Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Метельский, В. Г. Найденко, Алгоритмические аспекты частичной выпуклости, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 399–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 08:31:17

УДК 513+681.3

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЧАСТИЧНОЙ ВЫПУКЛОСТИ

Н. Н. Метельский, В. Г. Найденко

Получена характеристика C -семипространств частичной выпуклости. Приведена оценка числа C -семипространств в случае, когда число направлений частичной выпуклости конечно. Разработан алгоритм перечисления C -семипространств с полиномиальной скоростью. Доказано, что проблема распознавания аппроксимаций частично-выпуклых оболочек, порожденных пересечением C -семипространств частичной выпуклости, NP-трудна.

Библиография: 5 названий.

В работе [1] был выделен один специальный класс семипространств частичной выпуклости, так называемые C -семипространства. В настоящей статье исследуются свойства C -семипространств и проблема нахождения частично-выпуклых оболочек, порождаемых C -семипространствами. Кроме того, мы рассматриваем один вопрос И. Матюшека и П. Плехача о вычислительной сложности построения обобщенных выпуклых оболочек [2].

Пусть в n -мерном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ задано множество единичных векторов $O \subseteq S^{n-1}$ (направлений), где S^{n-1} – единичная сфера. Мы предполагаем симметричность множества O , т.е. $O = -O$, что не является ограничением в контексте частичной выпуклости. Напомним, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *частично-выпуклым* (*O -выпуклым*), если пересечение X с произвольной прямой с направляющим вектором из O связно или пусто. Семипространством S_a в точке $a \in \mathbb{R}^n$ называется максимальное по включению выпуклое (вообще говоря, обобщенно выпуклое) множество, не содержащее a . Чтобы не возникло путаницы, семипространство классической выпуклости будем обозначать символом S_a , а семипространство частичной выпуклости через S_a^o .

Множество $M \subset O$ назовем *половинным*, если $M \cup -M = O$ и $M \cap -M = \emptyset$. Под *выпуклым конусом* мы понимаем множество C , содержащее $\lambda x + \mu y$ для любых $x, y \in C$ и любых неотрицательных λ и μ . Выпуклый конус C называется *острым*, если C не содержит одномерных подпространств, т.е. $x \in C$ и $-x \in C$ влечет $x = 0$.

Через $CH[X]$ обозначим выпуклую коническую оболочку множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$, т.е. наименьший выпуклый конус, содержащий X . Также будем говорить, что конус C порождается множеством X , если $C = CH[X]$.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Алгоритм” при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, гранты Ф97-205 и Ф98М-033.

В работе [1] доказано, что если C – некоторый максимальный среди острых конусов, порождаемых подмножествами множества O , то множество $S_a^o = \mathbb{R}^n \setminus (a + C)$ является семипространством O -выпуклости в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Семипространства вида $\mathbb{R}^n \setminus (a + C)$ называются C -семипространствами.

Справедливы следующие лемма 1 и теоремы 1 и 2, характеризующие C -семипространства.

ЛЕММА 1. *Если выпуклый конус C содержит некоторое половинное множество векторов $M \subset O$, то C включает в себя хотя бы один максимальный острый конус $CH[M']$, порожденный некоторым подмножеством $M' \subset O$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $CH[M] \subseteq C$. Если $CH[M]$ – острый конус, то $CH[M]$ будет максимальным. Следовательно, $M' = M$. Рассмотрим случай, когда $CH[M]$ – не острый. Пусть $X \subset M$ – множество векторов таких, что если $v \in X$, то $v \in CH[M]$ и $-v \notin CH[M]$. Если $X = \emptyset$, то для любого $v \in M$ справедливо $v \in CH[M]$ и $-v \in CH[M]$. А поскольку $M \cup -M = O$, то $CH[M] = CH[O]$. Тогда в качестве M' выберем любое подмножество, образующее максимальный острый конус (в силу леммы 1 из [1] это всегда можно сделать). Рассмотрим случай, когда $X \neq \emptyset$. Отметим, что $CH[X]$ – острый конус. Следуя работе [1], обозначим через $PCON(O \mid X)$ множество всех частично упорядоченных по включению острых конусов вида $CH[A_X]$, где $A_X \subseteq O$ такое подмножество, что $X \subseteq CH[A_X]$. Покажем, что множество $PCON(O \mid X)$ содержит максимальные элементы, которые будут максимальными и для $PCON(O)$ ($PCON(O)$ – множество всех острых конусов, порожденных подмножествами из O и частично упорядоченных по включению). Действительно, пусть $\{CH[A_X^\alpha]\}_\alpha$ – произвольная цепь элементов, упорядоченных по включению, из $PCON(O \mid X)$. Тогда $\bigcup_\alpha \{CH[A_X^\alpha]\}_\alpha$ будет точной верхней гранью, принадлежащей $PCON(O \mid X)$. Согласно лемме Цорна получаем, что $PCON(O \mid X)$ имеет максимальные элементы. Заметим, что $PCON(O \mid X) \subseteq PCON(O)$. Пусть $CH[A_X^*]$ – некоторый максимальный элемент для $PCON(O \mid X)$, но не максимальный для $PCON(O)$. Тогда найдется конус $CH[A] \in PCON(O)$ такой, что $CH[A_X^*] \subset CH[A]$. Но $X \subseteq CH[A_X^*]$; следовательно, $X \subset CH[A]$ и $CH[A] \in PCON(O \mid X)$. Получаем противоречие. Итак, максимальный элемент для $PCON(O \mid X)$ будет максимальным и для $PCON(O)$. Таким образом, существует подмножество $M' \subseteq O$ такое, что $CH[M'] \in PCON(O \mid X)$ и $CH[M']$ – максимальный острый конус. Докажем, что M' удовлетворяет данной лемме. Поскольку $M \cup -M = O$, $-X \cap CH[M] = \emptyset$ и $X \subset CH[M]$, то $O \setminus -X \subseteq CH[M]$. Кроме того, $X \subseteq CH[M']$. Тогда $-X \cap CH[M'] = \emptyset$. Поэтому $M' \cap -X = \emptyset$, ибо в противном случае конус $CH[M']$ не острый. Но тогда $M' \subseteq O \setminus -X$ и, следовательно, $CH[M'] \subseteq CH[M] \subseteq C$. Лемма доказана.

