Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Устойчивость недиссипативных систем относительно постоянно действующих случайных возмущений, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 145–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 10:12:21

Устойчивость недиссипативных систем относительно постоянно действующих случайных возмущений

Л. А. Калякин

Эта работа возникла из попытки выяснить устойчивость явления авторезонанса [1] при малых случайных возмущениях. Оказалось, что известные результаты об устойчивости [2] не применимы из-за наличия в невозмущенной системе решений разного типа – ограниченных и неограниченных на бесконечности. Простейший пример такого рода дает задача о возмущении уравнения $\dot{x} = x(x - 1)$, решения которого помимо устойчивого равновесия $x = 0$ содержат траектории, уходящие на бесконечность. Вопрос состоит в том, при каких случайных возмущениях устойчивость сохраняется.

В общей постановке рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > t_0 \quad (1)$$

с условием $f(0, t) \equiv 0$. Возмущенная система записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + \mu g(x, t, \omega), \quad t > t_0, \quad |\mu| \ll 1, \quad \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь $g(x, t, \omega)$ – случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Случай “белого шума” не рассматривается, так что уравнение понимается в обычном смысле [2; с. 26]. Класс возмущений ограничен требованием существования глобального решения с начальными данными из окрестности равновесия. Достаточные условия для выполнения этого требования касаются структуры нелинейности по x ; они хорошо известны [2; с. 20] и здесь не обсуждаются. Выделение малого параметра $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \ll 1$ оказывается удобным приемом при анализе задачи с постоянно действующим возмущением, см. [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение $x(t) \equiv 0$ для системы (1) *устойчиво по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений равномерно на множестве $\mathcal{G}$* , если $\forall \varepsilon, \nu > 0 \exists \delta, \Delta: \forall |x_0| < \delta, |\mu| < \Delta$ и $\forall g(x, t, \omega) \in \mathcal{G}$ решение $x = x_g(t, \omega)$ системы (2) с начальным условием $x|_{t=t_0} = x_0$ обладает свойством $P(\sup_{t>t_0} |x_g(t, \omega)| > \varepsilon) < \nu$.

Обычно задача об устойчивости решается при условии равномерной по t малости математического ожидания $M[\mu \sup_x |g(x, t, \omega)|]$; см. [2; с. 50]. При этом основным ограничением на исходные данные является требование диссипативности невозмущенной системы, которое можно отождествить с существованием глобальной функции Ляпунова $U(x, t)$, т.е. во всем пространстве $x \in \mathbb{R}^n$ [2; с. 24, 25]. С одной стороны, такое условие оказывается весьма жестким и не выполняется, например, при наличии в невозмущенной системе траекторий, уходящих на бесконечность. С другой стороны, легко строятся примеры (см. [2; с. 47], в которых отсутствие диссипативности ведет к неустойчивости с вероятностью единица. Отойти от условия диссипативности можно, если изменить класс возмущений, накладывая интегральные по t ограничения для математического ожидания.

Ограничения на исходные данные. Предполагается, что в окрестности равновесия существует функция Ляпунова $U(x, t)$, у которой производная в силу системы (1) определено-отрицательная:

$$m_- |x|^2 < U(x, t) < m_+ |x|^2, \quad \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| < m_1 |x|, \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{(1)} < -\gamma U(x, t). \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-01-00186, 11-02-97003).

© Л. А. Калякин, 2012

Здесь все неравенства выполняются равномерно в области $|\mathbf{x}| < r$, $t > t_0$ при некоторых положительных константах $0 < m_{\pm}, m_1, \gamma, r < \infty$.

Рассматриваемый нами класс возмущений (случайных функций) выделяется наличием у каждой из них мажоранты: $|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)| \leq \eta(t, \omega) \quad \forall |\mathbf{x}| \leq r, t \geq t_0$, которая стабилизируется на бесконечности к $\eta(\omega) \geq 0$, так что

$$\text{для } I_{\eta}(\omega) = \int_{t_0}^{\infty} |\eta(\zeta, \omega) - \eta(\omega)| d\zeta \quad \text{выполняется } P(I_{\eta}(\omega) < \infty) = 1. \quad (4)$$

В последнем условии содержится основное отличие от известных работ об устойчивости в системах со случайными возмущениями. Детерминированные возмущения подобного типа рассматривались в рамках так называемой интегральной устойчивости [4], [5]. Более широкий класс детерминированных возмущений с интегральным условием ограниченности среднего по t исследован в [6], [3]. Требование ограниченности в среднем по t было приспособлено для случайных возмущений при анализе устойчивости диссипативной системе [2; с. 52]. Однако, для недиссипативной системы при такого типа случайных возмущениях устойчивость не гарантируется. В данной работе условия накладываются не на среднее, а на интеграл $I_{\eta}(\omega)$.

