Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Мамонтов, Оценки глобальной регулярности для многомерных уравнений сжимаемой неньютоновской жидкости, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 360–376

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:08:39

УДК 517.953

ОЦЕНКИ ГЛОБАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

А. Е. Мамонтов

Работа посвящена вопросу существования “в целом” достаточно регулярных решений двух- и трехмерных уравнений сжимаемой нелинейно-вязкой жидкости. Для случая потенциального тензора напряжений разработана техника вывода энергетических тождеств, не содержащих производных от плотности. На основе этих тождеств для достаточно быстро растущих потенциалов получена развернутая система априорных оценок для указанных уравнений. Также рассматривается смежный вопрос об оценке решений нелинейной эллиптической системы, связанной с тензором напряжений.

Библиография: 11 названий.

В данной статье изучается система уравнений, описывающая движение вязких сжимаемых жидкостей (без учета тепловых явлений), которую мы запишем в следующем виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (0.1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{w} + \mathbf{f}, \quad (0.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbb{P} = \rho \mathbf{w}. \quad (0.3)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\mathbb{P}$ – тензор напряжений, $\mathbf{w}$ – вспомогательный вектор (играющий в дальнейшем важную роль), $\mathbf{f}$ – вектор внешних массовых сил; все указанные величины являются функциями от времени t и пространственных переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. При этом операторы div и ∇ действуют по $\mathbf{x}$, а

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (0.4)$$

(материальная производная). Величины ρ и $\mathbf{u}$ искомые, $\mathbf{f}$ задано, а $\mathbb{P}$ задается заранее как некоторая функция от ρ и $\mathbf{u}$; вид этой функции (называемой *определяющим уравнением для напряжений*) зависит от конкретной физической модели. При этом требование инвариантности модели относительно системы координат приводит к ограничению класса определяющих уравнений изотропными связями, представимыми в виде [1]

$$\mathbb{P} = \sum_{s \geq 0} \beta_s(\rho, J_1(\mathbb{D}), \dots, J_n(\mathbb{D})) \mathbb{D}^s, \quad (0.5)$$

где $J_i(\mathbb{D})$ суть основные инварианты тензора скоростей деформаций $\mathbb{D}$ (определен ниже), а β_s – некоторые функции. Обычно в (0.5) пишут сумму по $s \leq n-1$ (это не меняет класса в силу теоремы Гамильтона–Кэли), однако нам удобнее оставить высшие степени для более прозрачной формулировки свойств коэффициентов β_s , которую мы сделаем позднее.

Если связь (0.5) линейна по отношению к $\mathbb{D}$, т.е. имеет вид

$$\mathbb{P} = (-p(\rho) + \beta(\rho) \operatorname{tr} \mathbb{D}) \mathbb{I} + \gamma(\rho) \mathbb{D}$$

($\mathbb{I}$ – единичный тензор, p – давление, при этом, как правило, так называемые коэффициенты вязкости β и γ полагают постоянными), то говорят, что (0.1)–(0.5) представляет собой модель ньютоновской жидкости, иначе – неньютоновской. Математическая теория как тех, так и других содержит множество нерешенных вопросов, начиная от проблемы корректности в целом по времени и входным данным, для которой (в случае $n \geq 2$) либо нет удовлетворительного решения, либо делаются первые шаги в этом направлении. Для ньютоновской модели упомянем работу [2], где доказана глобальная корректность при $n = 2$, и монографию [3], в которой изучаются глобальные (но “слабые”) решения при произвольном n . Изучение неньютоновских моделей стимулируется, таким образом, помимо собственного интереса еще и поиском путей к построению глобальной теории для системы (0.1)–(0.4) вообще. Современное состояние математической теории неньютоновских жидкостей отражено в монографии [4], где изучаются достаточно подробно только однородные несжимаемые жидкости (т.е. модели с $\rho \equiv \text{const}$), сжимаемые же почти не рассматриваются (получены только весьма слабые мерозначные решения). В более сильных классах разрешимость уравнений (0.1)–(0.4) доказана (при произвольном n) в работах [5]–[7], однако вопрос о повышении гладкости построенных решений по-прежнему открыт. Этому вопросу и посвящена данная работа. Здесь мы существенно опираемся на технику оценок для уравнений Навье–Стокса сжимаемой жидкости, развитую в [2] для двумерных ньютоновских уравнений.

Уточним некоторые обозначения и соотношения. Символом $\mathbb{D}(\mathbf{a})$ будем обозначать тензор симметрической части производных векторного поля $\mathbf{a}$:

$$\mathbb{D}(\mathbf{a}) = \operatorname{Sym}(\nabla \otimes \mathbf{a}) = \frac{(\nabla \otimes \mathbf{a}) + (\nabla \otimes \mathbf{a})^*}{2},$$

т.е.

$$D_{ij}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right),$$

причем для $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ будем писать просто $\mathbb{D}$ (тензор скоростей деформаций). Символ “ $\otimes$ ” означает тензорное произведение: $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$.

В дальнейшем мы ограничимся определяющими уравнениями (для напряжений) вида

$$\mathbb{P} = -p(\rho) \mathbb{I} + \frac{\partial V(\mathbb{D})}{\partial \mathbb{D}}, \quad (0.6)$$

где V – так называемый потенциал, а $\partial V / \partial \mathbb{D}$ есть тензор с компонентами $\partial V(\mathbb{D}) / \partial D_{ij}$. Если V – (скалярная) функция $\mathbb{D}$ как тензора (т.е. изотропная функция), то $\partial V / \partial \mathbb{D}$ действительно является тензором, т.е. изотропной функцией, и тогда (0.6) есть частный случай (0.5) (однако в п. 1 и в начале п. 2 изотропность V не требуется, достаточно лишь

симметричности $\partial V/\partial \mathbb{D}$). Будем рассматривать также высшие производные $\partial^2 V/\partial \mathbb{D}^2$ и $\partial^3 V/\partial \mathbb{D}^3$ (представляющие собой тензоры четвертого и шестого ранга соответственно), трактуемые как билинейная и трилинейная формы над тензорами второго ранга:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} A_{ij} B_{kl}, \\ \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbb{D}^3} \langle \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \rangle &= \sum_{i,j,k,l,\sigma,\tau=1}^n \frac{\partial^3 V}{\partial D_{ij} \partial D_{kl} \partial D_{\sigma\tau}} A_{ij} B_{kl} C_{\sigma\tau}.\end{aligned}$$

Напомним стандартные обозначения для тензоров второго ранга:

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}, \quad |\mathbb{A}| = (\mathbb{A} : \mathbb{A})^{1/2}, \quad \text{tr } \mathbb{A} = \mathbb{A} : \mathbb{I}$$

(при этом отметим, что $|\cdot|$ является нормой в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и потому обладает всеми свойствами операторной нормы; в частности, $|\mathbb{A}\mathbb{B}| \leq |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}|$, и аналогично $|\cdot|$ для тензоров высокого ранга. В дальнейшем под словом “тензор” будем, если не оговорено противное, подразумевать тензор второго ранга.

