Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Андреев, С. В. Павликов, К методу функционалов
Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-
дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2000,
том 68, выпуск 3, 323–331

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:05:08

УДК 517.929

К МЕТОДУ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. Андреев, С. В. Павликов

Представлено развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости линейных неавтономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Оно основано на построении предельных уравнений и предельных функционалов Ляпунова.

Библиография: 7 названий.

1. Целью настоящей работы является развитие метода предельных уравнений и предельных функционалов Ляпунова [1]–[5] и исследование асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа [6], [7].

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(t, x_t)] = F(t, x_t), \quad (1.1)$$

где $F, G: \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть непрерывные отображения, $\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$ есть действительная ось, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}^n$ есть действительное линейное пространство n -векторов x с нормой $|x|$, $h \geq 0$ – некоторое действительное число, $C_{[\alpha, \beta]}$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, \alpha \leq s \leq \beta)$, $C_H = \{\varphi \in C_{[-h, 0]} : \|\varphi\| < H\}$; для непрерывной функции $x:] - \infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ и каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $x_t \in C_{[-h, 0]}$ определяется равенством $x_t(s) = x(t + s)$ для $-h \leq s \leq 0$.

Примем следующее определение решения уравнения (1.1) из [6], [7]. *Решением уравнения* (1.1) назовем непрерывную функцию $x: [\alpha - h, \alpha + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $A > 0$, такую, что $x_\alpha = \varphi$, где $\varphi \in C_H$ – начальная функция, $x_t \in C_H$ для всех $t \in [\alpha, \alpha + A]$; выражение $x(t) - G(t, x_t)$ имеет непрерывную производную при $t \in [\alpha, \alpha + A]$, в силу которой уравнение (1.1) выполняется для каждого $t \in [\alpha, \alpha + A]$.

Предположим, что функции F и G удовлетворяют условиям Липшица вида

$$|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leq L\|\varphi - \psi\|, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01067, № 99-01-01005.

где L – константа, $(t, \varphi), (t, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$;

$$|G(t_2, \varphi) - G(t_1, \psi)| \leq N|t_2 - t_1| + \lambda\|\varphi - \psi\|, \quad (1.3)$$

где $(t_1, \varphi), (t_2, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$, N, λ – константы, $0 < \lambda < 1$.

Тогда согласно теоремам 12.2.1–12.2.3 из [7] имеет место следующая теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных условий.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что выполнены условия (1.2) и (1.3). Тогда для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$ существует единственное решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$, начинающееся в этой точке $x_\alpha = x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$, определенное при $t \in [\alpha - h, \alpha + A)$, $A = A(\alpha, \varphi) > 0$, и непрерывно зависящее от (α, φ) .*

2. Допустим, что функции $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$ удовлетворяют следующим предположениям.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.1. *Функция $F(t, \varphi)$ удовлетворяет условию: для каждого числа τ , $0 < \tau < H$, существует число $M(\tau)$ такое, что $|F(t, \varphi)| < M$, где $t \in [0, +\infty)$, $\varphi \in C_\tau$.*

ЛЕММА 2.1. *Если $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение (1.1), определенное для любого $t \geq \alpha - h$, и $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ для любого $t \in [\alpha - h, +\infty)$, то семейство функций $\{x_t(\alpha, \varphi) : t \geq \alpha\}$ предкомпактно в C_r .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (1.1), следует

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\alpha) - G(\alpha, \varphi) + G(t, x_t) + \int_\alpha^t F(s, x_s) ds, \quad t > \alpha, \\ x(s) &= \varphi(s), \quad \alpha - h \leq s \leq \alpha. \end{aligned}$$

В силу (1.3) и ограниченности $F(t, \varphi)$ на $\mathbb{R}^+ \times C_r$ для $\Delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |x(t + \Delta) - x(t)| &= \left| G(t + \Delta, x_{t+\Delta}) - G(t, x_t) + \int_t^{t+\Delta} F(s, x_s) ds \right| \\ &\leq \lambda\|x_{t+\Delta} - x_t\| + (M_r + N)\Delta. \end{aligned}$$

Полагая $\rho = \sup_{\alpha \leq t} |x(t + \Delta) - x(t)|$, получаем

$$\rho \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} \max_{\alpha - h \leq s \leq \alpha} |x(t + \Delta) - \varphi(s)| + \frac{M_r + N}{1 - \lambda} \Delta,$$

