Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Зотьев, О симплектической геометрии многообразий с почти всюду невырожденной замкнутой 2-формой, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 66–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 09:09:39

УДК 514.74

О СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ С ПОЧТИ ВСЮДУ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЗАМКНУТОЙ 2-ФОРМОЙ

Д. Б. Зотьев

Изучены локальные геометрические свойства многообразий с замкнутой 2-формой, невырожденной в точках всюду плотного собственного подмножества. Введено естественное понятие правильной особой точки, в которой вырождение матрицы формы происходит некоторым регулярным образом. В правильных особых точках найдено условие гладкого продолжения гамильтоновой динамической системы, обобщена теорема Дарбу о локальном приведении матрицы формы к каноническому виду, исследовано сингулярное поведение косых градиентов.

Библиография: 5 названий.

Рассмотрим $(2n + 2m)$ -мерное симплектическое многообразие (N, ω) и в нем подмногообразие $M = f^{-1}(b)$, отвечающее некоторому регулярному значению $b \in \mathbb{R}^{2m}$ гладкого отображения $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$. Если матрица попарных скобок Пуассона координатных функций f_α , $1 \leq \alpha \leq 2m$, невырождена на всюду плотном в M подмножестве S , не включающем M , то пара $(M, \omega|_M)$ не является симплектическим многообразием, поскольку замкнутая 2-форма $\omega|_M$ вырождается в точках непустого подмножества $\Theta = M \setminus S$. По теореме Э. Картана [1]

$$\dim \text{Ker}(\omega|_M) = 2m - \text{rk}(\{f_\alpha, f_\beta\}_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2m});$$

следовательно, Θ состоит из всех точек, в которых $\det(\{f_\alpha, f_\beta\}) = 0$. Если на M задана гладкая функция f , то в каждой точке p открытого всюду плотного множества $M \setminus \Theta$ определен вектор $I df_p$ (называемый *косым градиентом* [1]) такой, что $\omega(v, I df_p) = v(f)$ для каждого вектора $v \in T_p M$. Кроме того, для произвольной гладкой функции g на множестве $M \setminus \Theta$ определена скобка Пуассона $\{f, g\} = I df(g)$, также являющаяся гладкой функцией. Однако в точках подмножества Θ , называемых особыми, скобки Пуассона и гамильтоновы векторные поля, вообще говоря, не определены. Таким образом, симплектическая геометрия M имеет особенности, которые интересно изучить, поскольку в физических задачах встречаются динамические системы на многообразиях с замкнутой 2-формой ω , являющиеся гамильтоновыми на открытых всюду плотных подмножествах $\{\det(\omega) \neq 0\}$. Например, они могут возникать при понижении порядка гамильтоновых систем. Таков интегрируемый случай движения тяжелого магнита в гравитационном и магнитном полях, который О. И. Богоявленский нашел при нулевом значении интеграла типа С. В. Ковалевской [2]. Данный случай был исследован в [3] с точки зрения теории топологической классификации интегрируемых систем [4]. Его динамика происходит на 4-мерном многообразии с особенностью формы, и особые точки организованы в 3-мерное гладкое подмногообразие.

В данной работе исследовано предельное поведение гамильтоновых векторных полей (теоремы 1, 2) в особых точках, удовлетворяющих естественному условию правильности. В случае, когда все особые точки правильные, найдено условие гладкого продолжения фазового потока, являющегося гамильтоновым на множестве неособых точек (теорема 1). На основе этого результата получено обобщение теоремы Дарбу [1], [5] о локальном приведении матрицы формы к каноническому виду (теорема 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если на гладком $(2n)$ -мерном многообразии M задана замкнутая 2-форма ω , невырожденная в каждой точке из всюду плотного собственного подмногообразия, то пара (M, ω) называется *симплектическим многообразием с особенностью формы*. Каждая точка $x \in M$, в которой $\text{rk}(\omega_x) < \dim(M)$, называется *особой*.

Линейная оболочка множества векторов A обозначается $\mathcal{L}(A)$. В дальнейшем M^{2n} или M – симплектическое многообразие с особенностью формы, Θ – множество особых точек, Z_p – ядро формы в точке $p \in \Theta$, т.е. $Z_p = \text{Ker}(\omega_p)$. Заметим, что Z_p всегда имеет четную размерность. Если $\omega(u, v) = 0$, то векторы u и v называются *косоортогональными*. Если на M задана гладкая функция f , то $I df$ – векторное поле на симплектическом многообразии $M \setminus \Theta$. В особых точках косые градиенты, а также скобки Пуассона, вообще говоря, не определены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть f – гладкая функция на M и p – особая точка. Если для некоторой последовательности точек $p_n \notin \Theta$, сходящейся к p ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I df_{p_n} = w \in T_p M,$$

то вектор w называется *предельным положением $I df$ в точке p* .

Если для некоторой последовательности точек $p_n \notin \Theta$, сходящейся к p ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I df_{p_n}) = l \neq 0, \quad l \subset T_p M,$$

то прямая l называется *предельным направлением $I df$ в точке p* .

Если при этом $|I df_{p_n}| \rightarrow +\infty$, то прямая l называется *несобственным предельным направлением $I df$ в точке p* .