Через $\text{conv}[X]$ будем обозначать выпуклую (в классическом смысле) оболочку произвольного множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 1. *Семипространство O -выпуклости является C -семипространством тогда и только тогда, когда его дополнение относительно $\mathbb{R}^n$ выпукло в классическом смысле.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению дополнение C -семипространства классически выпукло. Осталось доказать, что если дополнение семипространства O -выпуклости

выпукло, то оно представляет собой C -семипространство. Докажем это для семипространств O -выпуклости в точке $\mathbf{0}$ (для семипространств O -выпуклости в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$ результат будет таким же, поскольку любое семипространство S_x^o можно получить параллельным переносом из точки $\mathbf{0}$ в точку x некоторого семипространства S_0^o). Пересечение любой прямой $l_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $v \in O$ – направляющий вектор прямой l_v , с $\mathbb{R}^n \setminus S_0^o$ должно быть непусто и в силу классической выпуклости $\mathbb{R}^n \setminus S_0^o$ должно представлять собой точку, отрезок, луч или прямую. Заметим, что $l_v \cap (\mathbb{R}^n \setminus S_0^o)$ не может быть точкой или отрезком, так как в противном случае $l_v \cap S_0^o$ является объединением двух несвязных интервалов, что противоречит O -выпуклости S_0^o . Таким образом, $l_v \cap (\mathbb{R}^n \setminus S_0^o)$ является лучом или прямой. Для любого $l_v \cap (\mathbb{R}^n \setminus S_0^o)$ найдется замкнутый луч $r_x \subseteq l_v \cap (\mathbb{R}^n \setminus S_0^o)$, выходящий из точки $\mathbf{0}$ и совпадающий по направлению с некоторым вектором $x \in \{-v, v\}$. Обозначим объединение всех таких лучей через $r(S_0^o)$, а множество векторов из O , совпадающих по направлению с лучами из $r(S_0^o)$, через $Or(S_0^o)$. Заметим, что $\text{conv}[r(S_0^o)] = CH[Or(S_0^o)]$, поскольку выпуклая оболочка объединения лучей, выходящих из одной точки, будет выпуклым конусом (см., например, [3]). Для любого $r_x \subseteq r(S_0^o)$ верно $r_x \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0^o$; следовательно, $CH[Or(S_0^o)] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0^o$. Для любого вектора $v \in O$ справедливо хотя бы одно из утверждений: $v \in Or(S_0^o)$ или $-v \in Or(S_0^o)$, так как $l_v \cap (\mathbb{R}^n \setminus S_0^o) \neq \emptyset$. Это означает, что $Or(S_0^o)$ содержит некоторое половинное подмножество векторов $M \subset O$. Согласно лемме 1 конус $CH[Or(S_0^o)]$ будет содержать некоторый максимальный острый конус $CH[M']$, $M' \subset O$. Тогда $CH[M'] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0^o$ и, значит, $S_0^o \subseteq \mathbb{R}^n \setminus CH[M']$. Но $\mathbb{R}^n \setminus CH[M']$ само является C -семипространством O -выпуклости. Следовательно, семипространство S_0^o должно совпадать с $\mathbb{R}^n \setminus CH[M']$. Теорема доказана.

Как следствие из теоремы 1 получаем факт, приведенный в [1], а именно: все семипространства классической выпуклости являются C -семипространствами для множества направлений $O = S^{n-1}$. Действительно, классическую выпуклость можно рассматривать как частичную при $O = S^{n-1}$. Согласно свойству семипространств классической выпуклости их дополнение выпукло, а значит, по теореме 1 они являются C -семипространствами.

Отметим также, что не все конические семипространства частичной выпуклости исчерпываются C -семипространствами. Например, пусть задано множество направлений $O = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (см. рис. 1). Тогда в точке $\mathbf{0}$ семипространство O -выпуклости $S_0^o = (\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 > 0\} \cup \{\alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \mid \alpha_3, \alpha_4 \geq 0\}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, показанное на рисунке штриховкой, будет коническим, но не C -семипространством.

Докажем следующую теорему, которая дает конструктивный способ построения C -семипространств.