что и доказывает лемму.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.2. *Функция $F(t, \varphi)$ равномерно непрерывна, а функция $G(t, \varphi)$ ограничена на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, где $K \subset C_H$ – произвольное компактное множество из C_H , так что $\forall K \subset C_H, \forall \varepsilon > 0 \exists m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, так что $\forall (t, \varphi), (t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^+ \times K, |t_2 - t_1| \leq \delta, \|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq \delta$ имеют место соотношения*

$$|F(t_2, \varphi_2) - F(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon, \quad |G(t, \varphi)| \leq m. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.2. При предположениях 2.1, 2.2 и условии (1.3) семейство сдвигов $\{F^\tau(t, \varphi) = F(t+\tau, \varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$ и семейство сдвигов $\{G^\tau(t, \varphi) = G(t+\tau, \varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны на $\mathbb{R}^+ \times K$, где K – произвольный компакт из C_H .

Введем следующее определение, являющееся видоизменением определений из [1]–[3], считая, что функции F и G удовлетворяют условиям (1.2), (1.3) и предположениям 2.1 и 2.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Компактной оболочкой $H^+(F, G)$ функций $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$, определенных на $\mathbb{R}^+ \times C_H$, называется множество совокупностей (F^*, G^*, Λ) , где $F^*, G^* \in C(\Lambda, \mathbb{R}^n)$, $\Lambda = \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1$, $\Lambda_1 \subset C_H$, таких, что существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, для которой $\{F(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t, \varphi)$, а $\{G(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t, \varphi)$ на каждом множестве $[0, n] \times K$, где $n = 1, 2, \dots, K$ – компакт из Λ_1 .

Функции $F^*, G^*: \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются предельными к функциям F, G .

Для каждой $(F^*, G^*, \Lambda) \in H^+(F, G)$ определим предельное уравнение

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t). \quad (2.2)$$

Из определения функций F^* и G^* вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2.3. Если выполняются условия (1.2) и (1.3), то каждая предельная функция $F^*(t, \varphi)$ удовлетворяет (1.2), а $G^*(t, \varphi)$ – (1.3) относительно Λ .

Из этой леммы следует, что решение $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.2) для каждого начального условия $(\alpha, \varphi) \in \Lambda$ существует, непрерывно зависит от начальных данных и является единственным.

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (1.1), определенное для всех $t \geq \alpha - h$, $x_t^{(n)}(\alpha, \varphi) = x(t_n + s, \alpha, \varphi)$ ($-h \leq s \leq 0$). Положительное предельное множество $\Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ в пространстве C_H есть множество $\Omega^+ = \{\psi \in C_H : \exists t_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty, x_t^{(n)}(\alpha, \varphi) \rightarrow \psi \text{ при } n \rightarrow \infty\}$ [7, с. 101].

Взаимосвязь решений (1.1) и (2.2) определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение (1.1), определенное для любого $t \geq \alpha - h$, и $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq \tau < H$. Тогда положительное предельное множество этого решения квазиинвариантно к семейству предельных уравнений (2.2), а именно: для каждого элемента $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ существует $(F^*, G^*, \Lambda) \in H^+(F, G)$ и уравнение

$$\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t, y_t)] = F^*(t, y_t)$$

такое, что для решения этого уравнения $y(t, 0, \psi)$ выполняется соотношение $\{y_t(0, \psi) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_n \rightarrow +\infty$ есть последовательность, для которой $x_{t_n}(\alpha, \varphi) \rightarrow \psi$ при $n \rightarrow +\infty$. Фиксируем $L > 0$. Рассмотрим $x(t + t_n)$ при $t \in [0, L]$. Из леммы 2.1 семейство $\{x^n(t)\}$ равномерно непрерывно, а по условию теоремы оно также равномерно ограничено. Из теоремы Арцела существуют подпоследовательность $t_m \rightarrow +\infty$

и функция $y(t): [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$, так что $\{x^m(t)\}$ сходится к $y(t)$ для $t \in [0, L]$. Из (1.1) следует, что

$$x(t + t_m) = x(t_m) - G(t_m, x_{t_m}) + G(t + t_m, x_{t+t_m}) + \int_0^t F(s + t_m, x_{s+t_m}) ds. \quad (2.3)$$