ЛЕММА 1. Пусть $p \in M^{2n}$ – точка на гиперповерхности $P^{2n-1} \subset \Theta$. Тогда если Z_p трансверсально $T_p P^{2n-1}$, а также $\dim Z_q = \text{const}$ в точках $q \in P^{2n-1}$, достаточно близких к p , то в малой окрестности $U(p)$ существует гладкое интегрируемое распределение $\mathcal{Z}$ такое, что $\mathcal{Z}(q) = Z_q$ для всех $q \in P^{2n-1} \cap U(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = P^{2n-1}$. Сначала докажем, что интегрируемым является гладкое распределение $\zeta: q \mapsto Z_q \cap T_q P$, определенное на подмногообразии $P \cap O(p)$, где $O(p)$ – достаточно малая окрестность p . Предположим, что векторные поля u и v на $P \cap O(p)$ таковы, что $u_q \in Z_q$ и $v_q \in Z_q$ для всех q . Достаточно доказать, что $[u, v]_q \in Z_q$ для всех q . Так как

$$L_u(\omega|_P) = i_u(d\omega|_P) + d(i_u(\omega|_P)) = 0,$$

то

$$i_{[u, v]}(\omega|_P) = L_u(i_v(\omega|_P)) - i_v(L_u(\omega|_P)) = 0,$$

где L – производная Ли. Итак, вектор $[u, v]_q$ косоортогонален $T_q P$, а так как по условию $Z_q + T_q P = T_q M$, то этот вектор косоортогонален $T_q M$; следовательно, $[u, v]_q \in Z_q \cap T_q P$.

Фиксируем на гиперповерхности P гладкое трансверсальное поле z , так что $z_q \in Z_q$ при каждом q . Тогда интегральные подмногообразия ζ в фазовом потоке z замечают интегральные подмногообразия искомого распределения $\mathcal{Z}$. Лемма доказана.

Следующие два примера показывают, что условие трансверсальности ядра Z_p с поверхностью Θ является существенным для интегрируемости распределения ζ . В случае, если все Z_p касаются Θ , ничего определенного об интегрируемости распределения $\zeta: \Theta \ni q \mapsto Z_q$ сказать нельзя.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функции $f_1(u, v) = u_1 v_1 + u_3$ и $f_2(u, v) = u_2 + v_1^2$, где $(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$. Уравнение $f_1(u, v) = f_2(u, v) = 0$ определяет 4-мерное подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^6$. Пусть $\omega = (du \wedge dv)|_M$; тогда (M, ω) – симплектическое многообразие с особенностью формы, при этом

$$\Theta = \{(u, v) \in M : v_1 = 0\}, \quad \text{Ker}(\omega_{(u, v)}) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial v_2}, \frac{\partial}{\partial v_3} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1}\right).$$

Ядро формы (размерности 2) касается гиперповерхности Θ в каждой точке, и распределение ζ интегрируемо.

ПРИМЕР 2. Пусть $M = \mathbb{R}^4$ и $\omega = x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4$; тогда

$$\Theta = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0\}, \quad \text{Ker}(\omega_x) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}\right).$$

Ядро формы (размерности 2) касается гиперповерхности Θ в каждой точке, и распределение ζ неинтегрируемо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Особая точка $p \in M$ называется *правильной*, если

- 1) существует окрестность $U(p)$ такая, что $\Theta \cap U(p)$ – гладкая гиперповерхность;
- 2) для всех $q \in \Theta$, достаточно близких к p , имеет место $\dim Z_q = \dim Z_p = 2k$;
- 3) ядро Z_p трансверсально $T_p \Theta$;
- 4) в некоторых (и тогда в любых) локальных координатах x найдется частная производная пфаффиана $\text{pf}(\omega_x)$ порядка $2k - 1$, отличная от нуля в точке $x(p)$.

Напомним, что $\text{pf}(\omega)$ – это многочлен с целыми коэффициентами от элементов кососимметрической матрицы ω такой, что $\det(\omega) = \text{pf}(\omega)^2$. Очевидно, что множество правильных особых точек открыто в Θ . В примере 1 $\text{pf}(\omega_x) = x_2$ и не выполняется условие 3), а в примере 2 $\text{pf}(\omega_{(u, v)}) = 2v_1^2$ и не выполняются условия 3), 4).

Если $\dim Z_p = 2$, то условие правильности точки p выглядит так: $Z_p \not\subset T_p \Theta$ и в некоторых (и тогда в любых) локальных координатах x точка $x(p)$ не является критической для функции $\text{pf}(\omega_x)$. В случае, когда M является подмногообразием совместного регулярного уровня гладких функций f_1 и f_2 , заданных на симплектическом многообразии N , имеем $\Theta = f^{-1}(0)$, где $f = \{f_1, f_2\}|_M$. В этом случае точка $p \in \Theta$ является правильной тогда и только тогда, когда $d\{f_1, f_2\}(T_p M) \neq 0$, и хотя бы одно из чисел $\{f_1, \{f_1, f_2\}\}_p$ и $\{f_2, \{f_1, f_2\}\}_p$ отлично от нуля (скобка Пуассона вычисляется в N).

ПРИМЕР 3. Применяя последний критерий к случаю Богоявленского [2], [3] получим, что все его особые точки являются правильными.

ЛЕММА 2. Пусть $p \in M^{2n}$ – особая точка и $\dim Z_p = 2k$. Если в точке p выполнены условия 1)–3) определения 3, то в некоторой окрестности $U(p)$ существуют локальные координаты $x = (x_1, \dots, x_{2n})$ такие, что