ТЕОРЕМА 2. Для любого C -семипространства $S_a^o = \mathbb{R}^n \setminus (a + CH[X])$ существует половинное множество $M \subset O$ такое, что $CH[X] = CH[M]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $CH[X]$ является острым конусом, то $X \cap -X = \emptyset$. Если же X еще и половинное множество, то $M = X$. Рассмотрим случай, когда X не половинное. Покажем, что для любого вектора $v \in O$ справедливо следующее утверждение: хотя бы один из векторов v или $-v$ принадлежит $CH[X]$. В противном случае множество $l = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$ не содержится в $CH[X]$, а, следовательно, множество $l' = \{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$ также не содержится в $a + CH[X]$. Значит, семипространство $S_a^o = \mathbb{R}^n \setminus (a + CH[X])$ включает в себя l' . Но тогда S_a^o не O -выпукло, так

Рис. 1. Пример конического пространства, не являющегося C -семипространством

как, например, две точки $a_1 = a + \lambda v$ и $a_2 = a - \lambda v$ для некоторого фиксированного $\lambda \neq 0$ принадлежат S_a , но точка $a = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2$ не содержится в S_a . Получаем противоречие. Пусть M – множество всех векторов из O , принадлежащих $CH[X]$. Тогда в силу выше сказанного $M \cup -M = O$. Заметим также, что $M \cap -M = \emptyset$ в силу остроты конуса $CH[X]$. Значит, M половинное. Так как $M \subseteq CH[X]$, то $CH[M] \subseteq CH[X]$. Но поскольку $X \subseteq M$, то $CH[M] = CH[X]$ и, следовательно, множество M удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

Таким образом, можно считать, что все C -семипространства, описанные в работе [1], порождаются некоторыми половинными подмножествами множества O .

Заметим, что если коническая оболочка $CH[M]$ некоторого половинного множества $M \subset O$ является острым конусом, то конус $CH[M]$ максимальный по включению среди всех выпуклых острых конических оболочек, порожденных подмножествами множества O . Итак, чтобы найти все C -семипространства, достаточно перебрать все половинные подмножества множества O и для каждого такого подмножества M проверить, будет ли его коническая оболочка $CH[M]$ острой. Если да, то $S_a^o = \mathbb{R}^n \setminus (a + CH[M])$ будет C -семипространством O -выпуклости в точке a . Если M конечно, то остроту конуса $CH[M]$ можно проверить следующим образом. Конус $CH[M]$ будет острым тогда и только тогда, когда система уравнений относительно переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0,$$

где $\{v_1, \dots, v_m\} = M$, будет иметь единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$.

Чтобы проверить это, достаточно решить задачу линейного программирования

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \rightarrow \max,$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0.$$

Если $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$, то конус $CH[M]$ острый.

Перейдем теперь к алгоритму перечисления всех половинных множеств, конические оболочки которых – максимальные острые конусы, в случае, когда O конечно.

Пусть $M_0 = \{v_1^0, \dots, v_m^0\}$ – некоторое произвольное фиксированное половинное множество векторов из O ($CH[M_0]$ – необязательно острый конус). Тогда все половинные множества векторов из O можно представить в виде кортежей из m элементов вида $\langle s_1, \dots, s_m \rangle$, где $s_i \in \{-v_i^0, v_i^0\}$ для любого $i \in \overline{1, m}$. На множестве O зададим частичное упорядочение векторов: $\forall i \in \overline{1, m} \quad v_i^0 > -v_i^0$. На множестве всех половинных множеств векторов из O введем лексикографический порядок. Пусть заданы два произвольных половинных множества $M_1 = \langle s_1^1, \dots, s_m^1 \rangle$ и $M_2 = \langle s_1^2, \dots, s_m^2 \rangle$. Будем считать, что $M_1 > M_2$ тогда и только тогда, когда существует i такое, что $s_i^1 > s_i^2$, и если $i > 1$, то $s_j^1 = s_j^2$ для любого $j, j < i$, причем $i, j \in \overline{1, m}$.

Теперь формально опишем итерационный алгоритм ENUMCONE перечисления всех половинных множеств, порождающих острые конусы. Переменные алгоритма $s_1, \dots, s_m$ определены на множестве векторов $\{-v_1^0, v_1^0, \dots, -v_m^0, v_m^0\} = O$. Переменная i обозначает номер итерации.

Алгоритм ENUMCONE.

Шаг 1. $i := 1; e := 1$.

Шаг 2. Если $CH[\langle s_1, \dots, s_{e-1}, v_e^0 \rangle]$ – острый конус, то $s_e := v_e^0$; иначе $s_e := -v_e^0$.

Шаг 3. $e := e + 1$.

Шаг 4. Если $e \leq m$, то переход к шагу 2.

Шаг 5. Выдать половинное множество векторов $M_i = \langle s_1, \dots, s_m \rangle$.

Шаг 6. $i := i + 1$.

Шаг 7. Найти наибольшее $j, j \in \overline{1, m}$, при котором $s_j = v_j^0$ и $CH[\langle s_1, \dots, s_{j-1}, -s_j \rangle]$ – острый конус. В противном случае остановить ENUMCONE (все требуемые половинные множества найдены).

Шаг 8. $s_j := -v_j^0$.

Шаг 9. $e := j + 1$.

Шаг 10. Переход к шагу 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для $e = 1$ и $j = 1$ конусы $CH[\langle s_1, \dots, s_{e-1}, v_e^0 \rangle]$ и $CH[\langle s_1, \dots, s_{j-1}, -s_j \rangle]$ обозначают соответственно $CH[\langle v_1^0 \rangle]$ и $CH[\langle -s_1 \rangle]$.