Из леммы 2.1 имеем компакт $K \subset C_H$ такой, что $x_t(\alpha, \varphi) \in K$ для $t \geq \alpha$. Из леммы 2.2 и обобщенной теоремы Арцела, используя диагональный процесс, получаем, что существует подпоследовательность t_{mk} и функции $F^*(t, \varphi), G^*(t, \varphi): \mathbb{R}^+ \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F^*, G^* \in H^+(F, G)$, такие, что $F(t + t_{mk}, \varphi)$ сходится к $F^*(t, \varphi)$, $G(t + t_{mk}, \varphi)$ сходится к $G^*(t, \varphi)$ равномерно на каждом компакте из $\mathbb{R}^+ \times K$. Следовательно, $G(t + t_{mk}, x_{t+t_{mk}}) \rightarrow G^*(t, y_t(t))$, $F(t + t_{mk}, x_{t+t_{mk}}) \rightarrow F^*(t, y_t(t))$ равномерно при $0 \leq t \leq L$; $G(t_{mk}, x_{t_{mk}}) \rightarrow G^*(0, \psi)$. Устремляя в (2.3) $m \rightarrow \infty$ получаем, что функция $y(t) = y(t, 0, \psi)$ есть решение уравнения

$$\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t, y_t)] = F^*(t, y_t)$$

на отрезке $[-h, L]$. Последовательно полагаем $L = 1, 2, \dots$ и, используя диагональный процесс, получаем, что решение $y(t, 0, \psi)$ уравнения (2.2) определено для всех $t \geq -h$ и $y_t(0, \psi) \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Областью определения уравнения (2.2) по построению можно принять область $\mathbb{R} \times \Lambda_1$, где $\Lambda_1 \subset C_H$. Решение $y(t, 0, \psi)$ в теореме 3.1 также по построению продолжимо для всех $t \in \mathbb{R}$, при этом $\{y_t(0, \psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$.

3. Рассмотрим задачу о локализации положительного предельного множества на основе функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную.

Обозначим через $Z(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t)$ ядро уравнения (1.1).

Пусть $V(t, x_t, Z(t, x_t)): \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов для всех $x_t \in C_H$ и $t \in \mathbb{R}^+$ и такой, что его производная dV/dt в силу системы (1.1) существует. Под dV/dt понимается верхняя правосторонняя производная функционала $V = V(t, x_t, Z(t, x_t))$ вдоль решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ в точке (t_1, x_{t_1}) [6]:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(t_1, x_{t_1})} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (V(t_1 + h, x_{t_1+h}, Z(t_1 + h, x_{t_1+h})) - V(t_1, x_{t_1}, Z(t_1, x_{t_1}))).$$

Допустим, что для производной dV/dt имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H,$$

где функция $W = W(t, \varphi)$ ограничена, равномерно непрерывна на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такие, что имеют место неравенства

$$W(t, \varphi) \leq m, \quad |W(t_2, \varphi_2) - W(t_1, \varphi_1)| \leq \varepsilon \quad (3.1)$$

для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K$; $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^+ \times K$: $|t_2 - t_1| \leq \delta, \|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq \delta$.

Введем следующее определение, аналогичное определению 2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Компактной оболочкой $H^+(F, G, W, \Lambda)$ функций $F(t, \varphi)$, $G(t, \varphi)$ и $W(t, \varphi)$, определенных на $\mathbb{R}^+ \times C_H$, называется множество предельных совокупностей (F^*, G^*, W^*, Λ) , где $F^*, G^*, W^* \in C(\Lambda, \mathbb{R}^n)$, $\Lambda = \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1$, $\Lambda_1 \subset C_H$, таких, что существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, для которой $\{F^n(t, \varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t, \varphi)$, $\{G^n(t, \varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t, \varphi)$, $\{W^n\}$ — к $W^*(t, \varphi)$ на каждом множестве $[0, n] \times K$, где $n = 1, 2, \dots$, K — компакт из Λ_1 .

Теорема 2.1 позволяет получить следующий результат о локализации положительного предельного множества $\Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

- 1) $V(t, x_t, Z(t, x_t)): \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset C_H$, т.е. $V(t, \varphi) \geq m(K) \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K$, причем существует dV/dt в силу системы (1.1);
- 2) $\frac{dV}{dt} \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$;
- 3) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — решение (1.1) такое, что $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq \tau < H \quad \forall t \geq \alpha - h$, где $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$.