- а) гиперповерхность $\Theta \cap U(p)$ задается уравнением $x_1 = 0$;
- б) если $2 \leq r, s \leq 2n$, $1 \leq \alpha \leq 2k$, $1 \leq i \leq 2n$, то

$$\omega_{\alpha, i}(x) = \frac{\partial \omega_{rs}}{\partial x_{\alpha}}(x) = 0 \quad \text{в каждой точке } x = (0, x_2, \dots, x_{2n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что в окрестности p существуют локальные координаты $x_2, \dots, x_{2n}$ многообразия Θ , в которых $(2k - 1)$ -мерные координатные поверхности $x_2, \dots, x_{2k}$ есть интегральные подмногообразия распределения ζ . Очевидно, найдется векторное поле v , трансверсальное Θ такое, что $v_q \in Z_q$ для всех $q \in \Theta \cap U(p)$. Пусть $\gamma(t)$ – интегральная траектория v . Если $\gamma(0) = (x_2, \dots, x_{2n})$ и $\gamma(x_1) = q$, то набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ задает искомые координаты точки q . При $x_1 = 0$ равенства $\partial \omega_{rs} / \partial x_{\alpha} = 0$ следуют из замкнутости формы и равенств $\omega_{\alpha, i}(x) = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $p \in M$ – особая точка и $\dim Z_p = 2k$. Предположим, что в точке p выполнены условия 1)–3) определения 3. Тогда в произвольных локальных координатах x все частные производные пфаффиана $\text{pf}(\omega_x)$ порядка от 0 до $2k - 2$ включительно равны нулю в точке $x(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной кососимметрической матрицы ω_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2n$:

$$\text{pf}(\omega) = \sum_{\substack{\sigma = (i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) \in S_{2n} \\ i_s < j_s, i_s < i_{s+1}}} \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_n j_n},$$

где S_{2n} – множество перестановок набора $\{1, \dots, 2n\}$. Координаты $x_1, \dots, x_{2n}$ выберем согласно лемме 2. Функция $\text{pf}(\omega_x)$ состоит из слагаемых вида

$$\omega_{1, j_1} \omega_{i_2, j_2} \cdots \omega_{i_t, j_t} \omega_{i_{t+1}, j_{t+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}, \quad \text{где } i_t \leq 2k, \quad i_{t+1} > 2k. \quad (1)$$

Из леммы 2 следует, что при $x_1 = 0$ все элементы $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ вместе с частными производными 1-го порядка, а также элемент ω_{1, j_1} равны нулю. Если при этом не равно нулю некоторое слагаемое частной производной порядка s от выражения (1), то это слагаемое с необходимостью содержит множитель

$$\frac{\partial \omega_{1, j_1}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \omega_{i_2, j_2}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega_{i_3, j_3}}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 \omega_{i_t, j_t}}{\partial x_1^2}.$$

Если $s \leq 2k - 2$, то $2t - 1 \leq 2k - 2$ и $t < k$. Тогда в выражении (1) найдется не меньше, чем $n - k + 1$ сомножителей, у которых $i_s, j_s > 2k$. Следовательно, найдется не меньше, чем $2(n - k + 1)$ различных чисел в промежутке от $2k + 1$ до $2n$, что невозможно. Итак, $s > 2k - 2$. Следовательно, каждая производная от $\text{pf}(\omega_x)$ порядка $s \leq 2k - 2$ равна нулю при $x_1 = 0$. Однако производная порядка $2k - 1$ может быть отличной от нуля, и тогда это $\partial^{2k-1} \text{pf}(\omega_x) / \partial x_1^{2k-1}$, которая равна

$$\sum_{\substack{\sigma = (1, j_1, \dots, i_n, j_n) \in S_{2n} \\ i_s < j_s, i_s < i_{s+1} \\ i_k \leq 2k, i_{k+1} > 2k}} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial \omega_{1, j_1}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \omega_{i_2, j_2}}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}. \quad (2)$$

Если $J(y)$ – определитель матрицы Якоби замены координат x на y , то $\text{pf}(\omega_x) = \pm \text{pf}(\omega_y)J(y)$. Следовательно, все частные производные $\text{pf}(\omega_y)$ порядка от 0 до $2k - 2$ равны нулю в точке $y(p)$. Лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что если p – правильная особая точка, в которой $\dim Z_p = 2k$, и координаты x выбраны согласно лемме 2, то все частные производные пфаффиана $\text{pf}(\omega_x)$ порядка от 0 до $2k - 1$ включительно равны нулю в точке $x(p)$, кроме, возможно, $\partial^{2k-1} \text{pf}(\omega_x)/\partial x_1^{2k-1}$. Из доказательства леммы 3 следует пример, проясняющий понятие правильной особой точки.

ПРИМЕР 4. Пусть в координатах $(x_1, \dots, x_{2k}, p_1, \dots, p_{n-k}, q_1, \dots, q_{n-k})$

$$\Omega(x, p, q) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2k} \omega_{ij}(x_1, \dots, x_{2k}) dx_i \wedge dx_j + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i.$$

Предположим, что Θ – гладкая гиперповерхность, а вырождение формы $\Omega(x, p, q)$ происходит только при обращении в нуль матрицы $\omega(x)$. Ясно, что Θ представляет собой цилиндр $N^{2k-1} \times \mathbb{R}^{2n-2k}$, где N^{2k-1} – гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^{2k}(x_1, \dots, x_{2k})$. Можно считать, что Θ задается уравнением $x_1 = 0$. При $x_1 = 0$ ядро формы Ω есть линейная оболочка векторов $\partial/\partial x_i$, $1 \leq i \leq 2k$. Очевидно, что ядро трансверсально цилиндру Θ . Таким образом, особые точки удовлетворяют условиям 1)–3) определения 3. Условие 4) определения 3 эквивалентно невырожденности матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_{1,3}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_{1,2k}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial^2 \omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \omega_{2,2k}}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial \omega_{1,3}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & 0 & \dots & \frac{\partial^2 \omega_{3,2k}}{\partial x_1^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial \omega_{1,2k}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,2k}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 \omega_{3,2k}}{\partial x_1^2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

пфаффиан которой совпадает с $\partial^{2k-1} \text{pf}(\Omega_{(x,p,q)})/\partial x_1^{2k-1}$ при $x_1 = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – гладкая функция на симплектическом многообразии с особенностью формы M^{2n} . Для того, чтобы гамильтонова система $I df$, заданная на $M^{2n} \setminus \Theta$, имела гладкое продолжение на M^{2n} необходимо, а если все особые точки правильные, то и достаточно условие:

$$df(Z_p) = 0 \quad \text{для всех } p \in \Theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость: если существует предельное положение w поля $I df$ в точке $p \in \Theta$, то $\omega(v, w) = df(v)$ для всех $v \in T_p M$; следовательно, $df(Z_p) = 0$.