Алгоритм ENUMCONE в лексикографическом порядке, начиная с самого большого, перечисляет все половинные множества, порождающие острые конусы. Отметим, что несмотря на то, что общее время работы алгоритма ENUMCONE экспоненциально по $n \cdot |O|$ (напомним, что n – размерность линейного пространства $\mathbb{R}^n$), однако последовательность $M_1, M_2, \dots$ половинных множеств генерируется алгоритмом с полиномиальной скоростью (определение скорости (rate) алгоритма дано в [4]). Более строго это утверждение можно сформулировать в виде теоремы 3. Прежде, чем доказывать теорему 3, приведем следующую лемму, гарантирующую корректность шага 2 алгоритма ENUMCONE.

ЛЕММА 2. Пусть $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ – произвольное конечное множество векторов и $CH[X]$ – острый конус. Тогда для любого вектора $v \in S^{n-1}$ справедливо утверждение: хотя бы один из конусов $CH[X \cup \{v\}]$ или $CH[X \cup \{-v\}]$ острый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что так как $CH[X]$ – острый конус, система уравнений относительно переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m > 0, \quad (1)$$

не имеет решений. Предположим, что

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \quad (2)$$

для некоторых неотрицательных $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Тогда, очевидно, что $CH[X \cup \{v\}] = CH[X]$. Аналогично, когда

$$-v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \quad (3)$$

$CH[X \cup \{-v\}] = CH[X]$. Предположим, что ни (2), ни (3) не выполняются и конусы $CH[X \cup \{v\}]$ и $CH[X \cup \{-v\}]$ не острые. Тогда система уравнений (4) относительно переменных $\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ имеет решение

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha v &= 0, \\ \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m + \beta(-v) &= 0, \\ \alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m &\geq 0, \\ \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_m > 0, \quad \beta + \beta_1 + \dots + \beta_m > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из системы (4) следует, что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = -\alpha v$ и $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = \beta v$. В силу того, что система (1) не имеет решений, α и β положительны. То есть конус $CH[X]$ содержит прямую с направляющим вектором v , что противоречит принятому ранее условию об остроте $CH[X]$. Таким образом, обязательно один из конусов $CH[X \cup \{v\}]$ или $CH[X \cup \{-v\}]$ будет острым. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Существует полином p такой, что алгоритм ENUMCONE для заданного конечного множества направлений $O \subset S^{n-1}$ выводит последовательность $M_1, M_2, \dots$ всех половинных множеств векторов из O , порождающих максимальные острые конусы, причем каждое множество M_i находится за время, не превосходящее $p(n \cdot |O|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем вести индукцией по числу итераций. Любое половинное множество, находимое алгоритмом ENUMCONE, порождает острый конус в силу леммы 2. Очевидно, что алгоритм ENUMCONE генерирует первое половинное множество M_1 за полиномиальное время по $n \cdot |O|$. Допустим ENUMCONE на итерации i нашел множество M_i . Следующее множество M_{i+1} находится за полиномиальное время, так как шаг 7 алгоритма ENUMCONE также можно выполнить за полиномиальное время. Итак, алгоритм ENUMCONE перечисляет множества $M_1, M_2, \dots$ с полиномиальной скоростью. Осталось показать, что алгоритм ENUMCONE перечисляет все без исключения половинные множества, порождающие максимальные острые конусы. Заметим, что M_1 является наибольшим в лексикографическом порядке множеством, порождающим острый конус. Действительно, если предположить противное, что

существует $M' = \langle s'_1, \dots, s'_m \rangle$, большее, чем $M_1 = \langle s_1^1, \dots, s_m^1 \rangle$, то найдется e , для которого $s'_e > s_e^1$, т.е. $s'_e = v_e^0$ и $s_e^1 = -v_e^0$. Но в таком случае конус $CH[\langle s_1^1, \dots, s_{e-1}^1, v_e^0 \rangle]$ острый и в силу шага 2 алгоритма ENUMCONE s_e^1 должно быть равно v_e^0 . Получаем противоречие. Далее покажем, что $M_{i+1} = \langle s_1^{i+1}, \dots, s_m^{i+1} \rangle$ ближайшее в лексикографическом порядке ко множеству $M_i = \langle s_1^i, \dots, s_m^i \rangle$. Допустим противное, что существует ближайшее к M_i множество $M' = \langle s'_1, \dots, s'_m \rangle$ и $M' \neq M_{i+1}$. Следовательно, $M_i > M' > M_{i+1}$. Тогда найдутся j и k такие, что $s_j^i > s_j^{i+1}$ и $s_k^i > s'_k$; кроме того, для любого l , $l < j$, $s_l^i = s_l^{i+1}$ и для любого r , $r < k$, $s_r^i = s'_r$. Согласно шагу 7 алгоритма ENUMCONE j должно быть равно k . Но в этом случае существует e большее, чем j , такое, что $s'_e > s_e^{i+1}$. Поэтому конус $CH[\langle s_1^{i+1}, \dots, s_{e-1}^{i+1}, v_e^0 \rangle]$ острый и согласно шагу 2 алгоритма ENUMCONE s_e^{i+1} должно быть равно v_e^0 . Получаем противоречие. Очевидно также, что алгоритм ENUMCONE останавливается на шаге 7 только в том случае, если M_i – наименьшее в лексикографическом порядке половинное множество, порождающее острый конус. Итак, алгоритм ENUMCONE перечисляет в лексикографическом порядке все половинные множества, выпуклые оболочки которых представляют собой острые конусы. Теорема доказана.

Перейдем к оценке количества максимальных острых конусов. Пусть O конечно и $m = |O|/2$. Обозначим оценку количества максимальных острых конусов в пространстве $\mathbb{R}^n$ через $q(n, m)$.

