер Карван, Г. А. Джалаева

Известно [1], что изучение оператора Шрёдингера на полуоси $\mathbb{R}^+$ с финитным потенциалом q , носитель которого сосредоточен на отрезке $[0, a]$, связано с изучением спектральной задачи Редже на этом отрезке. Эта задача имеет вид

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 \rho(x)y(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(a) - i\lambda y(a) = 0, \quad (2)$$

где λ – спектральный параметр. Здесь в случае обычного оператора Шрёдингера

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

нужно положить $\rho(x) \equiv 1$, а для более общего оператора

$$L = \rho^{-1}(x) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right)$$

нужно рассматривать задачу в приведенной форме (1), (2). Всюду далее предполагаем, что функции $q(x)$ и $\rho(x)$ суммируемы на отрезке $[0, a]$ и неотрицательны.

Задачи об асимптотике собственных значений, свойствах полноты и базисности собственных функций задачи Редже изучались во многих работах. Здесь мы укажем работы [2]–[8] (см. также ссылки в этих работах). В этой заметке мы приведем результаты о характере роста норм собственных функций задачи Редже в пространстве $C[0, 1]$ при условии следующей нормировки в пространстве $L_2[0, a]$:

$$\int_0^a \rho(x)|y(x)|^2 dx = 1. \quad (3)$$

Задача (1), (2) ранее изучалась при условии, что функция ρ подчинена оценкам $m \leq \rho(x) \leq M$ при некоторых положительных m и M . Конечно, если последовательность собственных функций $y_n(x)$ нормирована условием (3), а функция ρ удовлетворяет такому условию, то эта последовательность почти нормирована в L_2 , т.е. $M^{-1} \leq \|y_n\|_{L_2} \leq m^{-1}$.

Вопрос о росте норм собственных функций задачи (1)–(3) рассматривался в работах [9]–[11]. В этих работах доказано, что для гладких весовых функций собственные функции $y_n(x)$ равномерно ограничены, если $\rho(a) \neq 1$, и растут как $C\sqrt{\ln|\lambda_n|}$ в случае $\rho(a) = 1$, $\rho'(a) \neq 0$. Первое условие $\rho(a) \neq 1$ эквивалентно условию регулярности задачи (1), (2) в смысле определения [5], а второе условие означает почти регулярность порядка 1 этой задачи. Для суммируемых весов в этих работах установлено, что максимумы собственных функций могут расти не медленнее $c \cdot |\lambda_n|^{1/2}$ на некоторой подпоследовательности собственных функций $y_{n_k}(x)$. Здесь и далее через $\{\lambda_n, y_n(x)\}$ обозначается собственная пара

рассматриваемой задачи. Заметим, что для обычной краевой задачи Штурма–Лиувилля (1)–(3) (например, когда второе краевое в (2) заменено на условие вида $y'(a) - hy(a) = 0$, где h – комплексное число) собственные функции равномерно ограничены для гладких весов ρ . Соответствующие результаты получены в работах [12] и [13].

В этой заметке мы получим более полные результаты о росте собственных функций задачи (1)–(3). Сначала докажем результат о максимальном возможном росте.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции q и ρ суммируемы на отрезке $[0, a]$, причем $q(x) \geq 0$ и $\rho(x) \geq m > 0$. Тогда для всех собственных чисел λ_n и соответствующих собственных функций $y_n(x)$ задачи (1)–(3) выполняются оценки

$$\max_{x \in [0, a]} |y_n(x)| \leq C \cdot |\lambda_n|^{1/2}, \quad \text{где } C = \max(\sqrt{2}m^{-1/4}, 2m^{-1/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$, с учетом неравенства $\rho(x) \geq m$ имеем

$$\begin{aligned} |y(x)|^2 &= y(x) \cdot \bar{y}(x) = \int_0^x [\bar{y}(s) \cdot y'(s) + y(s) \cdot \bar{y}'(s)] ds \leq \frac{2}{\sqrt{m}} \int_0^x \sqrt{\rho(s)} \cdot |y(s)| \cdot |y'(s)| ds \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{m}} \left(\int_0^a \rho(s) |y(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^a |y'(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножим уравнение (1) на $\bar{y}(x)$ и проинтегрируем от 0 до a . Тогда получим

$$-\int_0^a y''(x) \bar{y}(x) dx + \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx = \int_0^a \lambda^2 \rho(x) |y(x)|^2 dx. \quad (5)$$

Интегрируя первый интеграл по частям, с учетом краевых условий $y(0) = 0$, $y'(a) = i\lambda y(a)$ получаем

$$-i\lambda |y(a)|^2 + \int_0^a |y'(x)|^2 dx + \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx = \lambda^2 \int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx. \quad (6)$$

Умножим это равенство на $\bar{\lambda}$ и рассмотрим удвоенную вещественную часть получившегося равенства (т.е. сложим с комплексно-сопряженным равенством). Тогда получим

$$(\lambda + \bar{\lambda}) \left[\int_0^a |y'(x)|^2 dx + \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx \right] = (\lambda + \bar{\lambda}) |\lambda|^2 \int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx.$$

Следовательно, при $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$ (т.е. при всех λ , не лежащих на мнимой оси) с учетом условия $q(x) \geq 0$ имеем

$$\int_0^a |y'(x)|^2 dx = |\lambda|^2 \int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx - \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx.$$

Поэтому из (4) с учетом условия (3) находим

$$|y(x)|^2 \leq \frac{2|\lambda|}{\sqrt{m}} \int_0^a \rho(s) |y(s)|^2 ds \leq \frac{2|\lambda|}{\sqrt{m}}.$$

Тем самым, утверждение теоремы доказано при $\lambda \notin i\mathbb{R}$.

