Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. З. Маршан, О перестановках двойной системы Хаара,
Матем. заметки, 2000, том 68, выпуск 3, 385–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm955>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:40:11

УДК 517.512

О ПЕРЕСТАНОВКАХ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ ХААРА

Д. З. Маршан

В работе приводятся оценки нормы оператора перестановки двойной системы Хаара в двоичных пространствах Харди и ВМО.

Библиография: 3 названия.

В настоящей работе приводятся утверждения, связанные с эквивалентностью перестановок двойной системы Хаара в двоичных пространствах Харди и ВМО.

Аналогичные вопросы в одномерном случае изучались в [1], [2] и моей работе [3].

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$A_0 = \{[k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}) : 0 \leq k < 2^n, k, n \in \mathbb{N}\},$$

$A = A_0 \cup \{[0, 1]\}$ и $\chi = \{h_I, I \in A\}$ – система Хаара, занумерованная элементами множества A следующим образом: $h_{[0,1]}(t) = 1, t \in [0, 1]$, а для $I = [k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}) \in A_0$

$$h_I(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{при } t \in [k \cdot 2^{-n}, (2k+1) \cdot 2^{-n-1}), \\ -2^{n/2} & \text{при } t \in [(2k+1) \cdot 2^{-n-1}, (k+1) \cdot 2^{-n}), \\ 0 & \text{при } t \in [0, 1] \setminus I. \end{cases}$$

Обозначим $A^{(2)} = A \times A = \{B = I_1 \times I_2, I_1, I_2 \in A\}$, $A_0^{(2)} = A^{(2)} \setminus \{Q\}$, $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, и пусть $\chi^{(2)} = \{h_B, B \in A^{(2)}\}$ – двойная система Хаара, занумерованная элементами множества $A^{(2)}$ следующим образом:

$$h_B(t) = h_{I_1}(t_1) \cdot h_{I_2}(t_2), \quad t = (t_1, t_2) \in Q,$$

где $B = I_1 \times I_2 \in A^{(2)}$, h_{I_1}, h_{I_2} – функции из системы χ .

Пусть $(\mathcal{B}(Q), \|\cdot\|)$ – банахово пространство, в котором линейная оболочка двойной системы Хаара $\mathcal{L}^{(2)}$ плотна.

Каждая биекция $\mathcal{F}: A^{(2)} \rightarrow A^{(2)}$ порождает на $\mathcal{L}^{(2)}$ оператор

$$R_{\mathcal{F}}^{(2)} f = \sum_{B \in A^{(2)}} \hat{f}_B h_{\mathcal{F}(B)}, \quad \hat{f}_B = \int_Q f(t) h_B(t) dt, \quad B \in A^{(2)}.$$

Если $R_{\mathcal{F}}^{(2)}$ ограничен на $\mathcal{L}^{(2)}$, то его можно продолжить до ограниченного оператора на $\mathcal{B}(Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Системы $\chi^{(2)}$ и $\chi_{\mathcal{F}}^{(2)} = \{h_{\mathcal{F}(B)}, B \in A^{(2)}\}$ называются *эквивалентными* в пространстве $\mathcal{B}(Q)$, если операторы $R_{\mathcal{F}}^{(2)}, R_{\mathcal{F}^{-1}}^{(2)}: \mathcal{B}(Q) \rightarrow \mathcal{B}(Q)$ ограничены и $\mathcal{F}^{-1}$ – отображение, обратное к $\mathcal{F}$.

Пусть $H(Q)$ – двоичное пространство Харди функций двух переменных, т. е.

$$H(Q) = \left\{ f \in L(Q) : \|f\|_{H(Q)} = \int_Q f^*(t) dt < \infty \right\},$$

где

$$f^*(x) = \sup_{x \in B \in A^{(2)}} \frac{|\int_B f(t) dt|}{|B|}, \quad x = (x_1, x_2) \in Q,$$

$|B|$ – мера Лебега множества B , и пусть $\text{ВМО}(Q)$ – двоичное пространство, сопряженное к $H(Q)$, т. е.

$$\text{ВМО}(Q) = \left\{ f \in L(Q) : \hat{f}_Q = 0, \|f\|_{\text{ВМО}(Q)} = \sup_{B \in A_0^{(2)}} \left(\frac{\sum_{\Pi \subseteq B} \hat{f}_{\Pi}^2}{|B|} \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

а $\text{ВМО}(Q)$ – двоичное пространство, сопряженное к которому есть $H(Q)$, т. е.

$$\text{ВМО}(Q) = \left\{ f \in \text{ВМО}(Q) : \lim_{|B| \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Pi \subseteq B} \hat{f}_{\Pi}^2}{|B|} = 0 \right\}.$$