ТЕОРЕМА 4. Имеем $q(n, m) \leq 2^n m^{(n+1)(n-2)/2}$ для $n \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Количество всевозможных гиперплоскостей, проведенных через начало координат, на которые опираются $(n-1)$ -мерные грани максимальных острых конусов, очевидно, не превышает C_m^{n-1} или, более грубо, m^{n-1} . Любая $(n-1)$ -мерная грань произвольного максимального острого конуса, лежащая в некоторой гиперплоскости H , является максимальным острым конусом для множества направлений $O \cap H$. Тогда количество $(n-1)$ -мерных граней всех максимальных конусов в $\mathbb{R}^n$ не превосходит $m^{n-1} q(n-1, m)$. Кроме того, каждая $(n-1)$ -мерная грань является общей в точности для двух максимальных острых конусов. Заметим, что для $\mathbb{R}^3$ количество 2-мерных граней не превышает C_{2m}^2 . Тогда $q(3, m) \leq 2C_{2m}^2 \leq 8m^2$. Получаем следующую рекуррентную формулу для оценки количества максимальных конусов:

$$q(3, m) \leq 8m^2, \quad q(n, m) \leq 2m^{n-1} q(n-1, m).$$

Тогда $q(n, m) \leq 2m^{n-1} 2m^{n-2} \dots 2m^3 8m^2 = 2^n m^{(n+1)(n-2)/2}$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к проблеме нахождения частично-выпуклых оболочек, играющих важную роль в таких приложениях, как кристаллография, проектирование СБИС, базы данных и др.

Определение частично-выпуклой оболочки аналогично ее классическому варианту. Для произвольного $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *частично-выпуклая оболочка* (*O-оболочка*) $\text{conv}^o[X]$ есть пересечение всех частично-выпуклых множеств, содержащих X . Возникает следующая проблема: определить, принадлежит ли произвольная точка $a \in \mathbb{R}^n$ к $\text{conv}^o[X]$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ – конечно. Отметим, что в отличие от классической выпуклости алгоритм решения указанной проблемы неизвестен для произвольного n . Однако ограничиваясь определенным классом O -выпуклых множеств, мы решаем этот вопрос.

Введем понятие OC -выпуклости. Семейство подмножеств OC из $\mathbb{R}^n$ образует OC -выпуклость, если OC содержит только следующие множества:

- 1) $\mathbb{R}^n$;
- 2) для любого $a \in \mathbb{R}^n$ все C -семипространства O -выпуклости принадлежат OC ;
- 3) пересечение любой совокупности C -семипространств O -выпуклости принадлежит OC .

Пара $(\mathbb{R}^n, OC)$ с точки зрения аксиоматической теории выпуклости [5] называется *пространством OC -выпуклости*, а элементы семейства OC – *OC -выпуклыми множествами*. OC -выпуклость можно считать частным случаем O -выпуклости, так как все OC -выпуклые множества являются O -выпуклыми (обратное, очевидно, не верно, см. рис. 1), однако оно позволяет эффективно строить аппроксимации частично-выпуклых оболочек. Семипространства OC -выпуклости в произвольной точке $a \in \mathbb{R}^n$ будем для краткости называть *OC -семипространствами* и будем обозначать символом S_a^{oc} . Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого $a \in \mathbb{R}^n$ всякое OC -семипространство в точке a является C -семипространством O -выпуклости в той же точке a .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана некоторая точка $a \in \mathbb{R}^n$ и произвольное OC -выпуклое множество F , где $a \notin F$. Докажем, что найдется C -семипространство O -выпуклости S_a^o в точке a такое, что $F \subseteq S_a^o$. Действительно, поскольку F является по определению пересечением некоторых C -семипространств и $a \notin F$, то найдется C -семипространство S_b^o такое, что $F \subseteq S_b^o$ и $a \notin S_b^o$. Если $a = b$, то $F \subseteq S_a^o$. Рассмотрим случай, когда $a \neq b$. Пусть $S_b^o = \mathbb{R}^n \setminus (b + C)$. Возьмем C -семипространство $S_a^o = \mathbb{R}^n \setminus (a + C)$. Из $a \notin S_b^o$ следует, что $a \in b + C$. Поэтому $a + C \subset b + C$ (в силу выпуклости конуса C). Следовательно, $S_b^o \subset S_a^o$ и в итоге получаем $F \subset S_a^o$. Таким образом, любое OC -выпуклое множество, не содержащее некоторую фиксированную точку a , содержится в некотором C -семипространстве в точке a . Поскольку все C -семипространства являются семипространствами OC -выпуклости (исходя из определения OC -выпуклости), то получаем доказательство утверждения теоремы.

Для OC -выпуклости сохраняются многие свойства, характерные для O -выпуклости, сформулированные в теоремах 6–9.