1. Вывод энергетических тождеств: абстрактная схема. При выводе априорных оценок системы (0.1)–(0.4) фундаментальную роль играют так называемые энергетические тождества – дифференциальные уравнения (по t) для специальных функционалов от решения. Мы выводим их (в этом пункте) достаточно стандартным способом из системы (0.1)–(0.4), рассматриваемой как уравнения для величин $(\rho, \mathbf{u})$, и подходящим образом (а именно так, чтобы не возникали новые производные от плотности) построенных ее дифференциальных продолжений, рассматриваемых как уравнения для величин (ρ, V) , $(\rho, \mathbf{w})$, $(\rho, \nabla \otimes \mathbf{w})$ и т.д. При этом основные операции (в том числе построение дифференциальных продолжений) производятся над уравнением импульса (0.2), а уравнение неразрывности (0.1) и вспомогательное уравнение (0.3) играют роль своеобразных связей, позволяющих исключать возникающие производные от ρ .

Прежде всего введем в рассмотрение скобки (для целых $k \geq 0$)

$$[\mathbb{A}, \mathbf{a}]^{(k)} = \sum_{|\alpha|=k} (D_{\mathbf{x}}^{\alpha} \mathbb{A})(D_{\mathbf{x}}^{\alpha} \mathbf{a}), \quad [\mathbb{A}, \mathbf{a}]_{(1)} = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i$$

($\mathbf{e}_i$ – базисные векторы, $\mathbb{A}$ – тензор, $\mathbf{a}$ – вектор, значения скобок – векторы), а также отметим правило коммутации операторов ∇ и d/dt :

$$\nabla \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \nabla H + (\nabla \otimes \mathbf{u}) \nabla H \quad (1.1)$$

(H – произвольная скалярная функция), из которого, в частности, следуют соотношения

$$\mathbb{D} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) = \frac{d\mathbb{D}}{dt} + \mathbb{C}, \quad \text{где } \mathbb{C} = \text{Sym}((\nabla \otimes \mathbf{u})^2), \quad (1.2)$$

$$\text{div} \frac{d\mathbb{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \text{div } \mathbb{A} + [\mathbb{A}, \mathbf{u}]_{(1)}. \quad (1.3)$$

Предположим, что имеется достаточно гладкое решение системы (0.1)–(0.4), (0.6) в цилиндре $(a, b) \times \Omega$ (где Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей или параллелепипед), и выведем при $a < t < b$ энергетические тождества.

Умножив (0.1) на $|\mathbf{u}|^2/2$, (0.2) на $\rho \mathbf{u}$ и сложив, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \right) = \operatorname{div}(\mathbb{P} \mathbf{u}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D} + p \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}. \quad (1.4)$$

Введя в рассмотрение функцию

$$h(\xi) = \xi \int_1^\xi \eta^{-2} p(\eta) d\eta,$$

из (0.1) выведем соотношение

$$\frac{\partial h(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(h(\rho) \mathbf{u}) + p(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

сложив которое с (1.4) и проинтегрировав по Ω , получим первое энергетическое тождество

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + h(\rho) \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} \left(\mathbb{P} \mathbf{u} - \left(\frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + h(\rho) \right) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пользуясь (1.2), (0.2) и (0.3), выведем уравнение для V , преобразовав выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\mathbb{P} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) &= \mathbb{P} : \mathbb{D} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \operatorname{div} \mathbb{P} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbb{P} : \frac{d\mathbb{D}}{dt} + \mathbb{P} : \mathbb{C} + \rho \mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{f}) \\ &= \frac{dV}{dt} - p \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbb{P} : \mathbb{C} + \rho |\mathbf{w}|^2 + \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Перебрасывая оператор d/dt с $\operatorname{div} \mathbf{u}$ на p и учитывая соотношение

$$\frac{dp}{dt} = -\rho p'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (1.6)$$

(следствие (0.1)), после интегрирования по Ω получим второе энергетическое тождество

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (V - p \operatorname{div} \mathbf{u}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (V - p \operatorname{div} \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \left(\rho p'(\rho) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 - \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} - \mathbb{P} : \mathbb{C} \right) d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} \left(\mathbb{P} \frac{d\mathbf{u}}{dt} - (V - p \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если “исходить” от выражения

$$\operatorname{div} \left(\mathbb{P} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right),$$

то нетрудно получить другой вариант этого тождества:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} V \, dx + \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 \, dx = \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{f}) \, dx + \int_{\Omega} p \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} \, dx + \int_{\partial \Omega} \left(\mathbb{P} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (1.8)$$

от которого, однако, можно ожидать пользы только в модели Бюргерса (т.е. при $p(\rho) \equiv 0$) ввиду наличия в правой части “неустранимого” второго интеграла.

Выведем дифференциальное продолжение уравнения импульса (0.2), применив к нему операцию $\mathbb{D}(\cdot)$ с учетом (1.2):

$$\frac{d\mathbb{D}}{dt} + \mathbb{C} = \mathbb{D}(\mathbf{w}) + \mathbb{D}(\mathbf{f}), \quad (1.9)$$

и применим к (1.9) операцию $\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{D}(\mathbf{w}), \cdot \rangle$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{D}(\mathbf{w}), \mathbb{D}(\mathbf{w}) \rangle + \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{D}(\mathbf{w}), \mathbb{D}(\mathbf{f}) - \mathbb{C} \rangle = \mathbb{D}(\mathbf{w}) : \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}. \quad (1.10)$$

С целью вывода уравнения для ρ , $\mathbf{w}$ преобразуем правую часть (1.10) (с учетом (1.3), (0.3), (0.1) и (1.6)):

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\mathbf{w}) : \frac{d}{dt} (\mathbb{P} + p\mathbb{I}) &= \operatorname{div} \left(\frac{d\mathbb{P}}{dt} \mathbf{w} \right) - \mathbf{w} \cdot \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{w}) - \mathbf{w} \cdot [\mathbb{P}, \mathbf{u}]_{(1)} + \frac{dp}{dt} \operatorname{div} \mathbf{w} \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{d\mathbb{P}}{dt} \mathbf{w} \right) - \rho \frac{d}{dt} \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + \rho |\mathbf{w}|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &\quad - \mathbf{w} \cdot [\mathbb{P}, \mathbf{u}]_{(1)} - \rho p'(\rho) (\operatorname{div} \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

В итоге (1.10), сложенное с (0.1), умноженным на $|\mathbf{w}|^2/2$, после интегрирования по Ω дает третье энергетическое тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho |\mathbf{w}|^2}{2} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{D}(\mathbf{w}), \mathbb{D}(\mathbf{w}) \rangle \, dx \\ = \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \\ + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{D}(\mathbf{w}), \mathbb{D}(\mathbf{f}) - \mathbb{C} \rangle - \mathbf{w} \cdot [\mathbb{P}, \mathbf{u}]_{(1)} - \rho p'(\rho) (\operatorname{div} \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w} \right) \, dx \\ + \int_{\partial \Omega} \left(\frac{d\mathbb{P}}{dt} \mathbf{w} - \frac{\rho |\mathbf{w}|^2}{2} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.11) входят производные от ρ (через p в члене $[\mathbb{P}, \mathbf{u}]_{(1)}$), однако их можно убрать, воспользовавшись очевидным тождеством

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot [p\mathbb{I}, \mathbf{u}]_{(1)} \, dx = - \int_{\Omega} p((\nabla \otimes \mathbf{u})^* : (\nabla \otimes \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) \, dx + \int_{\partial \Omega} p((\nabla \otimes \mathbf{u})^* \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Процесс вывода энергетических тождеств может быть продолжен и далее, но при этом более не удастся избежать появления производных от ρ , что, впрочем, не мешает

получению оценок, так как уже вторая энергетическая оценка (следствие (1.7) или (1.8)) заведомо позволяет оценить $\nabla \rho$ (см. п. 4). Продemonстрируем вывод четвертого энергетического тождества. С этой целью сделаем еще одно дифференциальное продолжение уравнения импульса. Взяв $\partial/\partial x_k$ от (1.9) и применив к полученному уравнению операцию

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \cdot \right\rangle,$$

получим равенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbb{D}}{dt} \right\rangle = \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{f})}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (1.12)$$

С другой стороны, имеем два представления одного и того же выражения: первое – следствие определения (0.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k} : \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbb{P}}{dt} &= -\frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{w}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbb{D}}{dt} \right\rangle \\ &\quad + \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbb{D}^3} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k}, \frac{d\mathbb{D}}{dt} \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.13)$$

а второе – следствие (1.3), (0.1) и (0.3):

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) : \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbb{P}}{dt} &= \operatorname{div} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbb{P}}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div} \frac{d\mathbb{P}}{dt} \\ &= \operatorname{div} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbb{P}}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \cdot \left(\mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{u}) \right. \\ &\quad \left. - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbf{w}}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{d\mathbf{w}}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} [\mathbb{P}, \mathbf{u}]_{(1)} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Наконец, рассмотрим равенство (вытекающее из (1.1))

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbf{w}}{dt} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j},$$

умножив которое на $\rho(\partial \mathbf{w}/\partial x_k)$ и сложив с (0.1), умноженным на $|\partial \mathbf{w}/\partial x_k|^2/2$, выведем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right|^2 \right) + \frac{\rho}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbf{w}}{dt} - \rho \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k},$$

что после интегрирования по Ω с учетом (1.12)–(1.14), (1.6) и (1.9) дает четвертое энергетическое тождество

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho |\nabla \otimes \mathbf{w}|^2}{2} dx + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k} \right\rangle dx$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{f})}{\partial x_k} \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbb{D}^3} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k}, \mathbb{C} - \mathbb{D}(\mathbf{w}) - \mathbb{D}(\mathbf{f}) \right\rangle \right) dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \cdot \left(\mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) - \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{w}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho p'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) \right) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\rho (\nabla \otimes \mathbf{w}) : (\nabla \otimes (\mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{u})) - (\nabla \otimes \mathbf{w}) : (\nabla \otimes [\mathbb{P}, \mathbf{u}]_{(1)}) \right. \\
&\quad \left. - \rho \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx + \int_{\partial \Omega} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d\mathbb{P}}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} - \frac{\rho |\nabla \otimes \mathbf{w}|^2}{2} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} dS. \tag{1.15}
\end{aligned}$$

2. Оценки для нелинейной эллиптической системы (0.3). Энергетические тождества (1.5), (1.7), (1.8), (1.11) и (1.15) содержат в правой части нелинейные выражения от производных от $\mathbf{u}$, а в левой части положительные (в случае знакоопределенности квадратичной формы $\partial^2 V / \partial \mathbb{D}^2$) слагаемые, позволяющие оценить $\mathbf{w}$. В связи с этим вывод оценок из этих тождеств сводится к умению получать оценки решений (0.3) как эллиптической системы для $\mathbf{u}$. Этому вопросу и посвящен данный пункт. Здесь мы также уточним класс рассматриваемых нами потенциалов V и изучим их свойства.

Итак, рассмотрим нелинейную эллиптическую систему

$$\operatorname{div} \frac{\partial V(\mathbb{D}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbb{D}} = \mathbf{F} \tag{2.1}$$

и получим для нее энергетические тождества, а затем оценки. Снова предполагаем, что Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей или параллелепипед и в Ω имеется достаточно гладкое решение $\mathbf{u}$ системы (2.1). Начнем с абстрактной схемы.