Определим “норму” биекции $\mathcal{F}: A^{(2)} \rightarrow A^{(2)}$

$$\|\mathcal{F}\|_2 = \sup_{B \in A_0^{(2)}} \left(\frac{|\bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi)|}{|B|} \right)^{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{F}: A^{(2)} \rightarrow A^{(2)}$ – произвольная биекция, $\mathcal{F}(Q) = Q$. Тогда

$$\|R_{\mathcal{F}^{-1}}^{(2)}\|_{\text{ВМО}(Q) \rightarrow \text{ВМО}(Q)} \geq \|\mathcal{F}\|_2. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такой элемент $B \in A_0^{(2)}$, что

$$\frac{|\bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi)|}{|B|} > (\|\mathcal{F}\|_2 - \varepsilon)^2.$$

Представим множество $\{\mathcal{F}(\Pi) : \Pi \subseteq B\}$ в виде последовательности $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определим функцию

$$\varphi = |\Pi_1|^{1/2} h_{\Pi_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(|\Pi_n| - \left| \Pi_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \Pi_k \right) \right| \right)^{1/2} h_{\Pi_n}.$$

Замечаем, что $\|\varphi\|_{\text{ВМО}(Q)} = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\Pi \subseteq B} \hat{\varphi}_{\mathcal{F}(\Pi)}^2}{|B|} &= \frac{|\Pi_1| + \sum_{n=2}^{\infty} (|\Pi_n| - |\Pi_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} \Pi_k)|)}{|B|} \\ &= \frac{|\bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi)|}{|B|} > (\|\mathcal{F}\|_2 - \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|R_{\mathcal{F}^{-1}}^{(2)}\|_{\text{ВМО}(Q) \rightarrow \text{ВМО}(Q)} \geq \|R_{\mathcal{F}^{-1}}^{(2)}\varphi\|_{\text{ВМО}(Q)} > \|\mathcal{F}\|_2 - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε верна оценка (1). Теорема доказана.

Для заданной биекции $\mathcal{F}: A^{(2)} \rightarrow A^{(2)}$ и каждого $B \in A^{(2)}$ пусть $S_{\mathcal{F}}(B)$ – множество, полученное удалением из $\{\mathcal{F}(\Pi) : \Pi \subseteq B\}$ всякого прямоугольника, входящего целиком в другой из того же множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Биекция $\mathcal{F}: A^{(2)} \rightarrow A^{(2)}$, $\mathcal{F}(Q) = Q$, называется *слабо пересекающейся*, если пересечение любых двух элементов из каждого $S_{\mathcal{F}}(B)$ не содержит других пересечений двух элементов из того же множества.

В частности, к слабо пересекающимся биекциям относятся те биекции $\mathcal{F}: A^{(2)} \rightarrow A^{(2)}$, для которых каждое множество $S_{\mathcal{F}}(B)$ состоит из попарно дизъюнктивных прямоугольников.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{F}: A^{(2)} \rightarrow A^{(2)}$ – слабо пересекающаяся биекция. Тогда

$$\|R_{\mathcal{F}}^{(2)}\|_{H(Q) \rightarrow H(Q)} \sim \|R_{\mathcal{F}^{-1}}^{(2)}\|_{\text{ВМО}(Q) \rightarrow \text{ВМО}(Q)} \sim \|\mathcal{F}\|_2. \quad (2)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Системы $\chi^{(2)}$ и $\chi_{\mathcal{F}}^{(2)}$ – эквивалентные базисы в $H(Q)$ и $\text{ВМО}(Q)$, если и только если $\|\mathcal{F}\|_2 < \infty$ и $\|\mathcal{F}^{-1}\|_2 < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $2 < p < \infty$ и $q = p/(p-1)$. Тогда

$$\|R_{\mathcal{F}}^{(2)}\|_{L^q(Q) \rightarrow L^q(Q)} = \|R_{\mathcal{F}^{-1}}^{(2)}\|_{L^p(Q) \rightarrow L^p(Q)} \sim \|\mathcal{F}\|_2^{(p-2)/p}. \quad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 < p < \infty$. Системы $\chi^{(2)}$ и $\chi_{\mathcal{F}}^{(2)}$ – эквивалентные базисы в $L^p(Q)$, если и только если

$$\|\mathcal{F}\|_2 < \infty \quad \text{и} \quad \|\mathcal{F}^{-1}\|_2 < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала докажем неравенство

$$\|R_{\mathcal{F}-1}^{(2)}\|_{\text{ВМО}(Q) \rightarrow \text{ВМО}(Q)} \leq \sqrt{2}\|\mathcal{F}\|_2. \quad (4)$$

