Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Добрынина, О ширине в свободных произведениях с объединением, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 353–359

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 03:35:50

УДК 519.4

О ШИРИНЕ В СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ С ОБЪЕДИНЕНИЕМ

И. В. Добрынина

В данной работе рассматривается проблема конечной ширины для свободных произведений групп с объединенной подгруппой.

Библиография: 6 названий.

Следуя Ю. И. Мерзлякову [1], под *шириной* $\text{wid}(G, \varphi)$ вербальной подгруппы $\varphi(G)$, определенной в группе G словом φ , будем понимать наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $\varphi(G)$ записывается в виде произведения $\leq m$ значений слова φ .

Слово φ будем называть *собственным*, если $\varphi(G) \neq 1$ и $\varphi(G) \neq G$. Соответствующую подгруппу $\varphi(G)$ также будем называть *собственной*.

А. Х. Ремтула [2] доказал, что в нетривиальном свободном произведении $A * B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы $\varphi(A * B)$ относительно слова φ бесконечна тогда и только тогда, когда $|A| \geq 3$ и $|B| \geq 2$.

Опираясь на результат А. Х. Ремтулы, В. Г. Бардаковым доказана

ТЕОРЕМА 1 [3]. Пусть $G = A *_U B$, $|A : U| \geq 3$ и $|B : U| \geq 2$, причем $U \triangleleft A$ и $U \triangleleft B$, φ – собственное слово. Тогда ширина вербальной подгруппы $\varphi(G)$ бесконечна.

Нами будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = A *_U B$, $|A : U| \geq 2$ и в B существует такой элемент b , что $UbU \neq Ub^{-1}U$. Тогда $G = A *_U B$ имеет бесконечную ширину для любого собственного слова φ .

Прежде чем провести доказательство, введем следующие определения.

Представим всякий элемент $f \neq u$, $u \in U$, из G в виде

$$f = g_1 g_2 \dots g_m, \quad (1)$$

где $g_i \in A$ либо $g_i \in B$, $g_i \notin U$ и g_i, g_{i+1} – принадлежат разным сомножителям A, B .

Элементы g_i назовем *множителями* слова f . Пусть $l = v_1 v_2 \dots v_n$ – представление (1) элемента l . Будем говорить что в произведении fl имеет место слияние, если $fl = g_1 g_2 \dots g_{m-1} (g_m v_1) v_2 \dots v_n$, где $g_m v_1 \in A$ либо $g_m v_1 \in B$, но $g_m v_1 \notin U$.

В произведении fl имеет место *сокращение*, если $fl = g_1 \dots g'_{m-1} v_2 \dots v_n$ и $g'_{m-1} = g_{m-1} u$, $u = g_m v_1$ и $u \in U$, причем между словами $g_1 \dots g'_{m-1}$, $v_2 \dots v_n$ возможно либо сокращение, либо слияние.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00767.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует элемент $b \in B$ такой, что $U b U \neq U b^{-1} U$. Пусть $f = g_1 g_2 \dots g_m$ – представление (1) элемента f .

Если $g_j \in B$ и $g_j = u' b^\varepsilon u''$, где $u', u'' \in U, \varepsilon = \pm 1$, то заменим g_j на $u' b^\varepsilon u''$, причем если $1 < j < m$, то u' присоединяем к g_{j-1} , а u'' к g_{j+1} . Если $j = 1$, то $f = u' b^\varepsilon u'' g_2 \dots g_m$ и u'' присоединим к g_2 , а u' оставим. Если $j = m$, то $f = g_1 g_2 \dots g_{m-1} u' b^\varepsilon u''$. В этом случае u' присоединяем к g_{m-1} , а u'' оставим.

Такое представление назовем *специальной формой* элемента f . Если $f \in U$, то его специальная форма совпадает с этим элементом. Рассмотрим случай, когда φ – собственное некоммутаторное слово. Если случается, что элемент b встречается в специальной форме слова x более двух раз, то отрезок слова x от одного появления b до другого назовем b -отрезком длины $2r - 1$, где $2r - 1$ – количество множителей между двумя b .