Из (2.1) следует равенство (напомним, что мы предполагаем симметричность тензора $\partial V / \partial \mathbb{D}$)

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div} \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}, \mathbf{u} \right]^{(0)} - \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D},$$

проинтегрировав которое по Ω , получим первое энергетическое тождество

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D} dx = - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}, \mathbf{u} \right]^{(0)} \cdot \mathbf{n} dS. \tag{2.2}$$

Далее, с помощью (2.1) преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} \right)_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} \right)_{ij} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \\
&= \operatorname{div} \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}, \mathbf{u} \right]^{(1)} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k} \right\rangle,
\end{aligned}$$

что после интегрирования по Ω дает второе энергетическое тождество

$$\sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k} \right\rangle dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{u} dx + \int_{\partial \Omega} \left(\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}, \mathbf{u} \right]^{(1)} - (\nabla \otimes \mathbf{u}) \mathbf{F} \right) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.3)$$

Этот процесс может быть продолжен и далее. Продemonстрируем получение третьего энергетического тождества. Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} \right)_{il} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \\ &\quad - \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^n \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial D_{il} \partial D_{pq}} \frac{\partial D_{pq}}{\partial x_k} \right) \\ &= \operatorname{div} \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}, \mathbf{u} \right]^{(2)} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbb{D}^3} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned}$$

После интегрирования по Ω выведем требуемое тождество

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle dx &= - \sum_{j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbb{D}^3} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k} \right\rangle dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nabla \otimes \mathbf{F}) : (\nabla \otimes \Delta \mathbf{u}) dx + \int_{\partial \Omega} \left(\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}, \mathbf{u} \right]^{(2)} - \sum_{j=1}^n \left(\nabla \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} \right) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для того чтобы соотношения (2.2)–(2.4) давали оценки, нужна, как минимум, положительность квадратичной формы

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{A} \rangle \geq 0.$$

Если она имеет место, то тензор $\partial V / \partial \mathbb{D}$ будет положительным и монотонным, т.е.

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D} \geq 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}(\mathbb{D}_1) - \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}(\mathbb{D}_2) \right) : (\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2) \geq 0 \quad (2.5)$$

при дополнительных условиях

$$V(0) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}(0) = 0$$

(доказательство см., например, в [4]), заведомо выполненных для потенциалов V , имеющих смысл в механике жидкости (в силу аксиом Стокса). В [4] выделен некоторый класс потенциалов V , в котором имеют место свойства (2.5) (и даже более сильные свойства коэрцитивности и строгой монотонности), но он по существу сводится к квадратичным: $V = G(|\mathbb{D}|^2)$. Мы же будем рассматривать потенциалы вида

$$V(\mathbb{D}) = \Lambda((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2) + \sum_{s=1}^N \Gamma_s(|\mathbb{D}^s|^2) \quad (2.6)$$

(где N – произвольное натуральное число) с неотрицательными монотонными выпуклыми функциями Λ и Γ_s , получим для них энергетические (п. 2) и другие (п. 4) оценки системы (2.1), а также оценки соответствующих эволюционных уравнений (0.1)–(0.4) (п. 3, 4).

Прежде всего необходимо найти производные V . Непосредственным вычислением проверяется формула

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbb{D}^m \mathbb{A})}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{B} = m \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{m-1} \mathbb{A} \mathbb{B})$$

(справедливая для всех натуральных m и симметричных тензоров $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$), с помощью которой нетрудно последовательно выписать требуемые представления (в которых $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ – постоянные тензоры):

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{A} = 2\Lambda'((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2)(\operatorname{tr} \mathbb{D})(\operatorname{tr} \mathbb{A}) + \sum_{s=1}^N 2s\Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{A}), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle &= \sum_{k,l=1}^n B_{kl} \frac{\partial}{\partial D_{kl}} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{A} \right) \\ &= 2(\Lambda'((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2) + 2(\operatorname{tr} \mathbb{D})^2 \Lambda''((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2))(\operatorname{tr} \mathbb{A})(\operatorname{tr} \mathbb{B}) \\ &\quad + \sum_{s=1}^N (4s^2 \Gamma''_s(|\mathbb{D}^s|^2) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{A}) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{B}) + 2s(2s-1) \Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-2} \mathbb{A} \mathbb{B})), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbb{D}^3} \langle \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \rangle &= \sum_{p,q=1}^n C_{pq} \frac{\partial}{\partial D_{pq}} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle \\ &= 4(3\Lambda''((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2) + 2(\operatorname{tr} \mathbb{D})^2 \Lambda'''((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2))(\operatorname{tr} \mathbb{D})(\operatorname{tr} \mathbb{A})(\operatorname{tr} \mathbb{B})(\operatorname{tr} \mathbb{C}) \\ &\quad + \sum_{s=1}^N (8s^3 \Gamma'''_s(|\mathbb{D}^s|^2) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{A}) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{B}) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{C}) \\ &\quad + 4s^2(2s-1) \Gamma''_s(|\mathbb{D}^s|^2) (\operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-2} \mathbb{A} \mathbb{B}) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{C}) \\ &\quad + \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-2} \mathbb{A} \mathbb{C}) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{B}) + \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-2} \mathbb{B} \mathbb{C}) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-1} \mathbb{A})) \\ &\quad + 2s(2s-1)(2s-2) \Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2) \operatorname{tr}(\mathbb{D}^{2s-3} \mathbb{A} \mathbb{B} \mathbb{C})), \end{aligned} \quad (2.9)$$

(последнее слагаемое в (2.9) при $s = 1$ по определению полагаем нулем).

Отметим некоторые свойства V , вытекающие из (2.7)–(2.9). Из (2.8) вытекает неравенство Коши для формы $\partial^2 V / \partial \mathbb{D}^2$:

$$2 \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle \leq \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{A} \rangle + \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{B}, \mathbb{B} \rangle, \quad (2.10)$$

а также оценка для ее нормы:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{A} \rangle \leq \Phi^2(\mathbb{D}) |\mathbb{A}|^2, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbb{D}) &= \sqrt{2n\Lambda'((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2) + 2|\operatorname{tr} \mathbb{D}|} \sqrt{n\Lambda''((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2)} \\ &+ \sum_{s=1}^N (|\mathbb{D}^{s-1}| \sqrt{2s(2s-1)\Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2)} + 2s|\mathbb{D}^{2s-1}| \sqrt{\Gamma''_s(|\mathbb{D}^s|^2)}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Обозначив через $\Psi(\mathbb{D})$ левую часть (2.3), мы можем записать следующую оценку всех производных $\partial V / \partial \mathbb{D}$:

$$\left| \nabla \wedge \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} \right|^2 \leq (2N+2)\Phi^2(\mathbb{D})\Psi(\mathbb{D}). \quad (2.13)$$

Действительно, непосредственным вычислением из (2.7) выводится соотношение

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} \right|^2 &\leq (2N+2) \left(4n\Lambda'^2((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2) \left(\frac{\partial \operatorname{tr} \mathbb{D}}{\partial x_k} \right)^2 + 16n(\operatorname{tr} \mathbb{D})^4 \Lambda''^2((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2) \left(\frac{\partial \operatorname{tr} \mathbb{D}}{\partial x_k} \right)^2 \right. \\ &+ \sum_{s=1}^N \left(4s^2 \Gamma'_s{}^2(|\mathbb{D}^s|^2) (2s-1)^2 \left| \mathbb{D}^{s-1} \mathbb{D}^{s-1} \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k} \right|^2 \right. \\ &\left. \left. + 16s^4 \Gamma''^2_s(|\mathbb{D}^s|^2) |\mathbb{D}^{2s-1}|^2 \left(\operatorname{tr} \mathbb{D}^{2s-1} \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k} \right)^2 \right) \right), \end{aligned}$$

которое влечет (2.13) после применения элементарных неравенств.