ТЕОРЕМА 6. *Все классически выпуклые множества являются OC -выпуклыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого семипространства S_0 классической выпуклости в точке 0 существует базис $x_1, \dots, x_n$ в $\mathbb{R}^n$ такой, что

$$S_0 = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\},$$

где $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ и первое a_i , отличное от нуля, положительно. Тогда очевидно, что для любого ненулевого вектора v либо v , либо $-v$ (но не одновременно) принадлежит S_0 . Обозначим через $O(S_0)$ множество векторов такое, что $O(S_0) = S_0 \cap O$. Множество $\mathbb{R}^n \setminus (S_0 \cup \{0\})$ также является семипространством классической выпуклости в 0 . Исходя из свойств классических семипространств, множество $\mathbb{R}^n \setminus S_0$ является острым выпуклым конусом, т.е. не содержащим прямых, которые проходят через его вершину. Справедливо $-O(S_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0$. Тогда $CH[-O(S_0)] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0$ и $CH[-O(S_0)]$ – острый

выпуклый конус. Заметим, что $-O(S_0) \cup O(S_0) = O$. Для любого $v \in O$ выполняется утверждение: если $v \notin -O(S_0)$, то $-v \in -O(S_0)$. Тогда $CH[-O(S_0)]$ – максимальный острый конус, поскольку $CH[-O(S_0) \cup \{v\}]$ для любого $v \notin -O(S_0)$ из O не является острым конусом, так как содержит как вектор v , так и $-v$. Тогда согласно теореме 3 из [1] и теореме 5 множество $\mathbb{R}^n \setminus CH[-O(S_0)]$ является OC -семипространством S_0^{oc} в точке 0 . Из $CH[-O(S_0)] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0$ следует, что $S_0 \subseteq \mathbb{R}^n \setminus CH[-O(S_0)]$. Поскольку $CH[-O(S_0)] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0$, то $CH[-O(S_0)] + a \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S_0$ для любого $a \in \mathbb{R}^n \setminus S_0$, так как $CH[-O(S_0)]$ и $\mathbb{R}^n \setminus S_0$ – выпуклые конусы. Следовательно, $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus S_0$: $S_0 \subseteq \mathbb{R}^n \setminus CH[-O(S_0) + a]$ и, значит,

$$S_0 = \bigcap_{a \in \mathbb{R}^n \setminus S_0} \mathbb{R}^n \setminus CH[-O(S_0) + a].$$

Итак, мы представили семипространство S_0 в виде пересечения подходящих OC -семипространств. Аналогично, любое семипространство S_x в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$ может быть представлено как

$$S_x = S_0 + x = \bigcap_{a \in \mathbb{R}^n \setminus (S_0 + x)} \mathbb{R}^n \setminus CH[-O(S_0) + a + x] = \bigcap_{a \in \mathbb{R}^n \setminus S_x} S_{a+x}^{oc}.$$

То есть любое семипространство классической выпуклости в произвольной точке мы можем представить как пересечение OC -семипространств. Теорема доказана.

OC -выпуклую оболочку произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (т.е. пересечение всех OC -выпуклых множеств, содержащих A) обозначим через $\text{conv}^{oc}[A]$. Далее мы будем рассматривать только такие множества A , для которых $\text{conv}^{oc}[A] \neq \mathbb{R}^n$. Из теоремы 6 следует утверждение: $\text{conv}^o[A] \subseteq \text{conv}^{oc}[A] \subseteq \text{conv}[A]$. Здесь $\text{conv}[A]$ обозначает классически выпуклую оболочку множества A . Таким образом, OC -выпуклая оболочка является аппроксимацией O -выпуклой оболочки. Важную роль в определении OC -выпуклых оболочек занимает понятие OC -экстремальной точки. Точку $a \in A$ назовем OC -экстремальной для A , если $a \notin \text{conv}^{oc}[A \setminus \{a\}]$. Совокупность всех OC -экстремальных точек для множества A обозначим как $\text{ext}^{oc}[A]$. Следовательно, OC -выпуклую оболочку $\text{conv}^{oc}[A]$ можно определить через OC -экстремальные точки следующим образом. Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется утверждение: $x \in \text{conv}^{oc}[A]$ тогда и только тогда, когда $x \notin \text{ext}^{oc}[A \cup \{x\}]$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Для множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ точка $x \in A$ будет OC -экстремальной для A только в том случае, когда найдется в точке x такое OC -семипространство S_x^{oc} , что $A \setminus \{x\} \subseteq S_x^{oc}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5 для любого OC -выпуклого множества F , не содержащего точку x , найдется OC -семипространство S_x^{oc} , включающее F . Из этого следует, что $x \in \text{ext}^{oc}[A]$ тогда и только тогда, когда существует OC -семипространство S_x^{oc} в точке x такое, что $\text{conv}^{oc}[A \setminus \{x\}] \subseteq S_x^{oc}$. Из этого следует $A \setminus \{x\} \subseteq S_x^{oc}$. Обратно, если $A \setminus \{x\} \subseteq S_x^{oc}$, то $\text{conv}^{oc}[A \setminus \{x\}] \subseteq S_x^{oc}$ и, следовательно, $x \in \text{ext}^{oc}[A]$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Определение ОС-выпуклой оболочки через ОС-семипространства: точка $a \in \mathbb{R}^n$ принадлежит $\text{conv}^{oc}[A]$, где $A \subseteq \mathbb{R}^n$, только в том случае, когда для любого ОС-семипространства S_a^{oc} в точке a существует точка $x \in A$ такая, что $x \notin S_a^{oc}$.*

ТЕОРЕМА 8. *Если O конечно, то ОС-выпуклость конечно определена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано бесконечное множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Докажем, что для любого $a \in \text{conv}^{oc}[A]$ существует конечное множество $B \subset A$ такое, что $a \in \text{conv}^{oc}[B]$. Если $a \in A$, то $B = \{a\}$. Рассмотрим случай, когда $a \notin A$. Заметим, что $a \in \text{conv}^{oc}[A]$, только если $a \notin \text{ext}^{oc}[A \cup \{a\}]$. В таком случае для любого ОС-семипространства S_a^{oc} в точке a множество A не содержится в S_a^{oc} в силу теоремы 7, что эквивалентно утверждению $\forall S_a^{oc} (\exists x \in A) [x \notin S_a^{oc}]$. Поскольку количество ОС-семипространств в точке a конечно (из-за конечности множества O), то можно найти конечное подмножество $B \subset A$ такое, что $\forall S_a^{oc} (\exists x \in B) [x \notin S_a^{oc}]$. Это означает, что $a \notin \text{ext}^{oc}[B \cup \{a\}]$ и, следовательно, $a \in \text{conv}^{oc}[B]$. Теорема доказана.

