Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Матевосян, С. В. Пикулин, Об усреднении слабонелинейных дивергентных эллиптических операторов в перфорированном кубе, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 390–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 03:41:48

УДК 517.95

ОБ УСРЕДНЕНИИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ДИВЕРГЕНТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ПЕРФОРИРОВАННОМ КУБЕ

О. А. Матевосян, С. В. Пикулин

В настоящей работе для слабонелинейного дивергентного эллиптического уравнения второго порядка с младшим членом, растущим по неизвестной функции степенным образом, доказывается, что последовательность решений в перфорированном кубе стремится к решению в неперфорированном кубе, если радиусы дыр стремятся к нулю со скоростью, зависящей от показателя степени в младшем члене.

Библиография: 12 названий.

Изучению вопросов теории усреднения для перфорированных областей посвящено много монографий и работ (см. [1]–[5]), в которых на поведение решений уравнений при подходе к дыркам ставятся какие-либо ограничения, например, – граничные условия. Однако, для усреднения решений уравнений с достаточно сильным нелинейным поглощением такие ограничения не нужны. Подобная ситуация была обнаружена и в теории устранения особенностей. В связи с этим отметим работы [6]–[11].

Введем следующие обозначения:

$B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в точке x_0 ;

$S(x_0, R) \equiv \partial B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = R\}$ – сфера в $\mathbb{R}^n$;

$Q(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < 1, i = 1, \dots, n\}$ – открытый куб в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Пусть в кубе $Q(0, 1)$ лежат m замкнутых шаров $B(y_{k,m}, R_m)$ с центрами в точках $y_{k,m}$ и одинакового радиуса R_m .

Положим $Q_m(0, 1) = Q(0, 1) \setminus \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, R_m)$.

Рассмотрим задачу

$$Lu_m(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j} \right) = a(x) |u_m(x)|^{\sigma-1} u_m(x), \quad x \in Q_m(0, 1), \quad (1)$$

$$u_m(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial Q(0, 1), \quad (2)$$

где $a(x)$, $a_{ij}(x)$ – ограниченные измеримые функции, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$, $a(x) \geq a_0 > 0$ и выполняются условия:

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (3)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$; $a_0 = \text{const}$; $\sigma > n/(n-2)$; $\varphi(x) \in H^1(Q_m(0, 1)) \cap L_\infty(Q_m(0, 1))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u_m(x) \in H^1(Q_m(0, 1)) \cap L_\infty(Q_m(0, 1))$ называется *обобщенным решением задачи* (1), (2), если для любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(Q_m(0, 1))$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{Q_m(0,1)} a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} dx + \int_{Q_m(0,1)} a(x) |u_m(x)|^{\sigma-1} u_m(x) \psi(x) dx = 0$$

и при любой функции $\chi(x) \in C^\infty(Q_m(0, 1))$, равной нулю в окрестности $\bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, R_m)$, справедливо включение $\chi(x)(u_m(x) - \varphi(x)) \in \dot{H}^1(Q_m(0, 1))$.

Для задачи (1), (2) не выполняются, вообще говоря, теоремы единственности, так как на границах дырок перфорированной области $Q_m(0, 1)$ не заданы никакие граничные условия. Мы покажем, что при некоторых условиях предел решений задачи (1), (2) будет существовать, причем этот предел не зависит от выбора последовательности $u_m(x)$; здесь $u_m(x)$ – любое решение задачи (1), (2).

Пусть $u(x)$ – решение следующей задачи:

$$Lu(x) = a(x)|u(x)|^{\sigma-1}u(x), \quad x \in Q(0, 1), \quad (4)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial Q(0, 1). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$R_m = o(m^{(1-\sigma)/((n-2)\sigma-n)}) \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Тогда

- i) решение задачи (1), (2) стремится к решению задачи (4), (5) в следующем смысле: для любого положительного постоянного d

$$\sup_{x \in Q_{m,d}(0,1)} |u_m(x) - u(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где

$$Q_{m,d}(0, 1) = \{x \in Q_m(0, 1) : \text{dist}(x, \partial B(y_{k,m}, R_m)) > d; k = 1, \dots, m\};$$

- ii) общий объем дырок $V[\bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, R_m)] \equiv |\bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, R_m)|$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Если в перфорированном кубе $Q_m(0, 1)$ существует множество, отделенное от всех дырок фиксированной постоянной, то на этом множестве сходимость будет равномерной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. i) В работе [6] получена оценка решения уравнения (1) через расстояние до границы области:

$$|u_m(x)| < C (\text{dist}(x, \partial Q_m(0, 1)))^{2/(1-\sigma)},$$

где положительная постоянная C не зависит от x и m .