Пусть теперь p – правильная особая точка. Выберем координаты $x_1, \dots, x_{2n}$ из леммы 2 так, что $x(p) = 0$. Тогда условие $df(Z_p) = 0$ означает, что $\partial f/\partial x_\alpha = 0$ при $x_1 = 0$ и $1 \leq \alpha \leq 2k$. Если (ω^{ij}) – матрица, обратная матрице формы (ω_{ij}) , то

$$\begin{aligned} \omega^{ij} \text{pf}(\omega) &= - \sum_{\substack{(i,j,i_2,j_2,\dots,i_n,j_n) \in S_{2n} \\ i_s < j_s, i_s < i_{s+1}}} \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_2 j_2} \dots \omega_{i_n j_n}, \\ I df_x^i &= - \frac{\sum_j A_{ij} \partial f / \partial x_j}{\sum_j \omega_{ij} A_{ij}}, \end{aligned}$$

где

$$A_{ij} = \sum_{\substack{\sigma=(i,j,i_2,j_2,\dots,i_n,j_n) \in S_{2n} \\ i_s < j_s, i_s < i_{s+1}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{i_2 j_2} \cdots \omega_{i_n j_n}.$$

Рассмотрим вектор-функцию $F(x) = (F^1(x), \dots, F^{2n}(x)) = I df_x \operatorname{pf}(\omega_x)$. Тогда

$$F^i(x) = - \sum_{j=1}^{2n} A_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n. \quad (3)$$

Докажем, что все производные $F(x)$ порядка от 0 до $2k - 2$ равны нулю при $x_1 = 0$.

Фиксируем некоторое $A_{ij} \partial f / \partial x_j$ из (3). Каждое A_{ij} состоит из слагаемых вида

$$\omega_{i_2, j_2} \cdots \omega_{i_t, j_t} \omega_{i_{t+1}, j_{t+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}, \quad \text{где } i_t \leq 2k, \quad i_{t+1} > 2k, \quad t \geq k. \quad (4)$$

Если $i_2 > 1$, то все $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ вместе с производными 1-го порядка равны нулю (лемма 2). Так как элементов $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ не меньше, чем $k - 1$, то из всех слагаемых, составляющих частную производную выражения (4) порядка от 0 до $2k - 2$, только слагаемое

$$\frac{\partial^2 \omega_{i_2, j_2}}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}, \quad \text{где } i_k \leq 2k \text{ и } i_{k+1} > 2k,$$

входящее в производную порядка $2k - 2$ по x_1 , быть может, отлично от нуля. Если это так, то поскольку

$$(i, j, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k, i_{k+1}, j_{k+1}, \dots, i_n, j_n)$$

есть перестановка набора $\{1, \dots, 2n\}$, в которой $2n - 2k$ чисел больше $2k$ и отлично от j , то $j \leq 2k$ и $\partial f / \partial x_j = 0$. Зафиксируем это и рассмотрим случай $i_2 = 1$.

Если $i_2 = 1$, то из всех слагаемых, составляющих производную выражения (4) порядка от 0 до $2k - 3$, только

$$\frac{\partial \omega_{1, j_2}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \omega_{i_3, j_3}}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}, \quad \text{где } i_k \leq 2k \text{ и } i_{k+1} > 2k,$$

входящее в производную порядка $2k - 3$ по x_1 , быть может, отлично от нуля. Если это так, то снова $j \leq 2k$ и $\partial f / \partial x_j = 0$.

Теперь мы можем заключить, что все производные функции $A_{ij} \partial f / \partial x_j$ порядка от 0 до $2k - 3$ равны нулю. Следовательно, из производных $A_{ij} \partial f / \partial x_j$ порядка $2k - 2$ только производная по x_1 , быть может, отлична от нуля. Тогда все ненулевые слагаемые этой производной являются произведениями на $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j$ производных порядка $2k - 3$ по x_1 от выражений (4) при $i_2 = 1$. Однако поскольку в этом случае $j > 1$, из условия теоремы следует $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j = 0$.

Итак, все производные функции $A_{ij} \partial f / \partial x_j$ порядка от 0 до $2k - 2$ равны нулю при $x_1 = 0$, и это же относится к вектор-функции $F(x)$. Следовательно, из всех производных $F(x)$ порядка $2k - 1$ только $\partial^{2k-1} F / \partial x_1^{2k-1}$ может быть отличной от нуля.

Теперь разложим $F(x)$ и $\text{pf}(\omega_x)$ в конечные ряды Тейлора и вычислим предел $I df$:

$$F(x) = \frac{\partial^{2k-1} F(0)}{\partial x_1^{2k-1}} \frac{x_1^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k} F(\mu x)}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-1} x_j}{(2k)!}, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\text{pf}(\omega_x) = \frac{\partial^{2k-1} \text{pf}(\omega_0)}{\partial x_1^{2k-1}} \frac{x_1^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k} \text{pf}(\omega_{\eta x})}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-1} x_j}{(2k)!}, \quad 0 < \eta < 1.$$

$$\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} I df_q = \lim_{x \rightarrow 0, x_1 \neq 0} \frac{F(x)}{\text{pf}(\omega_x)} = \lim_{x \rightarrow 0, x_1 \neq 0} \frac{F(x)/x_1^{2k-1}}{\text{pf}(\omega_x)/x_1^{2k-1}} = \frac{\partial^{2k-1} F(0)/\partial x_1^{2k-1}}{\partial^{2k-1} \text{pf}(\omega_0)/\partial x_1^{2k-1}}.$$

Разложение пфаффиана в ряд Тейлора следует из леммы 3. Итак, предел $I df$ в точке p существует и гладко зависит от p . Теорема доказана.

Для того, чтобы гамильтонова система $I df$, заданная на множестве $M \setminus \Theta$, имела гладкое (или непрерывное) продолжение на M , вообще говоря, недостаточно условия теоремы 1. Так для функции $f(u, v) = v_1$ в примере 1 оно выполнено, однако

$$\lim_{v_1 \rightarrow 0} |I df_{(u, v)}| = +\infty.$$

Дело в том, что в примере 1 особые точки не являются правильными.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f – гладкая функция на симплектическом многообразии с особенностью формы M^{2n} и p – правильная особая точка. Тогда о предельных положениях и предельных направлениях $I df$ в точке p известно следующее.

1. Если $df_p \neq 0$, то существует хотя бы одно предельное направление.
2. Множество несобственных предельных направлений является проективным пространством $\mathbf{P} \mathcal{J}_p(f)$, ассоциированным с некоторым подпространством $\mathcal{J}_p(f) \subset Z_p$.
3. Следующие три утверждения являются эквивалентными:

$$\mathcal{J}_p(f) = 0, \quad \mathbf{P} \mathcal{J}_p(f) = \emptyset, \quad \exists \lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} I df_q.$$

4. Если $df(Z_p) \neq 0$, то предельных положений нет, при этом

$$\mathbf{P} \mathcal{J}_p(f) \neq \emptyset, \quad \mathcal{J}_p(f) \subset Z_p \cap H_p(f), \quad \dim Z_p \cap H_p(f) = \dim Z_p - 1,$$

где $H_p(f)$ – гиперплоскость, касательная к подмногообразию $f^{-1}(f(p))$ в точке p .

5. Если $df(Z_p) = 0$ и $df_p \neq 0$, то множество предельных положений пусто или является плоскостью в $H_p(f)$ с направляющим пространством $\mathcal{J}_p(f)$, которая не пересекается с $Z_p \subset H_p(f)$ и косоортогональна $H_p(f)$.

6. Если $df_p = 0$, то множество предельных положений совпадает с $\mathcal{J}_p(f)$ или предельных положений нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $df_p \neq 0$, то существует хотя бы одно предельное направление, поскольку топологическое пространство

$$\bigcup_{|q-p| \leq \varepsilon} \mathbf{P}(T_q M^{2n}), \quad \text{где } \varepsilon \rightarrow +0,$$

является компактом, и $df_q \neq 0$ в достаточно близких к p точках $q \notin \Theta$, в которых соответственно определено направление $I df_q$ (евклидова норма $|\cdot|$ вычисляется в произвольных координатах). Обозначим через $\mathcal{J}_p(f)$ объединение всех прямых, являющихся несобственными предельными направлениями $I df$ в точке p . Если таковых нет, то положим $\mathcal{J}_p(f) = 0$. Пусть $q_n \notin \Theta$ – последовательность, сходящаяся к p . Если $\mathcal{L}(w)$ – несобственное предельное направление в точке p , то $I df_{q_n} = \lambda_n w_n$ для некоторой последовательности $w_n \in T_{q_n} M$, сходящейся к w . Очевидно, что $\lambda_n \rightarrow +\infty$; следовательно, для произвольных $v \in T_p M$ и последовательности $v_n \in T_{q_n} M$, сходящейся к v ,

$$\omega(v, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(v_n, w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} df_{q_n}(v_n) = 0 \cdot df_p(v) = 0.$$

Следовательно, $w \in Z_p$. Итак, $\mathcal{J}_p(f) \subset Z_p$.

Пусть w – предельное положение $I df$ в точке p . Ясно, что вектор w косоортогонален $H_p(f)$. Так как при $df(Z_p) \neq 0$ ядро Z_p трансверсально $H_p(f)$, то w косоортогонален $T_p M$; следовательно, $w \in Z_p$, что противоречит $df_p \neq 0$. Итак, если $df(Z_p) \neq 0$, то предельных положений нет, а есть только несобственные предельные направления. Если при этом $\dim Z_p = 2$, то существует единственное несобственное предельное направление $\mathcal{J}_p(f) = Z_p \cap H_p(f)$, а предельных положений нет. Соотношения между Z_p и $H_p(f)$, указанные в теореме, элементарны.

По аналогии с теоремой 1 введем координаты $x_1, \dots, x_{2n}$ из леммы 2. Пусть $\dim Z_p = 2k$ и $I df_x = F(x)/\text{pf}(\omega_x)$. Из доказательства теоремы 1 следует, что если $k > 1$, то все частные производные $F(x)$ порядка от 0 до $2k - 4$, а если при этом $df(Z_p) = 0$, то и порядка $2k - 3$, равны нулю при $x_1 = 0$. Если $k \geq 1$, то среди производных $F(x)$ порядка $2k - 2$, а если $k > 1$ и $df(Z_p) \neq 0$, то и порядка $2k - 3$, могут быть отличные от нуля в точке $0 = x(p)$. Рассмотрим три возможных случая (при $k = 1$ возможны только случаи б) и в)).

а) $\partial^{2k-3} F(0)/\partial x_1^{2k-3} \neq 0$:

$$F(x) = \frac{\partial^{2k-3} F(0)}{\partial x_1^{2k-3}} \frac{x_1^{2k-3}}{(2k-3)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k-2} F(\lambda x)}{\partial x_1^{2k-3} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-3} x_j}{(2k-2)!}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} \mathcal{L}(I df_q) = \lim_{x \rightarrow 0, x_1 \neq 0} \mathcal{L} \left(\frac{F(x)}{\text{pf}(\omega_x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0, x_1 \neq 0} \mathcal{L} \left(\frac{F(x)/x_1^{2k-3}}{o(x_1)} \right).$$

Вектор $\partial^{2k-3} F(0)/\partial x_1^{2k-3}$ задает единственное предельное направление $I df$ в точке p , которое является несобственным. В данном случае $\dim \mathcal{J}_p(f) = 1$ и предельных положений нет.

б) $\partial^{2k-3} F(0)/\partial x_1^{2k-3} = 0$, но найдется производная $F(x)$ порядка $2k - 2$, отличная от нуля в точке 0:

$$\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} \mathcal{L}(I df_q) = \lim_{x \rightarrow 0, x_1 \neq 0} \frac{1}{o(1)} \mathcal{L} \left(\frac{\partial^{2k-2} F(\lambda x)}{\partial x_1^{2k-2}} + \sum_{j=2}^{2n} \frac{\partial^{2k-2} F(\lambda x)}{\partial x_1^{2k-3} \partial x_j} \frac{x_j}{x_1} \right).$$

Пусть $v_j = \partial^{2k-2}F(0)/\partial x_1^{2k-3}\partial x_j$ и $k_2, \dots, k_{2n}$ – произвольный набор чисел.

Если $v_1 \in \mathcal{L}(v_2, \dots, v_{2n})$, то $v_1 = \sum_{j>1} \alpha_j v_j$ и вектор $\sum_{j>1} k_j v_j$ является пределом $I df_x$ при $x_1 \rightarrow 0$ и $x_j \equiv (k_j \sigma(x) - \alpha_j) x_1$ для всех $j > 1$. В частности, при $k_2 = \dots = k_{2n} = 0$ получаем 0-вектор; следовательно, $df_p = 0$. Полагая $x_j \equiv (k_j - \alpha_j) x_1$ для всех $j > 1$, при $x_1 \rightarrow 0$ получим несобственное предельное направление $\mathcal{L}(\sum_{j>1} k_j v_j)$. Итак, в данном случае пространство $\mathcal{J}_p(f) = \mathcal{L}(v_2, \dots, v_{2n})$ одновременно является множеством предельных положений и $df_p = 0$.

Если $v_1 \notin \mathcal{L}(v_2, \dots, v_{2n})$, то легко видеть, что все предельные направления несобственные. Полагая $x_j \equiv k_j x_1$ для всех $j > 1$, при $x_1 \rightarrow 0$ в пределе получим предельное направление $\mathcal{L}(v_1 + \sum_{j>1} k_j v_j)$, а при $x_j \equiv k_j \sqrt{x_1}$ получим направление $\mathcal{L}(\sum_{j>1} k_j v_j)$. В данном случае $\mathcal{J}_p(f) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{2n})$ и предельных положений нет.

в) Все частные производные $F(x)$ порядка от 0 до $2k - 2$ равны нулю в точке 0:

$$\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} \mathcal{L}(I df_q) = \lim_{x \rightarrow 0, x_1 \neq 0} \frac{1}{k + o(1)} \mathcal{L} \left(\frac{\partial^{2k-1} F(\eta x)}{\partial x_1^{2k-1}} + \sum_{j=2}^{2n} \frac{\partial^{2k-1} F(\eta x)}{\partial x_1^{2k-2} \partial x_j} \frac{x_j}{x_1} \right),$$

где $k = \partial^{2k-1} \text{pf}(\omega_0)/\partial x_1^{2k-1} \neq 0$. Если $v_j = \partial^{2k-1} F(0)/\partial x_1^{2k-2} \partial x_j$, то совокупность направляющих векторов несобственных предельных направлений есть $\mathcal{L}(v_2, \dots, v_{2n})$, а совокупность предельных положений есть плоскость $v_1 + \mathcal{L}(v_2, \dots, v_{2n})$. Наличие предельных положений $I df$ в точке p влечет $df(Z_p) = 0$. Итак, в данном случае $\mathcal{J}_p(f) = \mathcal{L}(v_2, \dots, v_{2n})$ и плоскость $v_1 + \mathcal{J}_p(f)$ является множеством предельных положений. Ясно, что $v_1 \in \mathcal{J}_p(f)$ эквивалентно $df_p = 0$.

Итак, мы рассмотрели все существующие возможности. Из приведенных рассуждений видно, что если $df(Z_p) \neq 0$, то не имеет места случай в), а если $df(Z_p) = 0$, то не имеет места случай а). Легко построить примеры того, что случай б) совместим с $df(Z_p) \neq 0$ и с $df(Z_p) = 0$. Сопоставляя все вышесказанное, получаем утверждения теоремы.

Заметим, что каждая из возможностей, предусмотренных теоремой 2, реализуется в соответствующих примерах. При этом размерность пространства $\mathcal{J}_p(f)$ может быть различной – от 0 до $\dim Z_p$. Следующий пример показывает, что многообразия предельных положений и предельных направлений косых градиентов могут быть нелинейными.

ПРИМЕР 5. Пусть $M = \mathbb{R}^4$ и $\omega_x = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_3 dx_3 \wedge dx_4$. В данном случае $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 = 0\}$ и особые точки не являются правильными, так как $\text{codim } Z_x = 2$. Если $f(x) = x_1 x_3$, то концы векторов, являющихся предельными положениями $I df$ в точке $x \in \Theta$, описывают в $\mathbb{R}^2(x_2, x_4)$ гиперболу $x_2 x_4 = 1$, при этом имеется только два несобственных предельных направления, определяемых осями x_2 и x_4 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть (M^{2n}, ω) – симплектическое многообразие с особенностью формы, $p \in M^{2n}$ – правильная особая точка и $\dim Z_p = 2k$. Тогда в некоторой окрестности p существуют координаты

$$(x_1, \dots, x_{2k}, p_1, \dots, p_{n-k}, q_1, \dots, q_{n-k}),$$

в которых

$$\omega(x, p, q) = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} \omega_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_{2k}) dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i.$$

