Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Назайкинский, Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:33:30

Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области

В. Е. Назайкинский

1. Введение. Вырождающиеся на границе области волновые уравнения часто встречаются в приложениях. Например, они возникают при моделировании в линейном приближении наката на берег волн цунами [1], [2]. Асимптотику решений уравнений волнового типа естественно строить методом канонического оператора (см., например, [3]), который опирается на геометрию траекторий отвечающей рассматриваемому уравнению системы Гамильтона. В отличие от невырожденного случая (который для уравнений мелкой воды с локализованными начальными данными был исследован этим методом в [4], [5]; см. также цитированную там литературу), геометрия траекторий системы Гамильтона для вырождающегося уравнения имеет следующую особенность: они уходят на бесконечность по импульсам за конечное время, одновременно подходя к границе в проекции на координатное пространство. Поэтому для успешного решения задачи необходимо правильно описать, что происходит с траекториями *после* ухода на бесконечность (т.е. найти закон отражения от границы) и построить канонический оператор на возникающих при этом неограниченных лагранжевых многообразиях. В одномерном случае это было сделано в [6], и результаты были применены в [7] для построения асимптотик в одномерной задаче Коши для вырождающегося волнового уравнения с локализованными начальными данными. Модельная двумерная задача в полуплоскости с вырождением на граничной прямой была рассмотрена в [8].

В данной работе мы изучаем отвечающую вырождающимся волновым уравнениям геометрию фазового пространства для области общего вида и произвольной размерности. (Заметим, что предлагаемое геометрическое описание является новым и в одномерном случае.) Конструкция канонического оператора и формулы для асимптотических решений будут даны в отдельной статье. Доказательства всех результатов будут приведены в подробной публикации.

2. Вырожденное волновое уравнение и его гамильтониан. Пусть M – ограниченная замкнутая область с гладкой границей ∂M и внутренностью $\Omega = M \setminus \partial M$ в n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$. Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) = 0, \quad u = u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

будем называть (*обобщенным*) *волновым уравнением, вырождающимся на границе области M* , если матрица его коэффициентов $A(x) = (a_{jk}(x))$ представима в виде $A(x) = \varphi(x)B(x)$, где $B(x)$ – симметрическая вещественная матрица, гладко зависящая от x и строго положительно определенная при всех $x \in M$, а $\varphi(x)$ – *определяющая функция* границы ∂M (т.е. гладкая функция в M , положительная в Ω и равная нулю на ∂M , градиент которой не обращается в нуль на ∂M). В частности, если $B(x)$ – единичная матрица, то уравнение (1) представляет собой волновое уравнение в Ω со скоростью $c(x) = \sqrt{\varphi(x)}$, вырождающейся на ∂M как квадратный корень из расстояния до ∂M . Отвечающий уравнению (1) гамильтониан имеет вид

$$H(x, p) = \langle p, A(x)p \rangle^{1/2} = \sqrt{\varphi(x)} \langle p, B(x)p \rangle^{1/2}. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00973-а).

© В. Е. Назайкинский, 2012

(Здесь и далее $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j$.) Траектории соответствующей гамильтоновой системы

$$\dot{x} = H_p \equiv A(x)p \langle p, A(x)p \rangle^{-1/2}, \quad \dot{p} = -H_x \equiv -\frac{1}{2} \left\langle p, \frac{\partial A}{\partial x}(x)p \right\rangle \langle p, A(x)p \rangle^{-1/2} \quad (3)$$

в фазовом пространстве $T_0^* \Omega \simeq \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ не являются бесконечно продолжимыми: за конечное время они уходят на бесконечность по импульсным переменным p , при этом приближаясь по переменным x к границе ∂M области M .

3. Фазовое пространство. Построим “пополненное” фазовое пространство $\Phi \supset T_0^* \Omega$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Исходное фазовое пространство $T_0^* \Omega$ – открытое подмножество в гладком многообразии Φ , причем $\Phi \setminus T_0^* \Omega$ – гладкое подмногообразие размерности $2n - 1$.
2. Многообразие Φ – симплектическое с (гладкой) структурной формой ω^2 , причем вложение $T_0^* \Omega \subset \Phi$ является вложением симплектических многообразий, т.е.

$$\omega^2|_{T_0^* \Omega} = dp \wedge dx \equiv \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dx_j. \quad (4)$$

3. Гамильтониан $H(x, p)$ продолжается (по непрерывности) до гладкой функции на Φ .
4. Как следствие, гамильтоново векторное поле (3) продолжается по непрерывности до гладкого векторного поля на Φ , причем траектории последнего неограниченно продолжимы вперед и назад по времени.