Далее заметим, что числа $\lambda = it$, $t \geq 0$ не могут быть собственными значениями задачи (1), (2). Это следует из равенства (6). При $\lambda = it$, $t < 0$, согласно (6), с учетом условия $q(x) \geq 0$ имеем

$$\int_0^a |y'(x)|^2 dx = -t |y(a)|^2 - \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx - t^2 \int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx \leq |\lambda| |y(a)|^2.$$

Используя условие (3) и неравенство (4), получаем оценку

$$|y(x)|^2 \leq \frac{2}{\sqrt{m}} |y(a)| \cdot |\lambda|^{1/2}. \quad (7)$$

Заметим, что при $\lambda = it$, $t < 0$, уравнение (1) принимает вид

$$y''(x) = Q(t, x)y(x), \quad Q(t, x) = t^2 \rho(x) + q(x) > 0.$$

Рассмотрим решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям $y(0) = 0$, $y'(0) > 0$. Выполнение последнего условия всегда можно добиться, умножая решение на число, по модулю равное 1. Докажем, что такие решения возрастают на отрезке $[0, a]$. Действительно, начальные условия гарантируют, что $y(x) > 0$ в интервале $(0, x_0)$ при некотором достаточно малом x_0 . Тогда

$$y'(x) = \int_0^x Q(t, s)y(s) ds + y'(0) > 0, \quad \text{если } x \in [0, x_0].$$

Поэтому функция y возрастает на отрезке $[0, x_0]$, и равенство $y(x_0) = 0$ невозможно при $x_0 \leq a$. Следовательно, $y(x) > 0$ при всех $x \in (0, a]$, а потому функция y возрастает на всем отрезке $[0, a]$. Неравенство (7) доказано при всех $x \in [0, a]$, в частности, при $x = a$. Поэтому из (7) получаем

$$|y(x)| \leq |y(a)| \leq \frac{2}{\sqrt{m}} |\lambda|^{1/2}.$$

Тем самым, теорема полностью доказана.

Приведенная теорема 1 является точной. Это подтверждает следующий результат, доказательство которого требует серьезной технической работы и здесь опускается.

ТЕОРЕМА 2. Для любой последовательности $\{\beta_k \mid \beta_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0\}$ существует непрерывная весовая функция $\rho(x)$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|y_n(x, \rho)\|_{C_{[0, a]}}}{\beta_n \cdot |\lambda_n|^{1/2}} > 0.$$

Приведем также без доказательства еще один результат для весовых функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условиям Гёльдера $|\rho(x_1) - \rho(x_2)| < N \cdot |x_1 - x_2|^\alpha$, где $N > 0$, $0 < \alpha < 1$. Обозначим этот класс через H_N^α . Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\rho_0(x) \in H_N^\alpha$, $a \varepsilon > 0$ произвольное число. Тогда существует весовая функция $\rho(x)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\|\rho(x) - \rho_0(x)\|_{L_1[0, a]} < \varepsilon$;
- 2) $\rho(x)$ имеет счетное множество $\{x_k\}$ точек разрыва первого рода таких, что $x_k \nearrow a$;
- 3) на интервалах $[0, x_1)$, (x_1, x_2) , $\dots$, (x_k, x_{k+1}) , $\dots$ функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с теми же числами N и α , что и $\rho_0(x)$;
- 4) скачки $h_k = \lim_{x \rightarrow x_k+0} \rho(x) - \lim_{x \rightarrow x_k-0} \rho(x)$ удовлетворяют неравенствам $|h_k| < N \cdot |x_{k+1} - x_k|^\alpha$;
- 5) для собственных пар $\{\lambda_n, y_n(x)\}$ задачи (1)–(3) с весом $\rho(x)$ выполняется соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_n^{(\alpha-1)/2} \|y_n(x)\|_{C_{[0, a]}} = C_0 > 0.$$

Набросок доказательства теоремы 3 имеется в работе [14].

В заключение авторы выражают благодарность проф. Шкаликову А. А. за ценные советы и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Regge, *Nuovo Cimento* (10), **8**:5 (1958), 671–679. [2] Б. Л. Коган, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:3 (1971), 70–74. [3] А. Г. Сергеев, *Дифференц. уравнения*, **8** (1972), 925–927. [4] А. О. Кравицкий, *Дифференц. уравнения*, **4**:1 (1968), 165–177. [5] А. А. Шкаликов, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **9**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983, 190–229. [6] А. А. Shkalikov, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:3 (2001), 356–364. [7] А. А. Shkalikov, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **144**:4 (2007), 4292–4300. [8] С. van der Mee, V. Pivovarchik, *J. Differential Equations* (to appear). [9] Г. А. Айгунов, Т. Ю. Гаджиева, *Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения*, Махачкала, 2009, 18–26. [10] Г. А. Айгунов, Х. Жвамер Карван, *УМН*, **64**:6 (2009), 169–170. [11] Г. А. Айгунов, Х. Жвамер Карван, *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*, 2010, № 2, 8–12. [12] Г. А. Айгунов, М. М. Гехтман, *УМН*, **52**:3 (1997), 161–162. [13] Г. А. Айгунов, *УМН*, **52**:6 (1997), 147–148. [14] Г. А. Айгунов, Х. Жвамер Карван, *Вестн. ДГУ. Естеств. науки*, 2009, № 4, 25–33.

Г. А. Айгунов

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

E-mail: aigounov@mail.ru

Поступило

27.03.2011

Исправленный вариант

10.02.2012

Х. Ф. Жвамер Карван

University of Sulaimani, Iraq

E-mail: jwameri1973@gmail.com

Г. А. Джалаева

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала