Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Висков, Тождество Дарбу и его аналоги, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 332–338

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm950>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:53:26

УДК 517+512.1+519.1

ТОЖДЕСТВО ДАРБУ И ЕГО АНАЛОГИ

О. В. Висков

Фиксируем натуральное n и обозначим $F(x, y) = \sum_{m=0}^n f^{(n-m)}(x)g^{(m)}(y)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – произвольные достаточно гладкие функции. Приводится три различных доказательства справедливости равенства

$$F(x, y) - F(y, x) = \int_y^x \{f^{(n+1)}(t)g(x+y-t) - f(t)g^{(n+1)}(x+y-t)\} dt.$$

Устанавливаются также дискретный и некоммутативный аналоги этого тождества.

Библиография: 7 названий.

1. В ходе своих исследований, посвященных возможности распространения интегральной теоремы о среднем на комплексный случай, Дарбу существенно опирался на следующее тождество (см. [1, формула (7)]):

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(0)\{f(z) - f(a)\} &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1}(z-a)^m \{\varphi^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z) - \varphi^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\} \\ &\quad + (-1)^n(z-a)^{n+1} \int_0^1 \varphi(t)f^{(n+1)}(a-at+zt) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $f(z)$ – функция, аналитическая во всех точках отрезка, соединяющего точки a и z , а $\varphi(t)$ – произвольный полином степени n от t . Именно в этой форме соотношение (1) приводится в [2, § 7.1], где оно названо *формулой Дарбу*.

В качестве простейшего частного случая, отвечающего выбору $\varphi(t) = (t-1)^n$ в (1), эта формула содержит разложение Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(z) = \sum_{m=0}^n \frac{(z-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \int_a^z \frac{(z-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (2)$$

Интересно также отметить еще один, рассмотренный в [1], частный случай тождества (1). Если в (1) заменить n на $2n$ и выбрать затем $\varphi(t) = t^n(t-1)^n$, то после несложных преобразований получим тождество

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)! n!}{(n-m)! m!} (z-a)^m [(-1)^m f^{(m)}(z) - f^{(m)}(a)] \\ &= \int_0^1 t^n (t-1)^n (z-a)^{2n+1} f^{(2n+1)}(a-at+zt) dt \end{aligned} \quad (3)$$

(см. также [2, с. 176]). Дарбу отмечает, что тождество (3) имеет преимущество перед формулой Тейлора (2), поскольку при его применении для вычисления значений данной функции ошибка приближения имеет порядок $(\Delta z)^{2n+1}$, где n – число используемых при этом производных приближаемой функции, в то время как формула Тейлора в этой ситуации гарантирует лишь порядок $(\Delta z)^{n+1}$.

Контекст, в котором Дарбу получил равенство (1), потребовал от него излишне жестких ограничений и на аппроксимируемую функцию $f(\cdot)$ (предполагалась ее аналитичность) и на аппроксимирующую последовательность $\varphi^{(m)}(\cdot)$, $m = 0, 1, \dots$ ($\varphi(\cdot)$ считалось полиномом). В действительности же справедливо следующее утверждение.

СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА ТОЖДЕСТВА ДАРБУ. *Для произвольных $n + 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n f^{(n-m)}(x)g^{(m)}(y) - \sum_{m=0}^n f^{(n-m)}(y)g^{(m)}(x) \\ = \int_y^x \{f^{(n+1)}(t)g(x+y-t) - f(t)g^{(n+1)}(x+y-t)\} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим сразу же, что если в этом соотношении выбрать в качестве $f(x)$ функцию $f(a+xz-ax)$, а на роль $g(x)$ определить полином $\varphi(1-x)$ степени n , то, как легко можно убедиться, (4) превратится в формулу Дарбу (1).