Пусть $U \subset M$ – достаточно малая воротниковая окрестность в M края ∂M области M , $\psi(x)$ – некоторая положительная в Ω определяющая функция края ∂M , и пусть $a(x)$ – гладкое векторное поле в U такое, что

$$\langle a(x), \psi'(x) \rangle = 1 \quad \text{при } x \in U;$$

например, $a(x) = b(x) \langle b(x), \psi'(x) \rangle^{-1}$, где $b(x)$ – векторное поле, трансверсальное границе ∂M (знаменатель не обращается в нуль, если окрестность U достаточно мала).

В прямом произведении $T^*U \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ с координатами (y, η, q, E) , $(y, \eta) \in T^*U$, $q \in \mathbb{R}$, $E \in (0, \infty)$, рассмотрим подмножество

$$V = \{(y, \eta, q, E) \in T^*U \times \mathbb{R} \times (0, \infty) : \langle a(y), \eta \rangle = 0, \psi(y) = q^2 E\} \quad (5)$$

и его подмножество $V_\infty = \{(y, \eta, q, E) \in V : q = 0\}$.

ЛЕММА 1. Множество V представляет собой гладкое $2n$ -мерное подмногообразие в $T^*U \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$, а V_∞ – гладкое $(2n - 1)$ -мерное подмногообразие в V .

В пространстве $T_0^* \Omega$ с координатами (x, p) определим гладкое $(2n - 1)$ -мерное подмногообразие

$$W_0 = \{(x, p) \in T_0^* \Omega : x \in U \setminus \partial M, \langle a(x), p \rangle = 0\} \quad (6)$$

и зададим отображение

$$f: V \setminus V_\infty \rightarrow T_0^*U \setminus W_0 \subset T_0^* \Omega \quad (7)$$

формулами

$$x = y, \quad p = \eta + \frac{\psi'(x)}{q}. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. Отображение (7), (8) корректно определено и является диффеоморфизмом. Обратное отображение $f^{-1}: T_0^*U \setminus W_0 \rightarrow V \setminus V_\infty$ задается формулами

$$y = x, \quad \eta = p - \langle a(x), p \rangle \psi'(x), \quad q = \frac{1}{\langle a(x), p \rangle}, \quad E = \psi(x) \langle a(x), p \rangle^2. \quad (9)$$

Положим теперь $\Phi = V \sqcup_f T_0^* \Omega$ (т.е. в дизъюнктном объединении $V \sqcup T_0^* \Omega$ отождествим точки, связанные диффеоморфизмом f) и снабдим это множество естественной топологией, базу которой образуют образы открытых множеств при естественных вложениях $V \subset \Phi$ и $T_0^* \Omega \subset \Phi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество Φ наделено естественной структурой гладкого многообразия, при которой вложения $V \subset \Phi$ и $T_0^* \Omega \subset \Phi$ суть вложения гладких многообразий. Более того, $\Phi = T_0^* \Omega \sqcup V_\infty$, причем $T_0^* \Omega$ – открытое всюду плотное подмногообразие, а V_∞ – $(2n - 1)$ -мерное подмногообразие.*

Представленная выше конструкция пространства Φ содержит произвольно выбираемые окрестность U , функцию ψ и векторное поле a . Однако само пространство Φ с точностью до диффеоморфизма не зависит от произвола в этой конструкции. Более точно, пусть Φ_1 и Φ_2 – два разных пространства Φ , полученных из $T_0^* \Omega$ такой конструкцией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Тождественное отображение $\Phi_1 \supset T_0^* \Omega \xrightarrow{\text{id}} T_0^* \Omega \subset \Phi_2$ продолжается по непрерывности до диффеоморфизма многообразия Φ_1 на многообразие Φ_2 .*

Указанная конструкция, будучи применена локально, дает удобные локальные координаты на Φ в окрестности произвольной точки “подмногообразия на бесконечности” V_∞ . Именно, возьмем произвольную точку границы ∂M . В окрестности этой точки определяющую функцию границы (при необходимости перенумеровывая координаты и меняя знак координаты x_1) можно записать в виде $\psi(x) = x_1 - g(x')$, где $g(x')$ – гладкая функция переменных $x' = (x_2, \dots, x_n)$, а векторное поле взять равным $a(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда множество V над такой окрестностью задается уравнениями

$$y_1 = g(y') + q^2 E, \quad \eta_1 = 0,$$

и в качестве локальных координат на V (и, следовательно, на Φ) в окрестности соответствующих точек из V_∞ можно взять (q, y', E, η') .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Симплектическая форма $dp \wedge dx$ на $T_0^* \Omega$ продолжается до замкнутой невырожденной 2-формы ω^2 на Φ . В указанных выше локальных координатах в окрестности точек из V_∞ форма ω^2 записывается в виде*

$$\omega^2 = dE \wedge dq + d\eta' \wedge dy.$$

Итак, многообразие Φ обладает симплектической структурой, естественно продолженной с исходного фазового пространства, и для любой гладкой функции на Φ определена соответствующая система Гамильтона.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Функция Гамильтона (2) может быть продолжена по непрерывности до гладкой функции $\tilde{H}$ на Φ , и траектории системы Гамильтона, соответствующей $\tilde{H}$ (которые содержат в качестве подынтервалов все траектории системы Гамильтона (3)), неограниченно продолжаются вперед и назад по времени.*

Комбинируя предложения 1, 3 и 4, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Фазовое пространство Φ с формой ω^2 удовлетворяет условиям 1–4.*

4. Пример. Пусть Ω – внешность эллипса $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$, а гамильтониан имеет вид

$$H(x, p) = \left(\frac{r-1}{r+1} (p_1^2 + p_2^2) \right)^{1/2}, \quad \text{где } r = \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^{1/2}.$$

В полярных координатах (r, φ) , задаваемых формулами $x_1 = a_1 r \cos \varphi$, $x_2 = a_2 r \sin \varphi$, гамильтониан записывается в виде

$$H(r, \varphi, P, Q) = \left[\frac{r-1}{r+1} \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{a_2^2} & \frac{\sin 2\varphi}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) \\ \frac{\sin 2\varphi}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) & \frac{\sin^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{a_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right\rangle \right]^{1/2},$$

где $P = a_1 p_1 \cos \varphi + a_2 p_2 \sin \varphi$ и $Q = r(a_2 p_2 \cos \varphi - a_1 p_1 \sin \varphi)$ – импульсы, двойственные к r и φ , соответственно, так что $P dr + Q d\varphi = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$. В полярных координатах область Ω имеет вид $r > 1$, поэтому в качестве координат на Φ введем следующие функции:

$$q = \frac{1}{P}, \quad E = (r - 1)P^2, \quad \varphi, \quad Q.$$

Тогда, в соответствии с общей теорией,

$$dP \wedge dr + dQ \wedge d\varphi = dE \wedge dq + dQ \wedge d\varphi, \quad (10)$$

а гамильтониан является гладкой функцией новых координат, в том числе и при $q = 0$:

$$H(q, \varphi, E, Q)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{E}{Eq^2 + 2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{qQ}{Eq^2 + 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{a_2^2} & \frac{\sin 2\varphi}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) \\ \frac{\sin 2\varphi}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) & \frac{\sin^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{a_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{qQ}{Eq^2 + 1} \end{pmatrix} \right\rangle \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{E}{Eq^2 + 2} \left[\frac{\cos^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{a_2^2} + \frac{qQ \sin 2\varphi}{Eq^2 + 1} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) + \frac{q^2 Q^2}{(Eq^2 + 1)^2} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{a_2^2} \right) \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Из выражения (10) для симплектической формы следует, что система Гамильтона имеет стандартный вид

$$\dot{q} = H_E, \quad \dot{E} = -H_q, \quad \dot{\varphi} = H_Q, \quad \dot{Q} = H_\varphi.$$

Мы не будем явно выписывать соответствующие громоздкие выражения, а отметим лишь, что при $q = 0$ справедливо соотношение

$$\dot{q} = \frac{1}{4H} \left[\frac{\cos^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{a_2^2} \right] \neq 0.$$

Таким образом, траектории системы Гамильтона трансверсальны “подмногообразию на бесконечности” V_∞ фазового пространства Φ .

Автор признателен С. Ю. Доброхотову за внимание и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. J. Stoker, *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*, Pure Appl. Math., 4, Interscience Publ., New York, 1957. [2] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996. [3] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976. [4] S. Yu. Dobrokhotov, R. V. Nekrasov, B. Tirozzi, *J. Engrg. Math.*, **69**:2-3 (2011), 225–242. [5] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, *УМН*, **65**:1 (2010), 185–186. [6] Т. Vukašinac, P. Zhevandrov, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:3 (2002), 371–381. [7] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:4 (2010), 434–447. [8] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Б. Тироцци, *Алгебра и анализ*, **22**:6 (2010), 67–90.

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва,
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Московский государственный институт электроники
и математики (технический университет)
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Поступило

13.12.2011

Исправленный вариант

27.02.2012