Обозначим $\sigma_k(x)$ количество b -отрезков длины $2k - 1, k \in \mathbb{N}$, в x и $\sigma_k^*(x)$ количество b^{-1} -отрезков длины $2k - 1$.

Пусть $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \varphi^*(x)$, где φ^{*x} – коммутаторное слово. Пусть $e = \text{НОД}(r_1, \dots, r_n)$; так как φ – собственное, то $e \neq 1$.

Определим $\gamma(x)$ как количество b -отрезков длины $2k - 1$, для которых $\sigma_k(x) \not\equiv \sigma_k^*(x) \pmod{e}$.

Покажем, что для каждого фиксированного целого $p > 1$ функция γ ограничена на произведении числа p φ -значений, но неограничена на $\varphi(G)$.

Для любого $x \in G$

$$\sigma_k(x) = \sigma_k^*(x^{-1}), \quad (2)$$

$$\gamma(x) = \gamma(x^{-1}), \quad (3)$$

$$\sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(x^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}) = 0. \quad (4)$$

Введем, далее, следующее обозначение: если ψ_k и v_k – функции, зависящие от параметра k , принимающего целые неотрицательные значения, то запись $\psi_k =_l v_k$ означает, что $\psi_k = v_k$ для всех значений параметра k , за исключением не более l значений.

ЛЕММА 1. Для любых двух $x, y \in G$

$$\sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) =_l \sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y),$$

где $l = 9$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если одно из x, y принадлежит U либо x, y принадлежит одному из множителей A, B , то доказательство очевидно. Рассмотрим случаи, когда x и y не принадлежат U .

СЛУЧАЙ 1. Пусть $x = g_1 \dots g_m, y = v_1 v_2 \dots v_n$ в специальной форме и последний слог слова x и начальный слог слова y одновременно не лежат ни в A , ни в B .

Тогда на стыке xy мы не можем выделить элемент b . Следовательно, b -отрезки xy – это b -отрезки x плюс b -отрезки y плюс отрезок от последнего b в x до первого b в y . Следовательно, $\sigma_k(xy) =_1 \sigma_k(x) + \sigma_k(y)$.

Аналогично,

$$\sigma_k^*(xy) =_1 \sigma_k^*(x) + \sigma_k^*(y).$$

Таким образом,

$$\sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) =_2 \sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y).$$

СЛУЧАЙ 2. В произведении xy имеет место слияние, т.е. $g_mv_1 \in A$ либо $g_mv_1 \in B$, но $g_mv_1 \notin U$. Если $g_mv_1 \in B$ и $g_mv_1 = u'b^\varepsilon u''$ ($u', u'' \in U, \varepsilon = \pm 1$), то g_mv_1 заменим на $u'b^\varepsilon u''$, присоединяя u' к g_{m-1} , а u'' к v_2 . Положим $g'_{m-1} = g_{m-1}u'$, $t = b^\varepsilon$, $v'_2 = u''v_2$. Если такого преобразования сделать нельзя, то $g'_{m-1} = g_{m-1}$, $t = g_mv_1$, $v'_2 = v_2$. Обозначим $\bar{x} = g_1 \dots g_{m-1}t$, $y' = v'_2 \dots v_n$. Теперь к $\bar{x}y'$ применим случай 1. Следовательно, $\sigma_k(\bar{x}y') - \sigma_k^*(\bar{x}y') = {}_2\sigma_k(\bar{x}) - \sigma_k^*(\bar{x}) + \sigma_k(y') - \sigma_k^*(y')$.

В зависимости от g_m, v_1, t возможны следующие случаи.

Пусть $v_1 = u_2b, u_2 \in U$. Тогда $\sigma_k(y) = {}_1\sigma_k(y'), \sigma_k^*(y) = \sigma_k^*(y')$.

1) $g_m = bu_1, t = b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$. Следовательно, $l = 3$.

2) $g_m = bu_1, t = b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 5$.

3) $\sigma_m = bu_1, t \neq b, b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 4$.

4) $g_m = b^{-1}u_1, u_1 \in U, t = b$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 5$.