Будет приведено несколько подходов к доказательству тождества (4). Индуктивное доказательство этого тождества изложено в п. 2. Другой подход (см. п. 4) базируется на представляющем независимый интерес новом некоммутативном тождестве в алгебре Гейзенберга–Вейля. В п. 7 намечен еще один путь доказательства формулы Дарбу (4), который опирается на ключевое для этой заметки тождество (13), представляющее собой разностный аналог равенства (4). Простые примеры использования этого аналога приведены в п. 6. Иллюстрации применения самого тождества Дарбу (4) читатель может найти в [3], [4]. Отметим также, что в [3] приводится еще одно независимое доказательство тождества (4).

2. Докажем тождество (4), используя принцип полной математической индукции по степени гладкости n участвующих в нем функций. Заметим прежде всего, что

$$\frac{d}{dt}\{f(t)g(x+y-t)\} = f'(t)g(x+y-t) - f(t)g'(x+y-t),$$

и поэтому в силу формулы Барроу–Ньютона–Лейбница справедливо равенство

$$f(x)g(y) - f(y)g(x) = \int_y^x \{f'(t)g(x+y-t) - f(t)g'(x+y-t)\} dt. \quad (5)$$

Это тождество служит основанием доказательства по индукции симметрической формы равенства Дарбу (4), поскольку при $n = 0$ (4) превращается в (5). Предполагая справедливость (4) для любых достаточно гладких функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, запишем это тождество в случае, когда роль $f(\cdot)$ играет $f'(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n f^{(n+1-m)}(x)g^{(m)}(y) - \sum_{m=0}^n f^{(n+1-m)}(y)g^{(m)}(x) \\ = \int_y^x \{f^{(n+2)}(t)g(x+y-t) - f'(t)g^{(n+1)}(x+y-t)\} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь воспользуемся (5), заменяя в этом тождестве функцию $g(\cdot)$ ее $(n+1)$ -й производной $g^{n+1}(\cdot)$:

$$f(x)g^{(n+1)}(y) - f(y)g^{(n+1)}(x) = \int_y^x \{f'(t)g^{(n+1)}(x+y-t) - f(t)g^{(n+2)}(x+y-t)\} dt. \quad (7)$$

Остается только сложить равенства (6) и (7), чтобы убедиться в справедливости индуктивного перехода.

3. Равенство (4) существенно обобщает полученное в [4] тождество

$$\sum_{m=0}^n \frac{a_m(x)}{m!} g^{(m)}(y) = \sum_{m=0}^n \frac{a_m(y)}{m!} g^{(m)}(x) + \int_x^y \frac{a_n(\tau)}{n!} g^{(n+1)}(x+y-\tau) d\tau, \quad (8)$$

которому подчиняются произвольные полиномы Аппеля $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$. Напомним, что последовательность $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, полиномов $a_n(x)$ называется *последовательностью полиномов Аппеля*, если их (формальная) экспоненциальная производящая функция имеет вид

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x) \frac{t^n}{n!} = A(t)e^{xt}, \quad (9)$$

где $A(t)$ – (формальный) степенной ряд, удовлетворяющий условию $A(0) \neq 0$. Из (9) видно, что

$$\frac{d}{dx} a_0(x) = 0, \quad \frac{d}{dx} a_n(x) = n a_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

и поэтому, полагая в (4) $f(x) = a_n(x)/n!$ и не накладывая на $g(y)$ никаких других ограничений, кроме существования нужного числа производных, приходим к тождеству (8).

4. Тождество (8) было получено в [3] в качестве следствия некоммутативного тождества, которому подчиняются полиномы Аппеля в алгебре Гейзенберга–Вейля. Приведем вывод симметричной формы тождества Дарбу (4), следуя ходу рассуждений, изложенному в [4]. Сначала докажем справедливость следующего результата.