Чтобы избавиться от граничных интегралов в (2.2)–(2.4), рассмотрим для (2.1) краевую задачу в параллелепипеде Ω с краевыми условиями периодичности (аналогично (3.5)). Выпишем тождества (2.2), (2.3) для потенциала (2.6). Равенство (2.2) примет вид

$$\int_{\Omega} \left(2\Lambda'((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2)(\operatorname{tr} \mathbb{D})^2 + \sum_{s=1}^N 2s\Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2)|\mathbb{D}^s|^2 \right) dx = - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dx. \quad (2.14)$$

Введя обозначения

$$\varkappa(\xi) = \int_0^\xi \sqrt{\Lambda''(\eta)} d\eta + 1, \quad \nu_s(\xi) = \int_0^\xi \sqrt{\Gamma''_s(\eta)} d\eta + 1, \quad (2.15)$$

запишем (2.3) в виде

$$\int_{\Omega} \Psi(\mathbb{D}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{u} dx \quad (2.16)$$

с

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbb{D}) &= 2\Lambda'((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2)|\nabla \operatorname{tr} \mathbb{D}|^2 + |\nabla \varkappa((\operatorname{tr} \mathbb{D})^2)|^2 \\ &+ \sum_{s=1}^N \left(2s(2s-1)\Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2) \sum_{k=1}^n \left| \mathbb{D}^{s-1} \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k} \right|^2 + |\nabla \nu_s(|\mathbb{D}^s|^2)|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если ограничиться случаем, когда в (2.6) верно

$$\Gamma'_1(\xi) \geq C_1 > 0, \quad (2.18)$$

то форма $\partial^2 V / \partial \mathbb{D}^2$ положительно определена:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2} \langle \mathbb{A}, \mathbb{A} \rangle \geq 2C_1 |\mathbb{A}|^2, \quad (2.19)$$

и, в частности, $\Psi(\mathbb{D}) \geq 2C_1 |\nabla \wedge \mathbb{D}|^2$. Тогда из (2.14), (2.16) вытекает вторая энергетическая оценка

$$\int_{\Omega} \Psi(\mathbb{D}) \, dx \leq C_2(C_1, \Omega) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.20)$$

3. Энергетические оценки в модели Бюргерса с быстро растущим потенциалом напряжений. В этом пункте мы покажем, как энергетические тождества, выведенные в п. 1, могут быть превращены в оценки решений (0.1)–(0.4) на примере модели Бюргерса (т.е. в (0.6) $p \equiv 0$) в случае $n = 2, 3$ с V в форме (2.6), где коэффициенты Λ и Γ_s выпуклы, монотонны (что гарантирует осмысленность обозначений (2.15)), удовлетворяют (2.18) и обладают следующими свойствами:

$$\exists s = 2^m, \, m \in \mathbb{N}_0 : \quad \Gamma'_s(\xi) \rightarrow +\infty \text{ при } \xi \rightarrow M < \infty, \quad (3.1)$$

$$\Lambda'(\xi) + \Lambda''(\xi) \leq C_3(1 + \Lambda^\alpha(\xi)), \quad \Gamma'_s(\xi) + \Gamma''_s(\xi) \leq C_3(1 + \Gamma_s^\alpha(\xi)), \quad (3.2)$$

$$\Lambda'(\xi) + \Lambda''(\xi) \leq C_3(1 + \varkappa^\beta(\xi)), \quad \Gamma'_s(\xi) + \Gamma''_s(\xi) \leq C_3(1 + \nu_s^\beta(\xi)), \quad (3.3)$$

причем постоянные α и β удовлетворяют ограничениям

$$\alpha > 1, \quad \beta > 2, \quad \frac{\beta - 2}{\beta} \alpha < \frac{4 - n}{n} \quad (3.4)$$

(отметим, что первые два неравенства в (3.4) необходимы для (3.1)). Перечисленным требованиям удовлетворяют, например, функции

$$\Lambda(\xi) = \Gamma_s(\xi) = (1 - \xi)^{-\gamma}, \quad \gamma > \frac{2n}{4 - n}.$$

Рассмотрим для (0.1)–(0.4), (0.6) начально-краевую задачу в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega = \prod_{i=1}^n (0, \lambda_i)$, с краевыми условиями периодичности

$$\rho, \mathbf{u} \text{ периодичны по } x_i \text{ с периодами } \lambda_i \quad (3.5)$$

и начальными данными

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 > 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad (3.6)$$

(отметим, однако, что в тождествах (1.5), (1.7), (1.8), (1.11) граничные интегралы исчезают и для задачи с краевым условием прилипания $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ вместо (3.5) при дополнительном требовании $\mathbf{f}|_{\partial\Omega} = 0$). В этом пункте на основе энергетических тождеств из п. 1 и оценок из п. 2 мы получим оценки гладкого решения поставленной задачи (подразумеваем положительность плотности: $\rho > 0$).