Тогда для любой $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ существует предельная совокупность $(F^*, G^*, W^*, \Lambda) \in H^+(F, G, W)$ такая, что для решения $y(t, 0, \psi)$ уравнения

$$\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t, y_t)] = F^*(t, y_t)$$

выполняются соотношения $\{y_t(0, \psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ и $\{y_t(0, \psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \{W^*(t, \varphi) = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$. По определению это означает, что существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{t_n}(\alpha, \varphi) = \psi.$$

Согласно теореме 2.1 для ψ существует $(F^*, G^*, \Lambda) \in H^+(F, G)$ и уравнение

$$\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t, y_t)] = F^*(t, y_t)$$

такое, что для решения этого уравнения $y(t, 0, \psi)$ выполняется $\{y_t(0, \psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$. Так как $\{x_t(\alpha, \varphi), t \geq \alpha\} \subset K$ — компакт из C_H , мы можем найти подпоследовательность (примем, что она совпадает с подпоследовательностью, определяющей (F^*, G^*, Λ)) $t_{n_k} \rightarrow +\infty$, которая определяет $W^*(t, \varphi)$.

В силу условий теоремы функционал $V(t) = V(t, x_t, Z(t, x_t))$ определен для всех $t \geq \alpha$ и является монотонно убывающим и ограниченным снизу, значит $\exists c_0 = \text{const}$ такая, что

$$\lim_{t_{n_k} \rightarrow +\infty} V(t_{n_k} + t) = c_0.$$

Из оценки для производной $\dot{V}$ имеем

$$V(t_{n_k} + t) - V(t_{n_k} - t) \leq - \int_{t_{n_k} - t}^{t_{n_k} + t} W(s, x_s(\alpha, \varphi)) ds = - \int_{-t}^t W(s + t_{n_k}, x_{t_{n_k} + s}) ds \leq 0.$$

Переходим к пределу при $n_k \rightarrow \infty$ и получаем, что $\{y_t(0, \psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \{W^*(t, \varphi) = 0\}$. Теорема доказана.

4. Допустим, что $G(t, 0) \equiv 0$ и $F(t, 0) \equiv 0$. Тогда (1.1) имеет нулевое решение, отвечающее начальной функции $\varphi(s) \equiv 0$.

Обозначим через $\omega_i(u)$, $\omega_i: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывные строго возрастающие функции такие, что $\omega_i(0) = 0$, $\omega_i(u) > 0$ при $u > 0$, $i = 1, 2$ [7, с. 132].

На основании теоремы 3.1 можно получить следующие теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения (1.1).

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что*

- 1) *существует непрерывный функционал $V(t, x_t, Z(t, x_t)): \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}$, производная которого в силу системы (1.1) существует, при этом*

$$\omega_1(|Z(t, x_t)|) \leq V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega_2(\|x_t\|), \quad \frac{dV}{dt} \leq -W(t, \varphi) \leq 0;$$

- 2) *существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что для любой предельной совокупности (F^*, G^*, W^*, Λ) , которая соответствует этой последовательности, множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержит из всех решений уравнения (2.2) только тривиальное $y = 0$.*

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 1) теоремы имеем равномерную устойчивость решения $x = 0$ уравнения (1.1) (см. [6]).

Возьмем число δ из условия равномерной устойчивости. Покажем, что область $\Lambda_1 = \{\varphi : \|\varphi\| \leq \delta\}$ лежит в области притяжения решения $x = 0$. Предположим, что это не так. Тогда существуют $\alpha \in \mathbb{R}^+$, некоторое $\gamma > 0$, $\varphi: \|\varphi\| < \delta$ и последовательность $t_m \rightarrow +\infty$ такие, что $\|x(t_m, \alpha, \varphi)\| \geq \gamma$.

