Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Микушева, О сходимости вполне сумм отрицательно ассоциированных случайных величин, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 411–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm958>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:15:22

УДК 519.214.5

О СХОДИМОСТИ ВПОЛНЕ СУММ ОТРИЦАТЕЛЬНО АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Е. Микушева

Эта работа обобщает результаты о сходимости вполне в законе больших чисел для подпоследовательностей на случай отрицательно ассоциированных неодинаково распределенных случайных величин.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Предельному поведению сумм независимых и слабо зависимых случайных величин посвящена обширная литература. В данной работе исследуется асимптотическое поведение сумм случайных слагаемых в схеме серий. Точнее говоря, нас будет интересовать сходимость вполне (*complete convergence*), введенная в работах П. Л. Хсу, Г. Роббинса [1] и П. Эрдоша [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность действительных случайных величин $\{Y_j, j \geq 1\}$ называется *сходящейся вполне к 0*, если $\sum_{j=1}^{\infty} P\{|Y_j| > \varepsilon\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Эрдош [2] доказал, что если $\{X_j, j \geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин и $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, то сходимость вполне к 0 последовательности $\{S_n/n, n \geq 1\}$ равносильна конечности второго момента величины X_j .

Этот результат можно рассматривать с нескольких точек зрения: во-первых, как результат о новом виде сходимости, которая (по лемме Бореля–Кантелли) влечет за собой сходимость почти наверное, во-вторых, как оценку скорости сходимости в усиленном законе больших чисел, и наконец, как усиленный закон больших чисел в схеме серий. А именно, рассматривается набор независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин $\{X_{k,l}, 1 \leq l \leq k, k \geq 1\}$, $S_k = \sum_{l=1}^k X_{k,l}$; тогда теорема Эрдоша [2] как раз устанавливает необходимое и достаточное условие для сходимости S_k к 0 почти наверное.

В дальнейшем появился целый ряд обобщений этого результата; упомянем лишь некоторые из них. Так Т. Ху, Ф. Мориц и Р. Л. Тэйлор [3] в 1992 году получили необходимые и достаточные условия для сходимости вполне последовательности $\{S_n/n^p, n \geq 1\}$, где $1/2 < p \leq 1$.

Асмуссен и Куртц [4] рассмотрели вопрос о сходимости вполне к 0 последовательности $\{S_{N_k}/N_k, k \geq 1\}$, где N_k – строго возрастающая последовательность натуральных

чисел, удовлетворяющая некоторым техническим условиям (в частности, она должна расти не медленнее степенной, но не быстрее показательной последовательностей). Далее А. Гут [5], [6] дополнил результат Асмуссена и Куртца, рассмотрев иные классы последовательностей N_k , а также используя более общую нормировку $\{S_{N_k}/N_k^p, k \geq 1\}$.

Тут следует сделать несколько замечаний. Во-первых, совокупность результатов Асмуссена, Куртца [4] и Гута [5], [6], вообще говоря, не покрывает все множество строго возрастающих последовательностей N_k . Во-вторых, в работах Гута [5], [6] рассматривается два класса последовательностей N_k , условно назовем их “быстро растущие” и “медленно растущие”. Для “медленно растущих” последовательностей им получены условия, являющиеся необходимыми и достаточными. В то же время, для “быстро растущих” последовательностей достаточные условия, предложенные упомянутым автором, вообще говоря, не являются необходимыми, как показали в своей работе А. Кузмачевска и Д. Шиналь [7].

Также обобщения теоремы Эрдоша рассматривались в работах [8]–[10].

Все перечисленные выше результаты имеют дело с последовательностями независимых случайных величин, мы же обратимся к отрицательно ассоциированным. Понятие отрицательно ассоциированной последовательности случайных величин введено в 1983 году К. Жоаг-Дев и Ф. Прошаном [11]. Напомним, что любое семейство независимых случайных величин автоматически будет отрицательно ассоциированным. Интересные примеры величин, обладающих отрицательной ассоциированной зависимостью, можно найти в [11].

Аналог теоремы Эрдоша для отрицательно ассоциированных случайных величин был получен в 1996 году Ч. Су [12].