Из (1.5) и тождества $\|\rho\|_{L_1(\Omega)} = \text{const}$ (следствия (0.1)) вытекает первая энергетическая оценка

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D} \, dx \, dt \leq C_4(T, \|\rho_0\|_{L_1(\Omega)}, \|\rho_0 |\mathbf{u}_0|^2\|_{L_1(\Omega)}, \|\mathbf{f}\|_{L_1(0, T, L_\infty(\Omega))}). \quad (3.7)$$

Поскольку для всякого симметричного тензора $|\mathbb{B}|^2 = \text{tr } \mathbb{B}^2 \leq \sqrt{n}|\mathbb{B}^2|$, из (3.7), (3.1) и (2.7) следует оценка

$$|\mathbb{D}| \leq M_1 \equiv \sqrt{n}M^{2^{-m}}, \quad (3.8)$$

на основе которой из (0.1) выводим

$$0 < C_5(T, \inf \rho_0, M_1) \leq \rho \leq C_6(T, \sup \rho_0, M_1) < \infty. \quad (3.9)$$

Опираясь на (3.8) и (3.9), из (1.8) легко получим вторую энергетическую оценку

$$\sup_{0 < t < T} \|V\|_{L_1(\Omega)} \leq C_7(T, C_6, \Omega, \|V|_{t=0}\|_{L_1(\Omega)}, \|\mathbf{f}\|_{L_2(Q_T)}), \quad (3.10)$$

$$\|\mathbf{w}\|_{L_2(Q_T)} \leq C_8(T, C_5, C_6, \Omega, \|V|_{t=0}\|_{L_1(\Omega)}, \|\mathbf{f}\|_{L_2(Q_T)}). \quad (3.11)$$

Тождество (1.11) после применения неравенств (3.8), (2.10), (2.19), (2.11) и (2.13) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 d\mathbf{x} + C_1 \|\mathbb{D}(\mathbf{w})\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq M_1 \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} (\Phi^2(\mathbb{D})(|\mathbb{D}(\mathbf{f})|^2 + |\nabla \otimes \mathbf{u}|^4) + \sqrt{2N+2} |\nabla \otimes \mathbf{u}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \Phi(\mathbb{D}) \sqrt{\Psi(\mathbb{D})}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Оценим слагаемые в его правой части. Введем обозначение

$$q = \frac{2}{1 + (\beta - 2)\alpha/\beta}$$

и отметим, что $q > n/2$ ввиду (3.4). Из (3.2), (3.3) имеем оценку

$$\begin{aligned} \Phi^{2q}(\mathbb{D}) &\leq C_9(C_3, n, N, M) \left(1 + \Lambda^{(\beta-2)\alpha q/\beta} ((\text{tr } \mathbb{D})^2) + \sum_{s=1}^N \Gamma_s^{(\beta-2)\alpha q/\beta} (|\mathbb{D}^s|^2) \right) \\ &\times \left(1 + \varkappa^{2q} ((\text{tr } \mathbb{D})^2) + \sum_{s=1}^N \nu_s^{2q} (|\mathbb{D}^s|^2) \right), \end{aligned}$$

которая после применения неравенства Гёльдера дает

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbb{D})\|_{L_{2q}(\Omega)} &\leq C_{10}(C_9, N) (1 + \|V\|_{L_1(\Omega)}^{(\beta-2)\alpha/(2\beta)}) \\ &\times \left(1 + \|\varkappa((\text{tr } \mathbb{D})^2)\|_{L_{2\beta q/(\beta-(\beta-2)\alpha q)}(\Omega)} + \sum_{s=1}^N \|\nu_s(|\mathbb{D}^s|^2)\|_{L_{2\beta q/(\beta-(\beta-2)\alpha q)}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поскольку $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_{2\beta q/(\beta-(\beta-2)\alpha q)}(\Omega)$, учитывая (3.10), (3.13), (2.20) и (2.17), мы можем записать

$$\|\Phi(\mathbb{D})\|_{L_{2q}(\Omega)} \leq C_{11}(C_{10}, C_6, C_7)(\|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)} + 1), \quad (3.14)$$

а также

$$\|\sqrt{\Psi(\mathbb{D})}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2 C_6 \|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.15)$$

Теперь, применяя во втором интеграле в правой части (3.12) неравенство Гёльдера (для второго слагаемого – с показателями $4nq/(2q-n)$, $4nq/(2q(n-1)-n)$, $2q$ и 2) и учитывая вложение $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_{4nq/(2q(n-1)-n)}(\Omega)$, мы можем оценить его величиной

$$\begin{aligned} & C_{11}^2 (\|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)}^2 + 1) (\|\nabla \otimes \mathbf{u}\|_{L_{4q/(q-1)}(\Omega)}^4 + \|\mathbb{D}(\mathbf{f})\|_{L_{2q/(q-1)}(\Omega)}^2) \\ & + C_2 C_6 C_{11} \sqrt{2N+2} (\|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)}^2 + 1) \|\mathbb{D}(\mathbf{w})\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\nabla \otimes \mathbf{u}\|_{L_{4nq/(2q-n)}(\Omega)}, \end{aligned}$$

после чего неравенство (3.12) “замыкается” ввиду уже имеющихся оценок (3.11), (3.8) и (3.9) и дает третью энергетическую оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} \leq C_{12}(T, C_2, C_6, C_{11}, C_5, \|\mathbf{w}|_{t=0}\|_{L_2(\Omega)}, \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T,W_{2q/(q-1)}^1(\Omega))}), \quad (3.16)$$

$$\|\mathbb{D}(\mathbf{w})\|_{L_2(Q_T)} \leq C_{13}(T, C_2, C_6, C_{11}, C_5, \|\mathbf{w}|_{t=0}\|_{L_2(\Omega)}, \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T,W_{2q/(q-1)}^1(\Omega))}). \quad (3.17)$$

4. Дополнительные замечания. Дальнейшие оценки. Всякий шаг по выводу очередной энергетической оценки эволюционной задачи требует соответствующей оценки стационарной системы (0.3). Так, для превращения (1.15) в оценку нужно сделать то же для (2.4), и т.д. Последнее, однако, представляет собой сложную проблему. До сих пор это удалось сделать (см. [4], [8] и ссылки там) лишь в случае $n = 2$ для весьма специальных потенциалов (а именно, вида (2.6) с $N = 1$, Γ_1 , растущей как степенная функция с ограничениями сверху на показатель, и с ограничением $\text{tr } \mathbb{D} = 0$ – задача типа Стокса).