5) $g_m = b^{-1}u_1, u_1 \in U, t = b^{-1}$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 3$.

6) $g_m = b^{-1}u_1, t \neq b, b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 4$.

7) $\sigma_m \neq b^{-1}u_1, bu_1, t = b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 4$.

8) $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1, t = b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 4$.

9) $g_m \neq b^{-1}u_1, bu_1, t \neq b^{-1}, b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 3$.

Следующие случаи 10)–18) получаются, если $v_1 = u_2b^{-1}$. Они рассматриваются аналогично.

Рассмотрим случаи, когда $v_1 \neq u_2b, u_2b^{-1}, u_2 \in U$. Здесь $\sigma_k(y) = \sigma_k(y'), \sigma_k^*(y) = \sigma_k^*(y')$.

19) $g_m = bu_1, t = b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 2$.

20) $g_m = bu_1, t = b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 4$.

21) $g_m = bu_1, t \neq b^{-1}, b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 3$.

22) $g_m = b^{-1}u_1, t = b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 4$.

23) $g_m = b^{-1}u_1, t = b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 4$.

24) $g_m \neq bu_1, b^{-1}u_1, t = b, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = {}_1\sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 3$.

25) $g_m \neq bu_1, b^{-1}u_1, t = b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 3$.

26) $g_m \neq bu_1, b^{-1}u_1, t \neq b, b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = \sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 2$.

27) $g_m = b^{-1}u_1, t \neq b^{-1}, u_1 \in U$; тогда $\sigma_k(x) = \sigma_k(\bar{x}), \sigma_k^*(x) = {}_1\sigma_k^*(\bar{x})$ и $l = 3$.

СЛУЧАЙ 3. Если на стыке слов x и y происходит сокращение, то получаем элемент $u \in U$, который присоединяем к последнему слогу в x , т.е. если $x = g_1 \dots g_m, y = v_1 \dots v_n$, то $xy = g_1 \dots g'_{m-1}v_2 \dots v_n$, где $g'_{m-1} = g_{m-1}u, u \in U$, и т.д. Последний шаг – слияние. Единственное исключение, когда $xy = u$. В этом случае $x = uy^{-1}$ и результат очевиден.

Пусть $x_1 = g_1 \dots g'_i, g'_i = g_iu, u \in U, y_1 = v_{m-i+1} \dots v_n$ те части x и y , которые не сократились, т.е. между x_1, y_1 происходит слияние.

Пусть $z = g_{i+1} \dots g_m, z^{-1} = v_1 \dots v_{m-i}$.

Для x можно записать

$$\sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) = {}_2\sigma_k(x_1) - \sigma_k^*(x_1) + \sigma_k(z) - \sigma_k^*(z). \quad (5)$$

Аналогично,

$$\sigma_k(y) - \sigma_k^*(y) = {}_2\sigma_k(y_1) - \sigma_k^*(y_1) + \sigma_k(z^{-1}) - \sigma_k^*(z^{-1}). \quad (6)$$

Используя (4), имеем из (5) и (6)

$$\sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y) =_4 \sigma_k(x_1) - \sigma_k^*(x_1) + \sigma_k(y_1) - \sigma_k^*(y_1).$$

Кроме того, $\sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) = \sigma_k(x_1y_1) - \sigma_k^*(x_1y_1)$. Используя случай 2,

$$\sigma_k(x_1y_1) - \sigma_k^*(x_1y_1) =_5 \sigma_k(x_1) - \sigma_k^*(x_1) + \sigma_k(y_1) - \sigma_k^*(y_1).$$

Следовательно,

$$\sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) =_9 \sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y).$$

ЛЕММА 2. Для любых двух $x, y \in G$

$$\gamma(xy) \leq \gamma(x) + \gamma(y) + 9.$$

Этот результат непосредственно следует из леммы 1.