Ограничения, связанные со случайностью возмущений, накладываются на мажоранту и описываются в терминах математического ожидания:

$$M[\eta(\omega)] < \infty, \quad M[\exp(I_{\eta}(\omega))] < \infty. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия (3)–(5), то при $\forall R_1, R_2 \in (0, \infty)$ равновесие $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (1) устойчиво по вероятности равномерно относительно случайных возмущений $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$, для которых существует глобальное решение задачи Коши и $M[\eta(\omega)] \leq R_1$, $M[\exp(I_{\eta}(\omega))] \leq R_2$.

Первая часть доказательства похожа на рассуждения, приведенные в [6]. Пусть выполнено $R_1, R_2 > 0$, а также $\varepsilon, \nu > 0$ – произвольные положительные числа. Для системы (2) строится аналог функции Ляпунова в виде $V_{\eta}(\mathbf{x}, t, \omega) = U(\mathbf{x}, t) \exp(\beta_{\eta}(t, \omega))$, $|\mathbf{x}| \leq r$, $t > t_0$. Показатель определяется по формуле

$$\beta_{\eta}(t, \omega) = -\frac{\gamma\nu}{R_1} \int_{t_0}^t [\eta(\zeta, \omega) - \eta(\omega)] d\zeta.$$

При доказательстве теоремы можно считать (не ограничивая общность ввиду данного выше определения): $\gamma\nu/R_1 < 1$, так что $|\beta_{\eta}(t, \omega)| \leq I_{\eta}(\omega) \quad \forall t > t_0$.

Такой выбор $\beta_{\eta}(t, \omega)$, с одной стороны, обеспечивает в силу (3) две оценки:

$$m_- \exp(-I_{\eta}(\omega)) |\mathbf{x}|^2 < V_{\eta}(\mathbf{x}, t, \omega) < m_+ \exp(I_{\eta}(\omega)) |\mathbf{x}|^2, \quad \forall |\mathbf{x}| < r, \quad t > t_0.$$

Отсюда при любом $\varepsilon > 0$ получается неравенство

$$\sup_{|\mathbf{x}| \leq \delta_{\eta}, t > t_0} V_{\eta}(\mathbf{x}, t, \omega) < \inf_{|\mathbf{x}| = \varepsilon, t > t_0} V_{\eta}(\mathbf{x}, t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} V_{\eta, \varepsilon}(\omega), \quad (6)$$

если выбрать границу шара: $\delta_{\eta} = \delta_{\eta}(\varepsilon, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \exp(-I_{\eta}(\omega)) \sqrt{m_-/m_+}$.

С другой стороны, производная, вычисленная в силу системы (2):

$$\left. \frac{dV_{\eta}}{dt} \right|_{(2)} = \left[\left. \frac{dU}{dt} \right|_{(1)} + \mu \mathbf{g} \partial_{\mathbf{x}} U \right] \exp(\beta_{\eta}) + V_{\eta} \partial_t \beta_{\eta}(t, \omega),$$

будет неположительна в кольцевой области $\delta_g < |\mathbf{x}| < \varepsilon$, если параметр возмущения μ достаточно мал. В самом деле, в силу условий теоремы при $|\mu| < \Delta_g$ для возмущений с предельной мажорантой $\eta(\omega) \leq R_1/\nu$ получаем

$$\left. \frac{dV_\eta}{dt} \right|_{(2)} \leq \left[-\gamma + \frac{\Delta_\eta}{\delta_\eta} \frac{R_1}{\nu} \frac{m_1}{m_-} \right] V_\eta + \left[\frac{\Delta_\eta}{\delta_\eta} \frac{m_1}{m_-} (\eta_g(t, \omega) - \eta(\omega)) + \partial_t \beta_\eta(t, \omega) \right] V_\eta.$$

Первое слагаемое здесь обращается в нуль, если положить

$$\Delta_\eta(\varepsilon, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_\eta(\varepsilon, \omega) \frac{\gamma \nu m_-}{R_1 m_1} = \varepsilon \frac{\gamma \nu \exp(-I_\eta(\omega))}{R_1} \frac{m_-}{m_1} \sqrt{\frac{m_-}{m_+}};$$

после этого второе слагаемое равно нулю в силу выбора функции $\beta_\eta(t, \omega)$.