Мы можем, тем не менее, сформулировать еще несколько оценок задачи (0.1)–(0.4), (3.5), (3.6) (с $\mathbb{P}$, описанным в начале п. 3) в той мере, в которой это не требует дальнейшего (по сравнению с (2.20)) исследования системы (2.1):

$$\|\rho\|_{L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega))} \leq C_{14}(\|\rho_0\|_{W_2^1(\Omega)}, M, C_{12}, C_6), \quad (4.1)$$

$$\left\| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} \leq C_{15}(\|\rho_0\|_{W_2^1(\Omega)}, M, C_{12}, C_6), \quad (4.2)$$

$$\left\| \nabla \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} \leq C_{16}(M, C_{13}, \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T,W_2^1(\Omega))}), \quad (4.3)$$

$$\|\text{div } \mathbb{P}\|_{L_2(0,T,W_r^1(\Omega))} \leq C_{17}(C_6, C_{13}, C_{14}, r) \quad \forall r < \frac{n}{n-1}, \quad (4.4)$$

$$\|\mathbb{P}\|_{L_\infty(0,T,W_s^1(\Omega))} \leq C_{18}(C_2, C_6, C_{11}, C_{12}), \quad s = \frac{4}{3 + (\beta - 2)\alpha/\beta}. \quad (4.5)$$

Действительно, разделив (0.1) на ρ и применив операцию ∇ , с учетом (1.1) получим тождество

$$\frac{d}{dt} \nabla \ln \rho + (\nabla \otimes \mathbf{u}) \nabla \ln \rho + \nabla \text{div } \mathbf{u} = 0,$$

которое после умножения на $2\nabla \ln \rho$ и интегрирования по Ω дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} dx - 2 \int_{\Omega} (\mathbb{D} \nabla \ln \rho, \nabla \ln \rho) dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \nabla \ln \rho dx \leq (3M_1 + 1) \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}|^2 dx, \end{aligned}$$

и теперь (4.1) очевидно ввиду (2.20), (2.17) и (3.11). Оценки (4.2)–(4.4) суть элементарные следствия оценок п. 3, (4.1) и уравнений (0.1)–(0.3), а (4.5) вытекает из (2.13) и (3.14)–(3.16).

Классы разрешимости и единственности. Пусть имеются два (гладких) решения задачи (0.1)–(0.4), (3.5), (3.6) – $(\rho_1, \mathbf{u}_1)$ и $(\rho_2, \mathbf{u}_2)$. Будем обозначать нижним индексом также все величины, связанные с соответствующими решениями. Обозначим $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Для этих величин получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}_2) = -\operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\operatorname{div} \mathbb{P}_1 - \operatorname{div} \mathbb{P}_2}{\rho_1} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 - \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} \operatorname{div} \mathbb{P}_2 + \rho \mathbf{f}, \quad (4.7)$$

$$\rho|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad (4.8)$$

плюс условие периодичности. Умножая аналог уравнения (0.1) для ρ_1 на $|\mathbf{u}|^2/2$, (4.7) на $\rho_1 \mathbf{u}$ и складывая, после интегрирования по Ω выведем тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho_1 |\mathbf{u}|^2}{2} dx + \int_{\Omega} (\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2) : (\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2) dx \\ = \int_{\Omega} (-\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2 - (\rho_1 \mathbf{u}, (\nabla \otimes \mathbf{u}_2)^* \mathbf{u}) + \rho_1 \mathbf{f} \cdot \rho \mathbf{u}) dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

С другой стороны, умножая (4.6) на 2ρ и интегрируя по Ω , получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^2 dx = \int_{\Omega} (-\rho^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 - 2\rho_1 \rho \operatorname{div} \mathbf{u} - 2\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_1) dx,$$

что с учетом (4.8), (4.9) и (4.11) дает оценку

$$\int_{\Omega} (\rho_1 |\mathbf{u}|^2 + \rho^2) dx \leq \int_0^t \int_{\Omega} F \cdot (\rho_1 |\mathbf{u}|^2 + \rho^2) dx ds, \quad (4.10)$$

где

$$F = 2|\mathbb{D}_2| + \frac{\rho_1^2}{2C_1} + \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right)(|\nabla \rho_1| + |\mathbf{w}_2| + \rho_1 |\mathbf{f}|).$$

Неравенство (4.10) гарантирует $\rho = 0$, $\mathbf{u} = 0$, если суммируемость F по $\mathbf{x}$ не хуже, чем L_M (пространство Орлича) с $M(s) = e^s$ (см. [9]). Как видно, полученные выше оценки наиболее близки к классу единственности в случае $n = 2$, когда достаточно дополнительно лишь (по аналогии с выводом (4.1) из (3.11)) “извлечь” из (3.17) оценку ρ_1 в $W_2^2(\Omega)$ (что снова сводится к третьей энергетической оценке для (2.1)).

Разрешимость “в целом” задачи (0.1)–(0.4), (3.5), (3.6) не вызывает сомнений по крайней мере в классах, соответствующих первым двум энергетическим оценкам (3.7)–(3.11) (и их следствию (4.1)), – доказательство может быть проведено, например, методом типа Галёркина (как в [5]). Поэтому доказательство разрешимости в классе, соответствующем всем полученным в данной работе оценкам, представляется не столь интересной задачей (особенно ввиду того, что единственность этих решений, даже при $n = 2$, остается пока “под вопросом”), и мы не будем этого делать.

Таким образом, дальнейшее продвижение в глобальной теории системы (0.1)–(0.4) (существование “в целом” в классах единственности решений, вплоть до классических) связано с изучением регулярности решений системы (2.1). В связи с этим интересно отметить некоторые

Дополнительные свойства системы (2.1), (2.6). Помимо энергетических оценок мы еще располагаем их интерполяционными следствиями. Поскольку оператор системы (2.1) нелинейный, мы вынуждены использовать методы нелинейной интерполяции (см. [10, с. 102] со ссылкой на [11]), что требует предварительно установить гёльдеровость оператора. В (2.6) каждое из слагаемых порождает монотонный оператор

$$\operatorname{div} \frac{\partial V(\cdot)}{\partial \mathbb{D}}$$

(т.е. обладающий свойством $(2.5)_2$), а слагаемое с Γ_1 еще и строго монотонный (см. [4]) при условии (2.18), так что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}(\mathbb{D}_2) - \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}(\mathbb{D}_1) \right) : (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \geq C_1 |\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1|^2, \quad (4.11)$$

где $\mathbb{D}_i = \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)$. Отметим, что если (2.18) не выполнено, но $\Gamma_2(\xi) = \beta \xi$, $\beta = \operatorname{const} > 0$, то

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}(\mathbb{D}_2) - \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}}(\mathbb{D}_1) \right) : (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \geq \frac{\beta}{4n} |\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1|^4. \quad (4.12)$$

В самом деле, (4.12) следует из соотношений

$$(\mathbb{A}^3 - \mathbb{B}^3) : (\mathbb{A} - \mathbb{B}) = \frac{1}{4} |(\mathbb{A} - \mathbb{B})^2|^2 + \frac{3}{4} |\mathbb{A}^2 - \mathbb{B}^2|^2 \geq \frac{1}{4n} |\mathbb{A} - \mathbb{B}|^4,$$