ЛЕММА 3. Для любого $[x, y] \in G$ $\gamma([x, y]) \leq 27$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_k([x, y]) - \sigma_k^*([x, y]) &= {}_9 \sigma_k(x^{-1}y^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}y^{-1}) + \sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy), \\ \sigma_k(x^{-1}y^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}y^{-1}) &= {}_9 \sigma_k(x^{-1}) - \sigma_k^*(x^{-1}) + \sigma_k(y^{-1}) - \sigma_k^*(y^{-1}), \\ \sigma_k(xy) - \sigma_k^*(xy) &= {}_9 \sigma_k(x) - \sigma_k^*(x) + \sigma_k(y) - \sigma_k^*(y). \end{aligned}$$

Эти три равенства вместе с (2) дают

$$\sigma_k([x, y]) - \sigma_k^*([x, y]) =_{27} 0.$$

Таким образом, $\gamma([x, y]) \leq 27$.

ЛЕММА 4. Для любого $x \in G$ $\gamma(x^e) \leq 20$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x = u$, $x \in A$ либо $x \in B$, то доказательство леммы очевидно.

Рассмотрим остальные случаи. Пусть для элемента x^e имеем $x^e = z^{-1}y^ez$, где специальная форма y начинается и заканчивается на элементы из разных сомножителей A, B .

Если $y \in A$ (либо $y \in B$), то $\sigma_k(y^e) = \sigma_k^*(y^e) = 0$.

В остальных случаях

$$\sigma_k(y^e) = {}_1 e\sigma_k(y), \quad \sigma_k^*(y^e) = {}_1 e\sigma_k^*(y).$$

Следовательно, $\sigma_k(y^e) - \sigma_k^*(y^e) \equiv {}_2 0 \pmod{e}$. Следовательно, из

$$\sigma_k(x^e) - \sigma_k^*(x^e) = {}_{18} \sigma_k(y^e) - \sigma_k^*(y^e)$$

имеем $\gamma(x^e) \leq 20$.

Очевидно, что для любой группы G e -я степень каждого элемента из G есть φ -значение.

Положим

$$z_j = (ab)^e (ab^2)^{2e} (ab)^e (ab^2)^{3e} (ab)^e \dots (ab^2)^{je} (ab)^e.$$

При этом $z_j \in \varphi(G)$ для любого j . Кроме того, $\gamma(z_j) \geq j - 1$. И здесь один и только один b -отрезок длины $2e \cdot i + 1$, $i = 2, 3, \dots, j$, исключая b^{-1} -отрезки этих длин.

Следовательно, $\varphi(G)$ содержит элементы произвольно больших значений γ .

φ^* – коммутаторное слово и поэтому записывается как произведение s -коммутаторов для некоторого целого $s = s(\varphi^*)$. По леммам 2 и 3 $\gamma(\varphi^*(x)) \leq 27s + 9(s - 1)$. Так как e делит r_i , то $\gamma(x_i^{r_i}) \leq 20$ по лемме 4. Следовательно,

$$\gamma(\varphi(x)) \leq 20n + 9n + 27s + 9(s - 1) = 36s + 29n - 9,$$

и если x – произведение m φ -значений, то

$$\gamma(x) \leq (36s + 29n - 9) + 9(m - 1).$$

Если задано φ , то определены целые n и s . Но γ может быть сколь угодно большим. Следовательно, мы доказали теорему для собственного некоммутаторного слова φ .

Покажем, что теорема справедлива и для коммутаторных слов. Как и раньше, пусть специальная форма x есть $g_1 g_2 \dots g_n$. Пусть (x, b) указывает кратность b в x , т. е. количество b в специальной форме.

Аналогично, пусть (x, b^{-1}) – кратность b^{-1} в x .

Положим $w(x) = (x, b) - (x, b^{-1})$. Тогда

$$w(x) + w(x^{-1}) = 0.$$

ЛЕММА 5. Для любых x, y из G

$$w(x) + w(y) - 3 \leq w(xy) \leq w(x) + w(y) + 3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая, когда одно из $x, y \in U$ либо x, y принадлежат одному из множителей A, B , доказательство очевидно.

Пусть $x = g_1 \dots g_m$, $y = v_1 \dots v_n$ в специальных формах.

СЛУЧАЙ 1. В слове xy нет ни слияния, ни сокращения. В этом случае количество b в xy равно количеству b в x плюс количество b в y . Следовательно, $w(xy) = w(x) + w(y)$.