НЕКОММУТАТИВНЫЙ АНАЛОГ ТОЖДЕСТВА ДАРБУ. Пусть элементы a, b и c произвольной ассоциативной алгебры связаны коммутационными соотношениями

$$ab - ba = c, \quad ac = ca, \quad bc = cb. \quad (10)$$

Тогда для любого полинома (или формального степенного ряда) $f(\cdot)$ и произвольного целого неотрицательного n справедливо равенство

$$b \sum_{m=0}^n c^{n-m} f^{(n-m)}(a) b^m = f(a) b^{n+1} - c^{n+1} f^{(n+1)}(a). \quad (11)$$

В самом деле, индуктивным рассуждением по степени $f(\cdot)$ легко убедиться, что из коммутационных соотношений (10) вытекает справедливость равенства

$$f(a)b - bf(a) = c \frac{df(a)}{da} \quad (12)$$

для произвольного $f(\cdot)$. Перебрасывая теперь в левой части (11) стоящую перед суммой образующую b слева направо и используя (12), получаем “телескопическую” сумму, соседние члены которой, кроме первого и последнего (а именно эти члены и стоят в правой части (11)), взаимно уничтожаются.

Реализуем a оператором умножения на $y - x$ при фиксированном y и в качестве b выберем оператор дифференцирования $D = d/dx$. Легко проверяется, что при выбранной реализации коммутационные соотношения (10) будут выполняться, причем роль c играет тождественный оператор. В этой ситуации тождество (11) после применения обеих его частей к $n + 1$ раз дифференцируемой функции $g(x)$ дает

$$\left(\sum_{m=0}^n f^{(n-m)}(y-x)g^{(m)}(x) \right)' = f(y-x)g^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(y-x)g(x).$$

Интегрируя это равенство и производя простые замены, приходим к доказываемому тождеству (4).

5. Обозначим через Δ разностный оператор, сопоставляющий функции $F(x)$ целочисленного аргумента x разность $F(x+1) - F(x)$, и пусть Δ^k – его k -я итерация. Справедливо следующее утверждение.

РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ ТОЖДЕСТВА ДАРБУ. Пусть $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ – произвольные функции целочисленного аргумента. Тогда для произвольного целого неотрицательного n и любых целых α и β справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \Delta^{n-m} F(\alpha) \Delta^m G(\beta) - \sum_{m=0}^n \Delta^{n-m} F(\beta) \Delta^m G(\alpha) \\ = \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \{F(\alpha + \beta - k - 1) \Delta^{n+1} G(k) - \Delta^{n+1} F(\alpha + \beta - k - 1) G(k)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для доказательства справедливости (13) запишем сначала очевидное “телескопическое” равенство

$$F(\alpha)G(\beta) - F(\beta)G(\alpha) = \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \{F(\alpha + \beta - k - 1)G(k+1) - F(\alpha + \beta - k)G(k)\}$$

и заметим, что его можно переписать в виде

$$F(\alpha)G(\beta) - F(\beta)G(\alpha) = \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \{F(\alpha + \beta - k - 1)\Delta G(k) - \Delta F(\alpha + \beta - k - 1)G(k)\}. \quad (14)$$

Фиксируем неотрицательные целые числа n и $m \leq n$. Если воспользоваться (14), подставив в это соотношение вместо функций $F(\alpha)$ и $G(\beta)$ соответственно $\Delta^{n-m}F(\alpha)$ и $\Delta^mG(\beta)$, то приходим к равенству

$$\begin{aligned} \Delta^{n-m}F(\alpha)\Delta^mG(\beta) - \Delta^{n-m}F(\beta)\Delta^mG(\alpha) \\ = \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \{\Delta^{n-m}F(\alpha + \beta - k - 1)\Delta^{m+1}G(k) - \Delta^{n-m+1}F(\alpha + \beta - k - 1)\Delta^mG(k)\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Остается просуммировать (15) по m от 0 до n и заметить, что слагаемые, стоящие справа (исключая члены, отвечающие $m = 0$ в первой сумме и $m = n$ во второй), будут взаимно уничтожать друг друга. В результате приходим к желаемому равенству (13).