справедливых для всех симметричных тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Продemonстрируем интерполяционные свойства системы (2.1), (2.6) для определенности в следующей частной ситуации:

$$n = 3, \quad \Lambda(\xi) = \operatorname{const} \cdot \xi, \quad \Gamma_s(\xi) = \operatorname{const} \cdot \xi, \quad s > 1, \quad \Gamma_1(\xi) = (1 + \xi)^p, \quad p \geq 1.$$

Будем рассматривать оператор T , осуществляющий в (2.1) соответствие

$$T: \mathbf{F} \mapsto \mathbb{D}(\mathbf{u}). \quad (4.13)$$

Первая априорная оценка (следствие (2.14)) принимает вид

$$\|T(\mathbf{F})\|_{L_{2p}(\Omega)} \leq C_{19}(p, \Omega) \|\mathbf{F}\|_{W_{2p/(2p-1)}^{-1}(\Omega)}^{1/(2p-1)}, \quad (4.14)$$

а вторая оценка (2.20) дает

$$\|\nabla(1 + |\mathbb{D}|^2)^{p/2}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{20}(p, \Omega) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\Omega)},$$

что вместе с (4.14) позволяет оценить $|\mathbb{D}|^p$ в $W_2^1(\Omega)$ и после применения вложения W_2^1 в L_6 записать

$$\|T(\mathbf{F})\|_{L_{6p}(\Omega)} \leq C_{21}(p, \Omega) (\|\mathbf{F}\|_{W_{2p/(2p-1)}^{-1}(\Omega)}^{1/(2p-1)} + \|\mathbf{F}\|_{L_2(\Omega)}^{1/p}). \quad (4.15)$$

Неравенства (4.11) и (4.12) очевидным образом дают оценки гёльдеровости

$$\|T(\mathbf{F}_1) - T(\mathbf{F}_2)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{C_1} \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{W_2^{-1}(\Omega)}, \quad (4.16)$$

$$\|T(\mathbf{F}_1) - T(\mathbf{F}_2)\|_{L_4(\Omega)} \leq \left(\frac{4n}{\beta}\right)^{1/3} \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{W_{4/3}^{-1}(\Omega)}^{1/3}$$

соответственно (рассмотрим для определенности случай (4.16)). Следуя обозначениям и утверждениям из [10, с. 102–103], применим к оператору T интерполяционную теорему Л. Тартара (т.е. проинтерполируем между (4.14) и (4.15), что возможно благодаря (4.16)) с

$$A_0 = L_{6/5}(\Omega), \quad B_0 = L_2(\Omega), \quad A_1 = L_2(\Omega), \quad B_1 = L_{6p}(\Omega), \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{p}.$$

Получим

$$T: (A_0, A_1)_{\eta, r} \rightarrow (B_0, B_1)_{\theta, q}, \quad (4.17)$$

где

$$\theta \in (0, 1), \quad q \geq 1, \quad \eta = \frac{\theta}{p - (p-1)\theta}, \quad r = \frac{p - (p-1)\theta}{p} q. \quad (4.18)$$

Напомним [10, с. 17, 142], что $(L_a, L_b)_{c, d} = L_{(a, b)_{c, d}}$ при $a < b$, $a < d$, где $((a, b)_c)^{-1} = cb^{-1} + (1-c)a^{-1}$, а $L_{\alpha, \beta}$ обозначает пространства Лоренца, от которых мы избавимся, воспользовавшись следующими их свойствами:

$$L_{\alpha, \beta} \hookrightarrow L_{\alpha, \gamma} \quad \text{при } \beta \leq \gamma, \quad L_{\alpha, \alpha} = L_{\alpha}.$$

Итак, несколько “загрубив” (4.17), перепишем это соотношение в терминах пространств Лебега:

$$T: L_{(6/5, 2)_{\eta}}(\Omega) \rightarrow L_{(2, 6p)_{\theta}}(\Omega), \quad (4.19)$$

что возможно при условиях

$$r \geq \left(\frac{6}{5}, 2\right)_{\eta}, \quad (2, 6p)_{\theta} \geq q. \quad (4.20)$$

Таким образом, взяв произвольно $\theta \in (0, 1)$ и вычислив η из (4.18), мы должны подобрать q (а вместе с ним и соответствующее η согласно (4.18)) так, чтобы было выполнено (4.20). Нетрудно проверить, что такое q всегда найдется. В итоге мы можем сформулировать искомое соотношение (подсчитав показатели в (4.19))

$$T: L_A(\Omega) \rightarrow L_B(\Omega), \quad \frac{6}{5} \leq A \leq 2, \quad B = \frac{3}{2} \cdot \frac{(5p-3)A - 6(p-1)}{3-A}. \quad (4.21)$$

В заключение отметим, что если сохранить во второй априорной оценке первые производные $T(\mathbf{F})$ (а не применять вложение в L_6 , как мы сделали при выводе (4.15)), то в (4.21) получится оценка дробных производных от $\mathbb{D}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.
- [2] Вайгант В. А., Кажихов А. В. О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой жидкости // Сиб. матем. ж. 1995. Т. 36. № 6. С. 1283–1316.
- [3] Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. V. 2. Compressible Models. Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [4] Malek J., Necas J., Rokyta M., Ruzicka M. Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs. London, Weinheim etc.: Chapman & Hall, 1996.
- [5] Мамонтов А. Е. Существование глобальных решений многомерных уравнений Бюргерса сжимаемой вязкой жидкости // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 2. С. 161–163.
- [6] Мамонтов А. Е. О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. I // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 2. С. 408–420.
- [7] Мамонтов А. Е. О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. II // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 3. С. 635–649.
- [8] Kaplický P., Malek J., Stará J. $C^{1,\alpha}$ -Solutions to a Class of Nonlinear Fluids in Two Dimensions–Stationary Dirichlet Problem // Sonderforschungsbereich 256 nichtlineare partielle Differentialgleichungen. № 529. Bonn: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, 1997.
- [9] Кажихов А. В., Мамонтов А. Е. Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлица // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 4. С. 831–850.
- [10] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [11] Tartar L. Interpolation nonlineaire et regularité // J. Funct. Anal. 1972. № 9. P. 469–489.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
E-mail: mamontoff@hydro.nsc.ru

Поступило
20.07.1999