При таком выборе параметров δ_η , Δ_g и при возмущении $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$ из класса функций с ограниченными величинами $I_\eta(\omega)$, $\eta(\omega)$ функция $V_\eta(\mathbf{x}, t, \omega)$ обладает свойством (6), а ее производная $dV_\eta/dt|_{(2)}$ неположительна в кольце $\delta_\eta < |\mathbf{x}| < \varepsilon$ при $|\mu| < \Delta_\eta$. Отсюда следует, что функция $V_\eta(\mathbf{x}, t, \omega)$ на траектории, стартовой из внутреннего шара $|\mathbf{x}_0| < \delta_\eta$, не достигает минимального значения $V_{\eta, \varepsilon}(\omega)$ на внешней границе $|\mathbf{x}| = \varepsilon$. Следовательно, траектория $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g(t, \omega)$ системы (2) остается внутри внешней сферы: $|\mathbf{x}| < \varepsilon$ при всех временах $t > t_0$. Для детерминированных возмущений с мажорантами $\eta(t, \omega)$, у которых ограничены $I_\eta(\omega)$, $\eta(\omega)$, доказательство устойчивости на этом заканчивается.

Случайные возмущения содержат дополнительный параметр $\omega \in \Omega$. Поэтому для семейства траекторий $\mathbf{x}_g(t, \omega)$ принадлежность окрестности $|\mathbf{x}| < \varepsilon$ можно обеспечить при тех возмущениях $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$, для которых границы $\delta_\eta(\varepsilon, \omega) \geq \delta > 0$, $\Delta_\eta(\varepsilon, \omega) \geq \Delta > 0$ отделены от нуля равномерно по $\mathbf{g}$. Гарантировать такую отделимость для возмущений со случайными мажорантами $\eta(t, \omega)$ не возможно. Но можно оценить множество неподходящих мажорант, используя конечность математического ожидания в условии (5).

Для возмущений $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$, у которых мажоранты обладают свойствами $\exp(I_\eta(\omega)) \leq R_2/\nu$, получаются оценки снизу:

$$\delta_\eta(\varepsilon, \omega) > \frac{\varepsilon \nu}{R_2} \sqrt{\frac{m_-}{m_+}} \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\varepsilon, \nu), \quad \Delta_\eta(\varepsilon, \omega) > \frac{\varepsilon \nu^2}{R_1 R_2} \frac{m_-}{m_1} \sqrt{\frac{m_-}{m_+}} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\varepsilon, \nu).$$

Значит, для возмущений, у которых мажоранты удовлетворяют неравенствам $\eta(\omega) \leq R_1/\nu$ и $\exp(I_\eta(\omega)) \leq R_2/\nu$, траектории $\mathbf{x}_g(t, \omega)$ с начальными точками $|\mathbf{x}_0| < \delta(\varepsilon, \nu)$ при $|\mu| < \Delta(\varepsilon, \nu)$ не выходят из шара $|\mathbf{x}| < \varepsilon$.

Все оставшиеся возмущения со свойствами мажорант: $\eta(\omega) > R_1/\nu$ либо $\exp(I_\eta(\omega)) > R_2/\nu$, составляют множество $\mathcal{G}$. Поскольку $\eta(\omega)$, $\exp(I_\eta(\omega)) > 0$, для этих случайных величин выводятся неравенства (см. [2; с. 32])

$$\mathbf{P}\left(\eta(\omega) > \frac{R_1}{\nu}\right) < \frac{\mathbf{M}[\eta(\omega)]}{R_1/\nu} < \nu, \quad \mathbf{P}\left(\exp(I_\eta(\omega)) > \frac{R_2}{\nu}\right) < \frac{\mathbf{M}[\exp(I_\eta(\omega))]}{R_2/\nu} < \nu.$$

Траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g(t, \omega)$, для которых выбираются малыми начальное значение $|\mathbf{x}_0| < \delta(\varepsilon, \nu)$ и параметр возмущения $|\mu| < \Delta(\varepsilon, \nu)$, но которые, тем не менее, не остаются в шаре $|\mathbf{x}| < \varepsilon$, обязаны быть решениями системы (2) с возмущениями из множества $\mathcal{G}$. Для них $\mathbf{P}(\sup_{t > t_0} |\mathbf{x}_g(t, \omega)| > \varepsilon) < \nu$. Поскольку числа $\varepsilon, \nu > 0$ произвольные, теорема доказана.

ПРИМЕР. Для уравнения $\dot{x} = x(x - 1)$ равновесие $x = 0$ устойчиво относительно возмущения в виде высоких случайных всплесков: $\mu g = G(\omega)/\mu$ на узком (по t) носителе длиной μ^2 . Здесь $\eta(\omega) \equiv 0$, $\mathbf{M}[I_\eta(\omega)] = \mathbf{M}[|G(\omega)|] < \infty$.

Автор благодарит проф. Насырова Ф. С. за обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. А. Калякин, *УМН*, **63**:5 (2008), 3–72. [2] Р. З. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, Наука, М., 1969. [3] М. М. Хапаев, *Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний*, Высшая школа, М., 1988. [4] Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954. [5] I. Vrcoč, *Czechoslovak Math. J.*, **9(84)** (1959), 71–129. [6] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.

Л. А. Калякин

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского научного центра РАН

E-mail: klenru@mail.ru

Поступило

28.01.2012