6. Соотношение (13) может служить полезным инструментом для получения разложения функции целочисленного аргумента по полиномам, являющимся разностным аналогом полиномов Ашеля [5]. Эти полиномы $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, проще всего определить, используя их (формальную) экспоненциальную производящую функцию:

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x) \frac{t^n}{n!} = A(t)(1+t)^x, \quad (16)$$

где $A(t)$ – (формальный) степенной ряд, удовлетворяющий условию $A(0) \neq 0$.

Простейшим примером таких полиномов являются так называемые убывающие факториалы

$$a_0(x) = 1, \quad a_n(x) \equiv (x)_n = x(x-1) \cdots (x-n+1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

определяемые (16) с $A(t) = 1$. Следует упомянуть также полиномы Пуассона–Шарлье с параметром λ :

$$\pi_n(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (x)_m (-\lambda)^{n-m}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

экспоненциальная производящая функция которых задается (16) с $A(t) = \exp(-\lambda t)$ (см. [6, соотношение 2.61.2]).

Заметим, что если применить разностный оператор Δ к обеим частям равенства (16) и после этого сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t , то придем к равенствам

$$\Delta a_0(x) = 0, \quad \Delta a_n(x) = n a_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (19)$$

Легко понять, что, в свою очередь, из (19) следует соотношение (16) для некоторого формального степенного ряда $A(t)$, так что равенство (16) можно рассматривать как альтернативное определение рассматриваемого класса полиномов. Соотношение (19) показывает, что по отношению к операции взятия конечной разности эти полиномы ведут себя подобно убывающим факториалам (17). В частности, из (16) вытекает, что

$$\Delta^m a_n(x) = \binom{n}{m} m! a_{n-m}(x) \quad (20)$$

для любого целого m , $0 \leq m \leq n$.

Отметим еще, что из условия $A(0) \neq 0$ в (16) вытекает, что степень полинома $a_n(x)$ равна n , и поэтому с каждой последовательностью рассматриваемых полиномов можно связать линейный функционал E_a , однозначно определяемый соотношениями

$$E_a[a_n(x)] = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Например, для убывающих факториалов (17) линейный функционал E_a сопоставляет любому полиному $p(x)$ его значение при $x = 0$. Что касается полиномов Пуассона–Шарлье (18), то для положительного значения параметра λ функционал (21) является осреднением по пуассоновскому распределению с параметром λ , т.е. в этом случае

$$E_\pi[p(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda). \quad (22)$$

Вернемся теперь к соотношению (13) и выберем в нем $F(x) = a_n(x)/n!$, где последовательность $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, определяется (16) (или (19)), а $G(x)$ попрежнему будем считать произвольной функцией целочисленного аргумента. При таком выборе из равенства (20) вытекает, что разностный аналог тождества Дарбу (13) принимает вид

$$\sum_{m=0}^n \frac{a_m(\alpha)}{m!} \Delta^m G(\beta) - \sum_{m=0}^n \frac{a_m(\beta)}{m!} \Delta^m G(\alpha) = \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \frac{a_n(\alpha + \beta - k - 1)}{n!} \Delta^{n+1} G(k). \quad (23)$$

Более привычную форму симметричное тождество (23) принимает после применения к обеим его частям линейного функционала (21) по переменной $\alpha = x$:

$$G(\beta) = \sum_{m=0}^n \frac{a_m(\beta)}{m!} E_a \Delta^m G(x) + E_a \sum_{k=x}^{\beta-1} \frac{a_n(x + \beta - k - 1)}{n!} \Delta^{n+1} G(k). \quad (24)$$

Поскольку, как уже отмечалось, для полиномов (17) $E_a p(x) = p(0)$, последнее равенство превращается в формулу Ньютона (см. [7]) “с остаточным членом”

$$G(\beta) = \sum_{m=0}^n \binom{\beta}{m} \Delta^m G(0) + \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta - k - 1}{n} \Delta^{n+1} G(k). \quad (25)$$

Другой подход к доказательству этого равенства, основанный на некоммутативном тождестве, можно найти в [4].