СЛУЧАЙ 2. В этом случае xy на стыке имеет слияние. Здесь объединяется g_m с v_1 . Используя доказательство леммы 1, запишем

$$\bar{x} = g_1 \dots g'_{m-1} t, \quad y' = v'_2 \dots v_n;$$

$\bar{x}y'$ на стыке не имеет ни объединений, ни сокращений. Поэтому применим случай 1. Таким образом, $w(xy) = w(\bar{x}) + w(y')$.

Так как только один множитель v_1 убирается при переходе от y к y' , то, следовательно, имеем

$$w(y') - 1 \leq w(y) \leq w(y') + 1.$$

Так как при замене x на $\bar{x}$ количество b может уменьшиться не более чем на 2, то

$$w(\bar{x}) - 2 \leq w(x) \leq w(\bar{x}) + 2.$$

Таким образом,

$$w(\bar{x}) + w(y') - 3 \leq w(x) + w(y) \leq w(\bar{x}) + w(y') + 3$$

или

$$w(xy) - 3 \leq w(x) + w(y) \leq w(xy) + 3.$$

В общем случае произведение xy влечет за собой сокращение и слияние.

Пусть $z = g_{i+1} \dots g_m$, а $z^{-1} = v_1 \dots v_{m-i}$ и g_i, v_{m-i+1} сливаются. Как и раньше, запишем $\bar{x} = g_1 \dots g'_i$, $y' = v_{m-i+1} \dots v_n$. Тогда $w(x) = w(\bar{x}) + w(z)$. Аналогично, $w(y) = w(z^{-1}) + w(y')$. Поэтому $w(x) + w(y) = w(\bar{x}) + w(y')$. По случаю 2 $w(\bar{x}y') - 3 \leq w(\bar{x}) + w(y') \leq w(\bar{x}y') + 3$. Но $w(xy) = w(\bar{x}y')$. Поэтому $w(xy) - 3 \leq w(x) + w(y) \leq w(xy) + 3$.

ЛЕММА 6. Для любых $x, y \in G$

$$|w(xy)| \leq |w(x)| + |w(y)| + 3.$$

Этот результат непосредственно следует из леммы 6.

ЛЕММА 7. Для любого $[x, y] \in G$ $|w(x, y)| \leq 9$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат получается тремя последовательными применениями леммы 5:

$$\begin{aligned} w(x^{-1}y^{-1}) + w(xy) - 3 &\leq w([x, y]) \leq w(x^{-1}y^{-1}) + w(xy) + 3, \\ w(x^{-1}) + w(y^{-1}) - 3 &\leq w(x^{-1}y^{-1}) \leq w(x^{-1}) + w(y^{-1}) + 3, \\ w(x) + w(y) - 3 &\leq w(xy) \leq w(x) + w(y) + 3. \end{aligned}$$

Следовательно, $-9 \leq w([x, y]) \leq 9$.

ЛЕММА 8. G имеет бесконечную ширину для любого собственного коммутаторного слова φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как собственное коммутаторное слово φ может быть представлено в виде произведения s коммутаторов для некоторого целого $s = s(\varphi)$, то любой элемент z , являющийся произведением m φ -значений, должен удовлетворять неравенству $|w(z)| \leq 12sm - 3$ по леммам 6 и 7. Выберем любой элемент $a \neq u \in A$. Пусть b удовлетворяет условию теоремы 2. Тогда $b^2 \neq 1$ и G содержит нетривиальное свободное произведение $G_1 = \langle ababa \rangle * \langle bab \rangle$, и так как G_1 не бесконечно определенная группа диэдра, она имеет своей подгруппой свободную группу бесконечного ранга. Таким образом, $\varphi(G_1) \neq 1$.

Беря, если необходимо, сопряженное, считаем, что $\varphi(G_1)$ содержит элемент $1 \neq g = (ababa)^{m_1}(bab)^{n_1} \dots (ababa)^{m_r}(bab)^{n_r}$.

Так как g – коммутаторное слово, то r не меньше 2.