Матрица $(\omega_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2k}$ невырождена при $x_1 \neq 0$ и обращается в нуль при $x_1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуем идее доказательства теоремы Дарбу из [5]. Всюду ε обозначает положительное, как угодно малое число. Рассуждаем по индукции. При $n = 1$ или $2k = 2n$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что $n > 1$ и $2k < 2n$. Пусть O – достаточно малая окрестность точки p . В окрестности O определено гладкое интегрируемое $2k$ -мерное распределение $\mathcal{Z}$, которое переводит каждое $q \in \Theta \cap O$ в Z_q (лемма 1). Вложим в O диск D^{2n-2k} , так что p – центр диска и Z_p трансверсально D^{2n-2k} . Пусть f – гладкая функция на D^{2n-2k} такая, что $df_p \neq 0$ и $f(p) = 0$. Можно считать, что D^{2n-2k} тривиально расслаивается на $(2n - 2k - 1)$ -мерные диски $f^{-1}(t)$, где $|t| \leq \varepsilon$. Через каждую точку диска $f^{-1}(t)$ проведем интегральное подмногообразие распределения $\mathcal{Z}$ – получится гладкая гиперповерхность W_t , которая соприкасается с Z_q в каждой точке $q \in W_t \cap \Theta$. Гладко продолжим функцию f на O так, что $f^{-1}(t) = W_t$ при $|t| \leq \varepsilon$. Мы получили функцию f на O , для которой $df(Z_q) = 0$ для всех $q \in O \cap \Theta$. Из теоремы 1 следует, что в окрестности O определено гладкое векторное поле $I df$. Ясно, что фазовый поток $I df$ сохраняет ω и что $\omega(v, I df) = v(f)$ для произвольного поля v . Пусть $D^{2n-2k-1}$ – вложенный в D^{2n-2k} диск с центром p , трансверсальный $(2n - 2k - 1)$ -мерному диску $W_0 \cap D^{2n-2k}$. Через каждую точку $D^{2n-2k-1}$ проведем интегральное подмногообразие $\mathcal{Z}$ – получится гладкая гиперповерхность V , которая соприкасается с Z_q в каждой точке $q \in V \cap \Theta$. Выберем диск $D^{2n-2k-1}$ так, чтобы он был трансверсален в D^{2n-2k} прямой

$$(\mathcal{L}(I df_p) \oplus Z_p) \cap T_p D^{2n-2k};$$

тогда вектор $I df_p$ трансверсален V . Если окрестность O достаточно мала, то каждая точка $q \in O$ может быть получена из некоторой точки $q' \in V$ сдвигом на t вдоль интегральной траектории $I df$, проходящей через q' . Положим $g(q) = t$. Получаем гладкую функцию g такую, что $g^{-1}(0) = V$. Так как $\{f, g\}(p) = 1$, то $dg_p \neq 0$. Так как фазовый поток $I df$ сохраняет ω и “разносит” V по семейству гладких гиперповерхностей $g^{-1}(t)$, где $|t| \leq \varepsilon$, то $dg(Z_q) = 0$ для всех $q \in O \cap \Theta$. Следовательно, в окрестности O определено гладкое векторное поле $I dg$. Так как $\{f, g\} \equiv 1$, ковекторы dg_p и df_p линейно независимы.

Пусть $M' = \{q \in O : f(q) = g(q) = 0\}$ и ω' – ограничение формы ω на $(2n - 2)$ -мерное подмногообразие M' . Так как $M' = W_0 \cap V$, то $Z_q \subset T_q M'$ для всех $q \in M'$. Линейная оболочка векторов $I df_p$ и $I dg_p$ трансверсальна $T_p M'$, так как если $v = \lambda I df_p + \mu I dg_p \in T_p M'$, то $df(v) = -\mu = 0$ и $dg(v) = \lambda = 0$. Так как векторы $I df_q$ и $I dg_q$ косоортотональны $T_q M'$ и касаются Θ при $q \in \Theta$, то M' трансверсально Θ (в противном случае $(2n - 1)$ -мерное касательное пространство к Θ инцидентно $(2n - 2)$ -мерному касательному пространству к M' и, одновременно, трансверсально последней 2-мерной линейной оболочке векторов $I df$ и $I dg$, что абсурдно). Следовательно, (M', ω') – почти симплектическое многообразие, причем $\Theta_{M'} = \Theta \cap M'$, и для всех $q \in \Theta_{M'}$ ядро ω'_q совпадает с Z_q .

Проверим, что точка p правильная в M' . Ясно, что $\Theta_{M'}$ – гладкая гиперповерхность в M' и $\dim Z_q = 2k$ для всех $q \in \Theta_{M'}$. Так как $Z_p \not\subset T_p \Theta$, то тем более $Z_p \not\subset T_p \Theta_{M'}$. Осталось проверить условие 4) определения 2. Подмногообразие M' , “дрейфуя” в потоке $I dg$, замечает некоторую гиперповерхность S . В свою очередь S под действием потока $I df$ замечает окрестность точки p . Обозначим $I df$ через v_{2n-1} и $I dg$ через v_{2n} .

Тождество $\{f, g\} \equiv 1$ влечет

$$[v_{2n-1}, v_{2n}] = [I df, I dg] = \text{sgrad}\{f, g\} = \text{sgrad}(1) = 0$$

в каждой точке $O \setminus \Theta$; следовательно, $[v_{2n-1}, v_{2n}] = 0$ на O . Поскольку $[v_{2n-1}, v_{2n}] \equiv 0$, линейная оболочка $\mathcal{L}(I df_p, I dg_p)$ трансверсальна M' и множество Θ инвариантно относительно v_{2n-1} и v_{2n} , то для любых координат $(y_1, \dots, y_{2n-2})$ на M' существуют координаты $(y_1, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n})$ на O такие, что

- а) векторы v_{2n-1} и v_{2n} являются касательными к координатным линиям y_{2n-1} и y_{2n} ;
- б) подмногообразие M' задается уравнением $y_{2n-1} = y_{2n} = 0$;
- в) гиперповерхность $O \cap \Theta$ задается уравнением $y_1 = 0$.