Выберем $\delta_1 = \delta_1(\gamma/2)$ из свойства равномерной устойчивости решения $x = 0$ (1.1). Тогда $\|x_t(\alpha, \varphi)\| > \delta_1(\gamma/2) \quad \forall t \geq 0$. Возьмем последовательность t_n из условия 2) теоремы. Тогда $x(t + t_n, \alpha, \varphi) \rightarrow y(t, 0, \psi)$ равномерно по $t \in [0, T]$, где $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t_n}$, $y(t, 0, \psi)$ есть решение предельного уравнения, образованного F^*, G^* . В силу $\|x_t(\alpha, \varphi)\| > \delta_1 \quad \forall t \geq 0$ имеем

$$\|y_t(0, \psi)\| \geq \delta_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.1)$$

В силу теоремы 3.1 $\{y_t(0, \psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \{W^*(t, \varphi) = 0\}$. Но в силу условия 2) теоремы имеем, что $y(t, 0, \psi) = 0, t \geq 0, \psi \in \Lambda_1$. Полученное противоречие с неравенством (4.1) доказывает теорему. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что*

- 1) *существует непрерывный функционал $V(t, \varphi, Z(t, \varphi))$ такой, что $V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega(\|x_t\|)$, причем область $V > 0$ имеет открытое сечение, граница которого содержит элемент $\varphi(s) \equiv 0$, и производная $\dot{V}$ вдоль решения (1.1) удовлетворяет условию*

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[V(t + \Delta t) - V(t)]}{\Delta t} \geq W(t, \varphi) \geq 0$$

при $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$;

- 2) *существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что для любой предельной совокупности $(F^*, G^*, W^*, \Lambda) \in H^+(F, G, W)$, которая соответствует этой последовательности, множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержит из всех решений уравнения (2.2) только $y = 0$.*

Тогда решение уравнения (1.1) $x = 0$ неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 1) теоремы для произвольного $\alpha > 0$ и достаточно малого $\delta > 0$ имеем существование $\varphi_0(s)$ такой, что при $\|\varphi_0(s)\| \leq \delta$ $V(\alpha, \varphi_0, Z(\alpha, \varphi_0)) = \gamma > 0$.

Предположим, что решение $x = x(t, \alpha, \varphi_0)$ ограничено, т.е. $\|x(t, \alpha, \varphi_0)\| \leq \tau < h$. Тогда из свойства $V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega(\|x_t(s)\|)$ имеем

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} V(t + t_n) = c_0,$$

где t_n – последовательность из условия 2) теоремы. Кроме того, из $\dot{V} \geq 0$ следует, что $V \geq V(\alpha, \varphi_0, Z(\alpha, \varphi_0)) > 0$. Значит, $\|x_t(t, \alpha, \varphi_0)\| \geq l_0 \quad \forall t \geq \alpha$.

Из оценки для производной получаем

$$V(t + t_n) - V(t_n) \geq \int_0^t W(s + t_n, x_{s+t_n}(\alpha, \varphi_0)) ds \geq 0.$$

Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\{W^*(t, y_t(0, \psi)) = 0\}$, где $y(t, 0, \psi)$ есть решение предельного уравнения (2.2) такое, что $\|y_t(0, \psi)\| \geq l_0$, что противоречит условию 2) теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (см. [7, с. 337]). Ядро уравнения (1.1) $Z(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t)$ называется *устойчивым*, если нулевое решение разностного уравнения

$$Z(t, x_t) = 0, \quad t \geq 0, \quad y_0 = \psi \in C_Z, \quad C_Z = \{\varphi \in C_H : Z(t, \varphi) = 0\},$$

равномерно асимптотически устойчиво.

Известно [6], что, например, ядро $y(t) - g(t, y(t - h))$, где $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, будет устойчивым, если $g(t, y(t - h))$ удовлетворяет условию (1.3).

Используя определение устойчивого ядра, аналогично предыдущему могут быть получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что*

- 1) выполняется условие 1) теоремы 4.1;
- 2) существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что для каждой предельной совокупности (F^*, G^*, W^*, Λ) , которая соответствует t_n , множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержит из всех решений предельного уравнения, образованного F^*, G^*, Λ , только те, на которых $Z^*(t, y_t) = y(t) - G^*(t, y_t) = 0$, причем $Z^*(t, y_t)$ устойчиво.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) асимптотически устойчиво.

ТЕОРЕМА 4.4. *Предположим, что*

- 1) выполняется условие 1) теоремы 4.2;
- 2) выполняется условие 2) теоремы 4.3.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) неустойчиво.