Если $|w(g)| > 0$, то для всякого положительного целого t $|w(g^t)| \geq t$, так как для произведения $g \cdot g$ применим случай 1 леммы 5. Если $w(g) = 0$, то выберем γ следующим образом. Если $n_r \neq 1$, то выберем γ , удовлетворяющее условию $n_r + \gamma = 1$. Если $n_r = 1$, то выберем γ , удовлетворяющее условию $\gamma + n_r = -1$. Пусть $g_1 = b^{-\gamma}gb^\gamma$ и для $t > 1$ $g_t = b^{-\gamma}g_{t-1}gb^\gamma = b^{-\gamma t}(gb^\gamma)^t$. Очевидно, $g_t \in \varphi(G)$.

В силу выбора γ , если $n_r \neq 1$, то $(gb^\gamma, b) = (g, b) + 1$ и $(gb^\gamma, b^{-1}) = (g, b^{-1}) - 1$. Если $n_r = 1$, то $(gb^\gamma, b^{-1}) = (g, b^{-1}) + 1$ и $(gb^\gamma, b) = (g, b) - 1$. Таким образом, $w(g) = 0$ и $w(gb^\gamma) \neq 0$.

Левый конец множителя gb^γ лежит в A , и правый конец лежит в B . Следовательно, в произведении $gb^\gamma \cdot gb^\gamma$ нет слияния. Поэтому применим случай 1 леммы 5 и для любого положительного t

$$|w(gb^\gamma)^t| = t \cdot |w(gb^\gamma)| \geq t.$$

Нас интересует $|w|$ -значение $g_t = b^{-\gamma t}(gb^\gamma)^t$. Так как $|w(b^{-\gamma t})| \leq 1$, по случаю 1 леммы 5 $w(g_t) = w((gb^\gamma)^t) + w(b^{-\gamma t})$. Следовательно, $|w(g_t)| \geq t - 1$.

Завершая доказательство леммы, мы завершаем и доказательство теоремы 2.

Отметим, что лемма 8 непосредственно следует из предложения 1 работы [4], доказательство которого проведено другими методами.

В теореме 1 рассмотрен вопрос о ширине собственной вербальной подгруппы в $G = A *_U B$, где $|A : U| \geq 3$ и $|B : U| \geq 2$ и U – нормальная подгруппа как в A , так и в B . Интерес представляет случай, когда $|A : U| \leq 2$ и $|B : U| \leq 2$. Если при этом U является подгруппой бесконечной ширины относительно собственного слова, то, как показано в [5], G имеет бесконечную ширину. Рассмотрим случай, когда U – подгруппа конечной ширины.

ЛЕММА 9 [6]. Если $A \triangleleft G$ и φ – собственное слово, то

$$\text{wid}(G, \varphi) \leq \text{wid}(G/A, \varphi) + \text{wid}(\varphi(G) \cap A, \varphi).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $G = A *_U B$, $|A : U| \leq 2$ и $|B : U| \leq 2$, U – подгруппа конечной ширины. Тогда ширина собственной вербальной подгруппы $\varphi(G)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай, когда $|A : U| = |B : U| = 2$ и, следовательно, $U \triangleleft A$ и $U \triangleleft B$. Из результата [2] следует, что $\text{wid}(G/U, \varphi) < \infty$. Так как U имеет конечную ширину, то $\text{wid}(\varphi(G) \cap U, \varphi) < \infty$. По лемме 9 имеем $\text{wid}(G, \varphi) < \infty$. Остальные случаи очевидны.

Автор благодарит В. Н. Безверхнего за помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. 2-е изд. М.: Наука, 1987.
- [2] Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. V. 64. № 3. P. 573–584.
- [3] Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 5. С. 494–517.
- [4] Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 546–550.
- [5] Добрынина И. В. К вопросу о ширине в свободном произведении с объединением // Известия Тульского гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информатика. 1999. Т. 5. № 1. С. 114–115.
- [6] Романьков В. А. О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 1. С. 60–72.

Тульский государственный педагогический университет

Поступило

01.06.1999

Исправленный вариант

17.03.2000