Обозначим через $\Gamma(x)$ фундаментальное решение оператора L , имеющее особенность в начале координат 0 и положительное в $B(0, R) \setminus \{0\}$. Известно [12], что такое решение существует и удовлетворяет неравенствам

$$C_1|x|^{2-n} \leq \Gamma(x) \leq C_2|x|^{2-n},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят от λ из условия (3).

Положим

$$g_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Gamma(x - y_{k,m}).$$

Легко заметить, что на границах шаров $B(y_{k,m}, 2R_m)$, концентрических с шарами $B(y_{k,m}, R_m)$ и имеющих радиусы $2R_m$, имеет место неравенство

$$u_m(x) < g_m(x), \quad x \in \partial B(y_{k,m}, 2R_m),$$

так как на границах этих шаров

$$u_m(x) < C'R_m^{2/(1-\sigma)}, \quad g_m(x) > C''m^{-1}R_m^{2-n}, \quad (8)$$

где C' , C'' – положительные постоянные. Буквой C здесь и далее будем обозначать любую положительную постоянную, не зависящую от x и m .

Предположим, что $u_m(x)$ не стремится к $u(x)$ в смысле (7) при $m \rightarrow \infty$. Тогда без ограничения общности можно считать, что найдется положительная постоянная C_0 такая, что для любого $m_0 \in \mathbb{N}$ существуют $m > m_0$ и $x_m \in Q_{m,d}(0, 1)$ такие, что $u_m(x_m) - u(x_m) > C_0$ (аналогично рассматривается случай $u_m(x_m) - u(x_m) < -C_0$). Очевидно, что $g_m(x_m) < C'_0 d^{2-n} m^{-1} = C''_0 m^{-1}$, поскольку $x_m \in Q_{m,d}(0, 1)$. Положим

$$h_m(x) = \frac{C_0}{2} \frac{g_m(x)}{g_m(x_m)}, \quad x \in Q_m(0, 1).$$

Тогда на границах шаров $\partial(\bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, 2R_m))$ выполнено неравенство

$$h_m(x) > \widetilde{C}_0 R_m^{2-n}. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$v_m(x) = u_m(x) - u(x) - h_m(x), \quad v_m(x_m) > \frac{C_0}{2} > 0.$$

Из (6), (8), (9) следует, что при достаточно больших m и при $x \in \partial(Q(0, 1) \setminus \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, 2R_m))$ выполнено $v_m(x) < 0$.

Определим множество $D \equiv \{x \in Q_m(0, 1) : v_m(x) > 0\} \neq \emptyset$. Обозначим через D_0 компоненту связности множества D , содержащую точку x_m . Функция $v_m(x)$ достигает

локального максимума во внутренней точке области D_0 , что противоречит принципу максимума, выполненного в силу того, что $Lv_m(x) > 0$ при $x \in D$.

Действительно, $u_m(x) - u(x) > h_m(x) > 0$ при $x \in D$. Тогда

$$\begin{aligned} Lv_m(x) &= L(u_m(x) - u(x)) - Lh_m(x) \\ &= a(x)|u_m(x) - u(x)|^{\sigma-1}(u_m(x) - u(x)) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, наше предположение неверно, т.е. $u_m(x)$ стремится к $u(x)$ в смысле (7) при $m \rightarrow \infty$.

ii) Для объема шара радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$V[B(0, R)] \leq CR^n,$$

где C зависит только от n . Оценим общий объем дырок:

$$\left| \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, R_m) \right| \leq C m R_m^n = o(m^{-(2\sigma)/((n-2)\sigma-n)}) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Теорема 1 доказана.