ТЕОРЕМА 4.5. *Предположим, что*

- 1) *в уравнении (1.1) $G(t, \varphi)$ линейно по φ , а ядро $Z(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t)$ устойчиво;*
- 2) *выполняется условие 1) теоремы 4.1;*
- 3) *для каждой предельной совокупности (F^*, G^*, W^*, Λ) множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержит из всех решений предельного уравнения*

$$\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t, y_t)] = F^*(t, y_t)$$

только тривиальное $y = 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теоремы 4.1–4.5 являются развитием и обобщением результатов для автономного уравнения из [7], а для неавтономного уравнения нейтрального типа из [6] дают то, что знакоопределенность производной функционала Ляпунова по ядру $Z(t, \varphi)$ заменяется условием знакопостоянства производной.

5. ПРИМЕР. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x_1(t) - G_1(t, x(t-h))] &= x_2(t) - G_2(t, x(t-h)), \\ \frac{d}{dt}[x_2(t) - G_2(t, x(t-h))] &= -a(t, x(t-h))[x_2(t) - G_2(t, x(t-h))] \\ &\quad - b(t)f(x_1(t) - G_1(t, x(t-h))), \\ 0 \leq h &= \text{const}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Допустим, что функция $G = (G_1, G_2)$ удовлетворяет условию (1.3); функция a удовлетворяет условию (1.2); функции f, b, G_1, G_2, a ограничены и равномерно непрерывны. Тогда уравнения, предельные к (5.1), имеют аналогичный вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[y_1(t) - G_1^*(t, y(t-h))] &= y_2(t) - G_2^*(t, y(t-h)), \\ \frac{d}{dt}[y_2(t) - G_2^*(t, y(t-h))] &= -a^*(t, y(t-h))[y_2(t) - G_2^*(t, y(t-h))] \\ &\quad - b^*(t)f(y_1(t) - G_1^*(t, y(t-h))), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где функции $G_i^*(t, y(t-h)), i = 1, 2, a^*(t, y(t-h)), b^*(t)$ есть предельные соответственно к G_i, a, b ; например, для некоторой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ функция $G_1^*(t, y)$ определяется из соотношения

$$G_1^*(t, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_1(t + t_n, y).$$

Исследуем свойства устойчивости решения $x = 0$ системы (5.1) в зависимости от следующих условий.

Предположим, что для всех $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^2$ выполняются неравенства $f(x_1)x_1 > 0$ ($|x_1| > 0$), $a(t, x(t-h)) \geq c > 0, b(t) \in C^1: b(t) \geq b > 0$, c и b – некоторые постоянные.

а) Допустим, что

$$\frac{\dot{b}(t)}{2b^2(t)} + \frac{a(t, x(t-h))}{b(t)} \geq k_0 > 0, \quad k_0 = \text{const}.$$

Введем функционал

$$V = \frac{(Z_2)^2}{2b(t)} + b(t) \int_0^{Z_1} f(u) du,$$

где $Z_i = x_i(t) - G_i(t, x(t-h))$.

Его производная $\dot{V} = -k_0 Z_2^2 \leq 0$. Если $W(t, x(t-h)) = k_0 Z_2^2(t, x(t-h))$, то $W^*(t, y(t-h)) = k_0 Z_2^{*2}(t, y(t-h))$. Очевидно, что множество $\{W^*(t, y) = 0\}$ содержит из всех решений предельной системы (5.2) только те, на которых $Z^* = y(t) - G^*(t, y(t-h)) = 0$. Применяя теорему 4.3, получаем асимптотическую устойчивость нулевого решения (5.1). Если функция $G(t, x(t-h))$ линейна по второму аргументу, то по теореме 4.5 получаем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения (5.1).

б) Если

$$\frac{2ab(t) + \dot{b}(t)}{2b^2(t)} \leq k_1 < 0, \quad k_1 = \text{const},$$

то, применяя теорему 4.4, получаем неустойчивость нулевого решения системы (5.1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hale J. K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funkcial. Ekvac. 1978. V. 21. P. 11–41.
- [2] Murakami S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differ. Equat. 1985. V. 59. P. 314–335.
- [3] Мартынюк А. А., Като Д., Шестаков А. А. Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
- [4] Андреев А. С., Хусанов Д. Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 7. С. 876–885.
- [5] Андреев А. С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Ульяновск: Филиал МГУ, 1994.
- [6] Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
- [7] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

Ульяновский государственный университет

Поступило

19.03.1997

Исправленный вариант

22.09.1999