Остается открытым вопрос о конечной определенности ОС-выпуклости в случае, когда O бесконечна.

Для ОС-выпуклых множеств справедлива следующая теорема, аналогичная теореме Крейна–Мильмана для классически выпуклых множеств.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть O конечно. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, то*

$$\text{conv}^{oc}[A] = \text{conv}^{oc}[\text{ext}^{oc}[A]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через (x, y) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что существует компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\text{conv}^{oc}[\text{ext}^{oc}[A]] \neq \text{conv}^{oc}[A]$. Тогда найдется точка $x \in A$ такая, что $x \notin \text{conv}^{oc}[\text{ext}^{oc}[A]]$. Следовательно, $x \in \text{ext}^{oc}[\text{ext}^{oc}[A] \cup \{x\}]$. Значит, отыщется ОС-семипространство $S_x^{oc} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$ такое, что $\text{ext}^{oc}[A] \subseteq S_x^{oc}$ или, что то же самое, $(C + x) \cap \text{ext}^{oc}[A] = \emptyset$. Так как O конечно, то $C + x$ – замкнутое многогранное множество с угловой точкой x . Следовательно, существует замкнутое полупространство $H = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (a, v) \geq \alpha\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ – постоянные, такое, что $\{v \in \mathbb{R}^n \mid (a, v) = \alpha\} \cap (C + x) = \{x\}$ и $C + x \subset H$. Иными словами, найдется гиперплоскость $\{v \in \mathbb{R}^n \mid (a, v) = \alpha\}$, которая пересекается с многогранным множеством $C + x$ только в угловой точке x (см. [3]). Рассмотрим следующую задачу:

$$(a, v) \rightarrow \max, \quad v \in (C + x) \cap A. \quad (5)$$

Заметим, что так как $C + x$ замкнуто, то $(C + x) \cap A$ – компакт. Значит, по теореме Вейерштрасса функция (a, v) принимает максимальное значение на $(C + x) \cap A$ и, следовательно, задача (1) имеет решение. Зафиксируем какую-нибудь точку v^* , на которой достигается максимум (a, v) . Рассмотрим множество $C + v^*$. Полупространство $H^* = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (a, v) \geq (a, v^*)\}$ будет целиком содержать множество $C + v^*$, так как H целиком содержит $C + x$. С другой стороны, $\{v \in \mathbb{R}^n \mid (a, v) = (a, v^*)\} \cap (C + v^*) = \{v^*\}$. Поскольку для любой точки $v \in (C + x) \cap A$ справедливо $(a, v) \leq (a, v^*)$, то $((C + x) \cap A) \cap (C + v^*) = \{v^*\}$. Из $C + v^* \subseteq C + x$ следует $A \cap (C + v^*) = \{v^*\}$, т.е. $v^* \in \text{ext}^{oc}[A]$. Но это противоречит принятому ранее условию $(C + x) \cap \text{ext}^{oc}[A] = \emptyset$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть O бесконечно. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество точек, то $\text{conv}^{oc}[A] = \text{conv}^{oc}[\text{ext}^{oc}[A]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из доказательства теоремы 7, если $\text{conv}^{oc}[\text{ext}^{oc}[A]] \subset \text{conv}^{oc}[A]$, то найдется $x \in A$ такая, что $(C+x) \cap \text{ext}^{oc}[A] = \emptyset$. Тогда $x \notin \text{ext}^{oc}[A]$. Так как A конечно, то $(C+x) \cap A$ конечно. Из этого следует, что мы можем найти такую точку $y \in (C+x) \cap A$, что $C+y \subset C+x$ и $(C+y) \cap ((C+x) \cap A) = \{y\}$. Следовательно, $(C+y) \cap A = \{y\}$. Тогда $y \in \text{ext}^{oc}[A]$. Получаем противоречие с $(C+x) \cap \text{ext}^{oc}[A] = \emptyset$. Следствие доказано.

Перейдем теперь к вопросу вычислительной сложности нахождения OC -выпуклых оболочек.