ЛЕММА (обобщенное неравенство Юнга). Пусть $a, b, \varepsilon > 0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$ab \leq \frac{\alpha}{\varepsilon} a^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\varepsilon^{-\alpha/(1-\alpha)}} b^{1/(1-\alpha)}.$$

В частности, при $\alpha = 1/2$ выполнено $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $R_m = o(m^\gamma)$, где $\gamma < (1-\sigma)/((n-2)\sigma-n)$. Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$\int_{Q(0,1) \setminus \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, 4R_m)} \frac{|\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 + |u_m(x) - u(x)|^{\sigma+1}}{1 + |u_m(x) - u(x)|} dx \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $\theta_{k,m}(x) \in C^1(Q(0,1))$ такие, что $0 \leq \theta_{k,m}(x) \leq 1$, $x \in Q(0,1)$,

$$\theta_{k,m}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q(0,1) \setminus B(y_{k,m}, 4R_m), \\ 0, & x \in B(y_{k,m}, 2R_m), \end{cases}$$

и $|\nabla \theta_{k,m}(x)| < C/R_m$, $x \in Q(0,1)$. Положим $\theta_m(x) = \inf_{k=1,\dots,m} \theta_{k,m}(x)$.

Рассмотрим функцию $\psi(x) = \theta_m^p(x) \eta(u_m(x) - u(x))$, где

$$\eta(\tau) = \begin{cases} \tau, & |\tau| \leq 1, \\ |\tau|^{q-1}\tau, & |\tau| > 1, \end{cases}$$

$q > 0$ таково, что $\gamma < (1-\sigma)/((n-2)\sigma-n-2q)$; $p = p(q) > 2$ таково, что

$$p = \frac{(p-2)(\sigma+q)}{1+q}. \quad (10)$$

Умножим равенство $L(u_m(x) - u(x)) = a(x)(|u_m(x)|^{\sigma-1}u_m(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))$ на $\psi(x)$ и проинтегрируем по $Q(0, 1)$; получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q(0,1)} (L(u_m(x) - u(x))\psi(x)) dx \\ & \equiv \int_{Q(0,1)} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \right) \psi(x) dx \\ & = \int_{Q(0,1)} a(x)(|u_m(x)|^{\sigma-1}u_m(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))\psi(x) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Оценим правую часть равенства (11), используя неравенства $|a + b|^\sigma \leq C(\sigma)|a|^\sigma + b^\sigma$, $|a - b|^\sigma \leq |a|^\sigma - b^\sigma$, где $a, b > 0$, $C(\sigma) = 2^{\sigma-1}$, и при $C_3 = \min(1/C(\sigma), 1) = 1/2^{\sigma-1}$, $\pm a^\sigma = |u_m(x)|^{\sigma-1}u_m(x)$, $\pm b^\sigma = |u(x)|^{\sigma-1}u(x)$ получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q(0,1)} a(x)(|u_m(x)|^{\sigma-1}u_m(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))\psi(x) dx \\ & = \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} a(x)(|u_m(x)|^{\sigma-1}u_m(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x)) \\ & \quad \times (u_m(x) - u(x))\theta_m^p(x) dx \\ & \quad + \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} a(x)(|u_m(x)|^{\sigma-1}u_m(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x)) \\ & \quad \times |u_m(x) - u(x)|^{q-1}(u_m(x) - u(x))\theta_m^p(x) dx \\ & \geq a_0 C_3 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |u_m(x) - u(x)|^{\sigma+1}\theta_m^p(x) dx \\ & \quad + a_0 C_3 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |u_m(x) - u(x)|^{\sigma+q}\theta_m^p(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

После тождественных преобразований и интегрирования по частям в левой части равенства (11) получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q(0,1)} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \right) \psi(x) dx \\ & = \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \right) \\ & \quad \times (u_m(x) - u(x))\theta_m^p(x) dx \\ & \quad + \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \right) \\ & \quad \times |u_m(x) - u(x)|^{q-1}(u_m(x) - u(x))\theta_m^p(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m(x) - u(x)) \theta_m^p(x) dx \\
&\quad + \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) (u_m(x) - u(x)) \\
&\quad \times p \theta_m^{p-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_m(x) dx + \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \\
&\quad \times q |u_m(x) - u(x)|^{q-1} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m(x) - u(x)) \theta_m^p(x) dx \\
&\quad + \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \\
&\quad \times |u_m(x) - u(x)|^{q-1} (u_m(x) - u(x)) p \theta_m^{p-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_m(x) dx. \tag{13}
\end{aligned}$$

Оценим первое и третье слагаемые правой части тождества (13), учитывая (3); соответственно получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m(x) - u(x)) \theta_m^p(x) dx \\
&\leq -\frac{1}{\lambda} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 \theta_m^p(x) dx, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) q |u_m(x) - u(x)|^{q-1} \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m(x) - u(x)) \theta_m^p(x) dx \\
&\leq -\frac{q}{\lambda} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 |u_m(x) - u(x)|^{q-1} \theta_m^p(x) dx. \tag{15}
\end{aligned}$$