Пусть $f \in \mathcal{L}^{(2)}$ и $\|f\|_{\text{ВМО}(Q)} \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\Pi \subseteq B} \hat{f}_{\mathcal{F}(\Pi)}^2}{|B|} &\leq \frac{\sum_{\Pi \in S_{\mathcal{F}}(B)} \sum_{K \subseteq \Pi} \hat{f}_K^2}{|B|} \\ &\leq \frac{\sum_{\Pi \in S_{\mathcal{F}}(B)} |\Pi|}{|B|} \leq \frac{2|\bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi)|}{|B|}, \quad B \in A^{(2)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (4). Неравенства (1) и (4) дают правую оценку в (2).

Оператор $R_{\mathcal{F}}^{(2)*}$, сопряженный к $R_{\mathcal{F}}^{(2)}$, удовлетворяет равенству $R_{\mathcal{F}}^{(2)*} = R_{\mathcal{F}-1}^{(2)}$.

Используя сопряжение, имеем

$$\|R_{\mathcal{F}}^{(2)}\|_{H(Q) \rightarrow H(Q)} \sim \|R_{\mathcal{F}}^{(2)*}\|_{\text{ВМО}(Q) \rightarrow \text{ВМО}(Q)} = \|R_{\mathcal{F}-1}^{(2)}\|_{\text{ВМО}(Q) \rightarrow \text{ВМО}(Q)} \sim \|\mathcal{F}\|_2.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Фиксируем $p \in (2, \infty)$. Установим правую оценку в (2).

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такой элемент $B \in A_0^{(2)}$, что

$$\frac{|\bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi)|}{|B|} > (\|\mathcal{F}\|_2 - \varepsilon)^2.$$

Определим функцию

$$g = R_{\mathcal{F}-1}^{(2)} \left(\sum_{\Pi \in S_{\mathcal{F}}(B)} |\Pi|^{1/2} h_{\Pi} \right).$$

Замечаем, что

$$\|R_{\mathcal{F}}^{(2)} g\|_{L^q(Q)} \geq \left| \bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi) \right|^{1/q}$$

и

$$\|g\|_{L^q(Q)}^2 \cdot |B|^{(q-2)/q} \leq \|g\|_{L^2(Q)}^2 \leq \sum_{\Pi \in S_{\mathcal{F}}(B)} |\Pi| \leq 2 \left| \bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi) \right|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\|R_{\mathcal{F}}^{(2)}\|_{L^q(Q) \rightarrow L^q(Q)} &\geq \frac{\sqrt{2}\|R_{\mathcal{F}}^{(2)} g\|_{L^q(Q)}}{\|g\|_{L^q(Q)}} \\ &\geq \left(\frac{|\bigcup_{\Pi \subseteq B} \mathcal{F}(\Pi)|}{|B|} \right)^{(2-q)/(2q)} > (\|\mathcal{F}\|_2 - \varepsilon)^{(2-q)/q}. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε имеем

$$\sqrt{2}\|R_{\mathcal{F}}^{(2)}\|_{L^q(Q)\rightarrow L^q(Q)} \geq \|\mathcal{F}\|_2^{(2-q)/q} = \|\mathcal{F}\|_2^{(p-2)/p}. \quad (5)$$

Используя интерполяцию между $H(Q)$ и $L^2(Q)$ (см. в одномерном случае [1, с. 140]), убеждаемся в справедливости оценки

$$\|R_{\mathcal{F}}^{(2)}\|_{L^q(Q)\rightarrow L^q(Q)} \leq M_p \|\mathcal{F}\|_2^{(p-2)/p}, \quad (6)$$

где M_p – постоянная, зависящая только от p . Неравенства (5) и (6) дают правую оценку в (3). Левое равенство в (3) очевидно. Следствие доказано.

Другие следствия очевидным образом вытекают соответственно из теоремы 2 и следствия 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Schipp F. On equivalence of rearrangements of the Haar system in dyadic Hardy and BMO spaces // Analysis Math. 1990. V. 16. № 2. P. 135–141.
- [2] Семёнов Е. М., Штекерт Б. Перестановки системы Хаара в пространствах L^p // Analysis Math. 1981. V. 7. № 4. P. 277–295.
- [3] Отырба Д. З. О перестановках в пространстве BMO системы Хаара // УМН. 1994. Т. 49. № 3. С. 183–184.

Абхазский государственный университет

Поступило

14.04.1999

Исправленный вариант

20.11.1999