ТЕОРЕМА 10. Пусть произвольно заданы размерность n линейного пространства, конечное множество ненулевых векторов (направлений) $O \subset \mathbb{R}^n$, конечное множество точек $A \subset \mathbb{R}^n$ и выбрана некоторая точка $a \in A$. Тогда проблема распознавания принадлежности точки a к множеству $\text{ext}^{oc}[A]$ NP-полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, как полиномиально свести проблему выполнимости КНФ к данной задаче. Пусть задана произвольная КНФ $F = \bigwedge_{i=1}^p C_i$, где C_i – некоторая дизъюнкция литералов из множества $\{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$. Допустим, что $O = \{e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n\}$, где векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $A = \{a_i \mid i \in \overline{0, p}\}$, где $a_0 = \mathbf{0}$ – начало координат, $a_i = \alpha_1^{(i)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(i)} e_n \forall i \in \overline{1, p}$. Коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$ определяются следующим образом: $\alpha_j^{(i)} = -1$, если литерал x_j входит в C_i ; $\alpha_j^{(i)} = 1$, если литерал $\bar{x}_j$ входит в C_i ; $\alpha_j^{(i)} = 0$, если ни x_j , ни $\bar{x}_j$ не входят в C_i . Докажем, что точка a_0 принадлежит $\text{ext}^{oc}[A]$ тогда и только тогда, когда КНФ F выполнима. Тогда для любого половинного множества $M \subset O$ множество $\mathbb{R}^n \setminus CH[M]$ будет семипространством OC -выпуклости в точке a_0 . Кроме того, каждой интерпретации булевых переменных $x_1, \dots, x_n$ можно взаимно-однозначно поставить в соответствие некоторое половинное множество $M(x_1, \dots, x_n) = \{e_1(x_1), \dots, e_n(x_n)\}$, где $e_j(x_j) = e_j$, $j \in \overline{1, n}$, если $x_j = 1$, и $e_j(x_j) = -e_j$, если $x_j = 0$. Заметим, что если имеются значения переменных $x_1, \dots, x_n$ такие, что $a_i \notin CH[M(x_1, \dots, x_n)]$, где $i \geq 1$ (или $a_i \in \mathbb{R}^n \setminus CH[M(x_1, \dots, x_n)]$), то найдется $\alpha_j^{(i)} \neq 0$ такое, что $\alpha_j^{(i)} = -1$, если $e_j(x_j) = e_j$, и $\alpha_j^{(i)} = 1$, если $e_j(x_j) = -e_j$. Но тогда дизъюнкт C_i будет выполняться при этих значениях $x_1, \dots, x_n$. Итак, если существуют значения переменных $x_1, \dots, x_n$, при которых $A \setminus \{a_0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus CH[M(x_1, \dots, x_n)]$, то это означает, что КНФ $F = \bigwedge_{i=1}^p C_i$ выполняется при этих $x_1, \dots, x_n$. Утверждение $A \setminus \{a_0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus CH[M(x_1, \dots, x_n)]$ эквивалентно $a_0 \in \text{ext}^{oc}[A]$. Таким образом, осуществлено полиномиальное сведение проблемы выполнимости КНФ к указанной в теореме задаче. Теперь покажем, что произвольная проблема определения $x \in \text{ext}^{oc}[A]$ принадлежит к классу NP. Заметим, что $x \in \text{ext}^{oc}[A]$ эквивалентно утверждению $(\exists M \subset O)(\forall y \in A \setminus \{x\})[y \in \mathbb{R}^n \setminus CH[M], M \cup -M = O \text{ и } M \cap -M = \emptyset]$ в силу теоремы 7. Выражение $(\forall y \in A \setminus \{x\})[y \in \mathbb{R}^n \setminus CH[M], M \cup -M = O \text{ и } M \cap -M = \emptyset]$ проверяется за полиномиальное время по длине входа $|O| + |A|$ для любого $M \subset O$. Из этого следует принадлежность задачи $x \in \text{ext}^{oc}[A]$ к классу NP. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Проблема распознавания принадлежности произвольной точки x из A к $\text{conv}^{oc}[A \setminus \{x\}]$ coNP-полна.

Таким образом, проблема вычисления OC -выпуклых оболочек достаточно сложна. Кроме того, мы можем частично ответить на вопрос И. Матоушека и П. Плехача [2], а именно: если задано некоторое “разумное” семейство множеств точек $\mathcal{Q}$ из $\mathbb{R}^n$, то как эффективно вычислить $\mathcal{Q}$ -оболочку конечного множества X (т.е. пересечение всех множеств из $\mathcal{Q}$, содержащих X)? Как следует из теоремы 10, если $\mathcal{Q} = OC$, то задача вычисления $\mathcal{Q}$ -оболочек является NP-трудной даже в случае выпуклости, порожденной пересечением дополнений ортантов. Однако, если мы зафиксируем размерность линейного пространства, например $\mathbb{R}^3$, то определенные в теореме 10 и ее следствии 3 проблемы становятся полиномиально разрешимыми. Действительно, чтобы определить будет ли точка $a \in A$ принадлежать $\text{conv}^{oc}[A]$, в силу следствия 1 теоремы 7 достаточно знать все OC -семипространства S_a^{oc} (или в силу теоремы 5 все C -семипространства O -выпуклости в точке a). Все OC -семипространства в точке a можно найти алгоритмом ENUMCONE. Число OC -семипространств по теореме 4 можно оценить как $O(m^{(n+1)(n-2)/2})$, т.е. как полином по m , если размерность n фиксирована. В то же время алгоритм ENUMCONE по теореме 3 обладает полиномиальной скоростью. Итак, общее время перечисления всех OC -семипространств в точке a полиномиально по входу алгоритма ENUMCONE. Очевидно, что все остальные необходимые проверки также занимают полиномиальное время.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Метельский Н. Н., Мартыничик В. Н. Частичная выпуклость // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №3. С. 406–413.
- [2] Matousek J., Plechac P. On functional separately convex hulls // KAM Series. Technical Report №95-292. Prague: Charles Univ., 1995.
- [3] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
- [4] Seymour P. D. A note on hyperplane generation // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 1994. P. 88–91.
- [5] Солтан В. П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
E-mail: naidenko@im.bas-net.by

Поступило
 02.11.1998