Для оценки второго и четвертого слагаемых правой части тождества (13) используется неравенство Юнга при $\alpha = 1/2$, $a = |\nabla(u_m(x) - u(x))|$, $b = |\nabla \theta_m(x)|$; выбирая $\varepsilon = p\lambda^2/(\theta_m(x))$ и $\varepsilon = (p\lambda^2|u_m(x) - u(x)|)/(q\theta_m(x))$ при каждом x , соответственно получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) (u_m(x) - u(x)) \\
&\quad \times p \theta_m^{p-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_m(x) dx \\
&\leq p\lambda \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))| |\nabla \theta_m(x)| \theta_m^{p-1}(x) dx \\
&\leq p\lambda \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} \theta_m^{p-1}(x) \left(\frac{\theta_m(x)}{2p\lambda^2} |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{p\lambda^2}{2\theta_m(x)} + |\nabla \theta_m(x)|^2 \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x) - u(x)| \leq 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 \theta_m^p(x) dx \\
&\quad + C_4 \int_{\{|u_m(x) - u(x)| \leq 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 \theta_m^{p-2}(x) dx, \\
&\int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m(x) - u(x)) |u_m(x) - u(x)|^{q-1} \\
&\quad \times (u_m(x) - u(x)) p \theta_m^{p-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_m(x) dx \\
&\leq p\lambda \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))| |\nabla \theta_m(x)| |u_m(x) - u(x)|^q \theta_m^{p-1}(x) dx \\
&\leq p\lambda \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} \theta_m^{p-1}(x) |u_m(x) - u(x)|^q \left(\frac{q \theta_m(x)}{2p\lambda^2 |u_m(x) - u(x)|} \right. \\
&\quad \times |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 + \frac{p\lambda^2 |u_m(x) - u(x)|}{2q \theta_m(x)} |\nabla \theta_m(x)|^2 \Big) dx \\
&= \frac{q}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 |u_m(x) - u(x)|^{q-1} \theta_m^p(x) dx \\
&\quad + C_5 \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 |u_m(x) - u(x)|^{q+1} \theta_m^{p-2}(x) dx.
\end{aligned} \tag{16}$$

Теперь оценим второе слагаемое правой части неравенства (17), полагая в неравенстве Юнга $a = |u_m(x) - u(x)|^{q+1} \theta_m^{p-2}(x)$, $b = |\nabla \theta_m(x)|^2$ при $\alpha = (1+q)/(\sigma+q)$ и выбрав $\varepsilon = 2C_5\alpha/(a_0C_3)$; с учетом (10) получим

$$\begin{aligned}
&C_5 \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 |u_m(x) - u(x)|^{q+1} \theta_m^{p-2}(x) dx \\
&\leq \frac{a_0C_3}{2} \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |u_m(x) - u(x)|^{\sigma+q} \theta_m^p(x) dx \\
&\quad + C_6 \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} dx.
\end{aligned} \tag{18}$$

Учитывая равенства (11), (13) и оценки (14)–(18), имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{Q(0,1)} L(u_m(x) - u(x)) \psi(x) dx \\
&\leq -\frac{1}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x) - u(x)| \leq 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 \theta_m^p(x) dx \\
&\quad - \frac{q}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |\nabla(u_m(x) - u(x))|^2 |u_m(x) - u(x)|^{q-1} \theta_m^p(x) dx \\
&\quad + C_4 \int_{\{|u_m(x) - u(x)| \leq 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 \theta_m^{p-2}(x) dx \\
&\quad + \frac{a_0C_3}{2} \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |u_m(x) - u(x)|^{\sigma+q} \theta_m^p(x) dx \\
&\quad + C_6 \int_{\{|u_m(x) - u(x)| > 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} dx.
\end{aligned} \tag{19}$$

Объединяя (11), (12) и (19), получим

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |\nabla(u_m(x)-u(x))|^2 \theta_m^p(x) dx \\
& -\frac{q}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |\nabla(u_m(x)-u(x))|^2 |u_m(x)-u(x)|^{q-1} \theta_m^p(x) dx \\
& + C_4 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 \theta_m^{p-2}(x) dx \\
& + \frac{a_0 C_3}{2} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |u_m(x)-u(x)|^{\sigma+q} \theta_m^p(x) dx \\
& + C_6 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} dx \\
& \geq a_0 C_3 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |u_m(x)-u(x)|^{\sigma+1} \theta_m^p(x) dx \\
& + a_0 C_3 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |u_m(x)-u(x)|^{\sigma+q} \theta_m^p(x) dx;
\end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned}
& C_4 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 \theta_m^{p-2}(x) dx \\
& + C_6 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} dx \\
& \geq a_0 C_3 \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |u_m(x)-u(x)|^{\sigma+1} \theta_m^p(x) dx \\
& + \frac{a_0 C_3}{2} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |u_m(x)-u(x)|^{\sigma+q} \theta_m^p(x) dx \\
& + \frac{1}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |\nabla(u_m(x)-u(x))|^2 \theta_m^p(x) dx \\
& + \frac{q}{2\lambda} \int_{\{|u_m(x)-u(x)| > 1\}} |\nabla(u_m(x)-u(x))|^2 |u_m(x)-u(x)|^{q-1} \theta_m^p(x) dx \\
& \geq C_7 \int_{Q(0,1)} \frac{|u_m(x)-u(x)|^{\sigma+1}}{1+|u_m(x)-u(x)|} \theta_m^p(x) dx \\
& + C_8 \int_{Q(0,1)} \frac{|\nabla(u_m(x)-u(x))|^2}{1+|u_m(x)-u(x)|} \theta_m^p(x) dx \\
& \geq C_9 \int_{Q(0,1) \setminus \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,m}, 4R_m)} \frac{|\nabla(u_m(x)-u(x))|^2 + |u_m(x)-u(x)|^{\sigma+1}}{1+|u_m(x)-u(x)|} dx. \quad (20)
\end{aligned}$$

Теперь докажем, что

$$\int_{\{|u_m(x)-u(x)| \leq 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 \theta_m^{p-2}(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

и

$$\int_{\{|u_m(x)-u(x)|>1\}} |\nabla \theta_m(x)|^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\{|u_m(x)-u(x)|\leq 1\}} |\nabla \theta_m(x)|^2 \theta_m^{p-2}(x) dx &\leq \int_{Q(0,1)} |\nabla \theta_m(x)|^2 dx \\ &\leq C_{10} m R_m^n \left(\frac{1}{R_m} \right)^2 = o(m^{1+((n-2)(1-\sigma))/((n-2)\sigma-n)}) \\ &= o(m^{-2/((n-2)\sigma-n)}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_{\{|u_m(x)-u(x)|>1\}} |\nabla \theta_m(x)|^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} dx &\leq \int_{Q(0,1)} |\nabla \theta_m(x)|^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} dx \\ &\leq C_{11} m R_m^n \left(\frac{1}{R_m} \right)^{2(\sigma+q)/(\sigma-1)} = C_{11} m R_m^{((n-2)\sigma-n-2q)/(\sigma-1)} \\ &= o(m^{1+((n-2)\sigma-n-2q)/(\sigma-1)\cdot(1-\sigma)/((n-2)\sigma-n-2q)}) = o(1) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (20), (21) и (22) следует справедливость теоремы 2.

Авторы выражают благодарность проф. В. А. Кондратьеву и доценту А. А. Конькову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова Думка, 1974.
- [2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymtotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [3] Damlamian A., Li Ta-Tsien. Boundary homogenization for elliptic problems // J. Math. Pures et Appl. 1987. V. 66. P. 351–361.
- [4] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
- [5] Скрипник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Физматлит, 1990.
- [6] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135. №3. С. 346–360.
- [7] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №4. С. 457–468.
- [8] Туваев М. В. Об устранимых особых множествах решений квазилинейных эллиптических уравнений // Матем. сб. 1994. Т. 185. №2. С. 107–114.
- [9] Vazques J. L., Veron L. Removable Singularities of Strongly Nonlinear Elliptic Equations // Manuscripta Math. 1980/81. V. 33. P. 129–144.
- [10] Vazques J. L., Veron L. Singularities of elliptic equations with an exponential nonlinearity // Math. Anal. 1984. V. 269. P. 119–135.
- [11] Vazques J. L., Veron L. Isolated singularities of some semilinear elliptic equations // Journal of Diff. Equations. 1985. V. 60. P. 301–322.
- [12] Littman W., Stampacchia G., Weinberger B. Regular Points for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3. 1963. V. 17. №1–2. P. 43–77.