Для полиномов Пуассона–Шарлье (18) тождество (24) дает

$$G(\beta) = \sum_{m=0}^n \frac{\pi_m(\beta)}{m!} E_\pi \Delta^m G(x) + E_\pi \sum_{k=x}^{\beta-1} \frac{\pi_n(x + \beta - k - 1)}{n!} \Delta^{n+1} G(k), \quad (26)$$

где, как было отмечено, линейный функционал E_π задается (22).

Можно показать (используя, например, разностную формулу Родрига для полиномов Пуассона–Шарлье), что коэффициенты этого разложения лишь формой записи отличаются от обычных коэффициентов разложения по ортогональным полиномам. Однако неясно, каким образом в рамках теории ортогональных полиномов можно получить явный вид “остаточного члена”.

7. Воспользуемся разностным аналогом (13) тождества Дарбу для альтернативного доказательства справедливости самого тождества Дарбу (4). С этой целью рассмотрим две $n + 1$ раз непрерывно дифференцируемые функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ и фиксируем переменные x и y . Выберем натуральное число N и для произвольного целого k обозначим $x_k = x + kh$, где $h = (y - x)/N$. Используя тождество (13) для функций целочисленного аргумента $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$, определенных соотношениями

$$F(k) = f(x_k), \quad G(k) = g(x_k), \quad (27)$$

и полагая в этом равенстве $\alpha = 0$, $\beta = N$, видим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^n \Delta^{n-m} F(0) \Delta^m G(N) - \sum_{m=0}^n \Delta^{n-m} F(N) \Delta^m G(0) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \{F(N-k-1) \Delta^{n+1} G(k) - \Delta^{n+1} F(N-k-1) G(k)\}. \end{aligned} \quad (28)$$

В обозначениях (27) с учетом очевидных равенств

$$x_0 = x, \quad x_N = y, \quad x_{N-k-1} = x + y - x_{k+1}$$

тождество (28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^n \Delta_h^{n-m} f(x) \Delta_h^m g(y) - \sum_{m=0}^n \Delta_h^{n-m} f(y) \Delta_h^m g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \{f(x+y-x_{k+1}) \Delta_h^{n+1} g(x_k) - \Delta_h^{n+1} f(x+y-x_{k+1}) g(x_k)\}, \end{aligned} \quad (29)$$

где Δ_h – оператор, сопоставляющий функции $f(x)$ разность $f(x+h) - f(x)$, и Δ_h^k – его k -я итерация. Разделим обе части равенства (29) на h^n и перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^n \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^{n-m} f(x) \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^m g(y) - \sum_{m=0}^n \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^{n-m} f(y) \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^m g(x) \\ &= h \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ f(x+y-x_{k+1}) \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^{n+1} g(x_k) - \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^{n+1} f(x+y-x_{k+1}) g(x_k) \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Остается заметить, что h стремится к нулю с ростом N , и поэтому равенство (30) в пределе (при $N \rightarrow \infty$) превращается в (4), поскольку разностный оператор Δ_h/h переходит в пределе в оператор дифференцирования, а правая часть (30) в этих условиях стремится к интегралу, стоящему в правой части (4).

Автор признателен анонимному рецензенту, замечания которого способствовали улучшению первоначального варианта заметки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Darboux G. Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable // J. de Math. 1876. V. 3. № 2. P. 291–313.
- [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963.
- [3] Висков О. В. О формуле Дарбу // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. 1998. Т. 1(3). С. 2–5.
- [4] Висков О. В. Некоммутативное тождество для полиномов Аппеля // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 2. С. 307–311.
- [5] Boas R. P., Buck R. C., Creighton R. Polynomial Expansions of Analytical Functions. Berlin: Springer Verlag, 1964.
- [6] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [7] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.