Если $y' = (y_1, \dots, y_{2n-2})$ – вектор координат M' и $(y', 0) = (y_1, \dots, y_{2n-2}, 0, 0)$, то

$$\det(\omega_{(y', 0)}) = \det(\omega'_{y'}) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку $\omega(v_{2n-1}, v_{2n}) = 1$. Следовательно, $\text{pf}(\omega)_{(y', 0)} = \pm \text{pf}(\omega')_{y'}$. Очевидно, что координатная линия $y_1 = t$ в M' , проходящая через точку p , является таковой и в M . Согласно лемме 3 условие 4) определения 2 сводится к тому, что ограничение функции $\text{pf}(\omega)_y$ на координатную линию $y_1 = t$ имеет отличную от нуля производную порядка $2k-1$ в точке $y_1(p)$. Следовательно, данное условие выполняется (или не выполняется) в M и M' одновременно. Итак, особая точка p многообразия M' является правильной.

Согласно индуктивному предположению на многообразии M' существуют координаты $(x', p', q') = (x_1, \dots, x_{2k}, p_1, \dots, p_{n-k-1}, q_1, \dots, q_{n-k-1})$, в которых

$$\omega'(x', p', q') = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} \omega_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_{2k}) dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k-1} dp_i \wedge dq_i.$$

При этом $\omega_{\alpha\beta}(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $\det(\omega_{\alpha\beta}(x)) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$. Введем в O координаты $(x_1, \dots, x_{2k}, p_1, \dots, p_{n-k-1}, y_{2n-1}, q_1, \dots, q_{n-k-1}, y_{2n})$. Обозначим координаты y_{2n-1} и y_{2n} через p_{n-k} и q_{n-k} . Все координатные поверхности вида $y_{2n-1} = \text{const}_1$, $y_{2n} = \text{const}_2$ получаются из M' последовательными сдвигами в фазовых потоках $I dg$ и $I df$, при которых каждая i -я координатная линия M' сдвигается в i -ю координатную линию O . При этом $\Theta_{M'}$ замечает Θ . Поскольку данные потоки сохраняют форму ω и поскольку $\omega(\partial/\partial p_{n-k}, \partial/\partial q_{n-k}) = 1$, то ω имеет вид (4). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p \in M^{2n}$ – правильная особая точка и $\dim Z_p = 2k$. Тогда в некоторой окрестности p существуют координаты $(x_1, \dots, x_{2n})$, в которых матрица скобок Пуассона координатных функций имеет вид

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,2k} \\ -a_{1,2} & 0 & \dots & a_{2,2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1,2k} & -a_{2,2k} & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

для некоторой матрицы $a(x) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2k}$, невырожденной при $x_1 \neq 0$. Каждая из функций $a_{i,j}(x)$ является гладкой при $x_1 \neq 0$ и не зависит от координат $x_{2k+1}, \dots, x_{2n}$. Некоторые из функций $a_{i,j}(x)$ (возможно все) не определены при $x_1 = 0$. В каждой строке и каждом столбце матрицы $a(x)$ найдется элемент $a_{i,j}$ такой, что

$$\limsup_{x \rightarrow x(p), x_1 \neq 0} |a_{i,j}(x_1, \dots, x_{2k})| = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Блочнo-диагональный вид (5) матрица Пуассона имеет в координатах x , построенных в теореме 3, если их соответствующим образом перенумеровать. Пусть $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Элементы $a_{i,j}$ зависят только от $x_1, \dots, x_{2k}$, поэтому можно считать, что $2k = 2n$. Пусть $1 \leq i, j \leq 2k$. Так как $dx_i \neq 0$ для каждой координатной функции x_i , то ни одно из $I dx_i$ не имеет предельных положений в точке p , однако имеет несобственные предельные направления, т.е. $\mathcal{J}_p(x_i) \neq 0$ (теорема 2). Так как $a_{i,j}(x) = dx_j(I dx_i)$ при $x_1 \neq 0$, то

$$\limsup_{x \rightarrow 0, x_1 \neq 0} |a_{i,j}(x)| < +\infty \quad (6)$$

влечет $\mathcal{J}_p(x_i) \subset H_p(x_j) = T_p\{x_j = 0\}$. Следовательно, если в i -й строке матрицы $a(0)$ все элементы удовлетворяют условию (6), то

$$\mathcal{J}_p(x_i) \subset \bigcap_{j=1}^{2k} H_p(x_j) = 0,$$

что невозможно, поскольку $\mathcal{J}_p(x_i) \neq 0$. Это же относится и к произвольному столбцу, поскольку матрица кососимметрична. Следствие доказано.

Из замкнутости формы ω следует, что увеличить число блоков на главной диагонали матрицы (5) невозможно. Следствие 1 дает некоторое представление о сингулярном поведении скобки Пуассона в правильной особой точке.

Автор глубоко признателен академику А. Т. Фоменко за внимание к работе и профессору А. В. Болсинову за критические замечания, которые помогли сформулировать ключевое понятие правильной особой точки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: МГУ, 1988.
- [2] Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 5. С. 883–938.
- [3] Зотьев Д. Б. Fomenko–Zieschang invariant in the Bogoyavlenskiy integrable case // Regular&chaotic dynamics. 2000. V. 5. № 4. P. 437–458.
- [4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [5] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.