Целью данной работы будет обобщение результата Ч. Су [12] и получение необходимых и достаточных условий для сходимости вполне к 0 нормированных сумм отрицательно ассоциированных случайных величин $\{S_{N_k}/N_k^p, k \geq 1\}$, $1/2 < p \leq 1$, для достаточно широкого класса последовательностей N_k .

Всюду далее мы рассматриваем действительные случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) .

2. Основные результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$, ($n \geq 2$) называются *отрицательно ассоциированными*, если для любых двух непустых непересекающихся множеств A и $B \subset \{1, \dots, n\}$ и пары покоординатно невозрастающих (неубывающих) функций f и g имеет место неравенство

$$\text{cov}(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)) \leq 0,$$

когда ковариация существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Массив случайных величин $\{X_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k, k \geq 1\}$ называется *слабо мажорируемым* случайной величиной X , если для некоторого $\beta > 0$ и для всех $t > 0$ и $k \geq 1$ выполняется условие

$$\frac{1}{N_k} \sum_{l=1}^{N_k} P\{|X_{k,l}| > t\} \leq \beta P\{|X| > t\}.$$

Это условие, предложенное Гуттом [6], строго слабее условия стохастической мажорируемости, т.е. $P\{|X_{k,l}| > t\} \leq P\{|X| > t\}$ для всех t . Соответствующие примеры приведены в работе [6].

Введем в рассмотрение строго возрастающую непрерывную функцию $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Будем считать, что

$$\psi(k) = N_k \in \mathbb{N} \quad \text{для } k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

и обратная к ней $\psi^{-1}(\cdot)$ является абсолютно непрерывной с производной γ .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть массив центрированных случайных величин $\{X_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k, k \geq 1\}$ слабо мажорируется случайной величиной X . Пусть к тому же, для любого фиксированного k величины $\{X_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k\}$ являются отрицательно ассоциированными. Предположим, что N_k задается введенной выше функцией ψ согласно (1).

Пусть также для заданного $p \in (1/2, 1]$ выполняется один из двух наборов условий:

а) для некоторых $C, \theta > 0$ и всех $y > 1, x > 0$

$$\gamma(xy) \leq Cy^\theta \gamma(x), \quad (2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l=1}^k N_l}{N_{k+1} k^\delta} > 0 \quad \text{при некотором } \delta > 0, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k P\{|X| \geq \varepsilon N_k^p\} < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0; \quad (4)$$

б) справедливо

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l=1}^k N_l}{N_{k+1}} < \infty, \quad (5)$$

$$E|X|^{1/p} < \infty. \quad (6)$$

Тогда, полагая $S_{k,n} = \sum_{l=1}^n X_{k,l}, n = 1, \dots, N_k$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} |S_{k,n}| \geq \varepsilon N_k^p\right\} < \infty \quad \text{при всех } \varepsilon > 0. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в теореме 2.1 положить $\psi(x) = x$, т.е. $N_k = k$, то, принимая во внимание, что условие $\sum_{k=1}^{\infty} k P\{|X| > k^p\} < \infty$ равносильно условию $E|X|^{2/p} < \infty$, получаем в качестве следствия теорему, доказанную для независимых случайных величин Ху, Морицем и Тэйлором [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2.1 в условиях пункта б) обобщает теорему Гута [6, теорема 4.2] на случай отрицательно ассоциированных случайных величин.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Примером последовательности, удовлетворяющей условиям (2) и (3), может служить $\psi(x) = x^\alpha$, т.е. $N_k = [k^\alpha]$, $\alpha \geq 1$, а последовательности, удовлетворяющей (5), $\psi(x) = 2^x$, $N_k = 2^k$ и $\psi(x) = 2^{2^x}$, $N_k = 2^{2^k}$. Теорема 2.1 не охватывает все множество строго возрастающих последовательностей N_k , впрочем, не существует до сих пор подобной теоремы и для независимых слагаемых.

Следующая теорема дает необходимое условие для выполнения (7).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\{X_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k\}$ – отрицательно ассоциированные случайные величины при любом $k \geq 1$. Тогда из (7) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_k} P\{|X_{k,l}| \geq \varepsilon N_k^p\} < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

В частности, если $\{X, X_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k, k \geq 1\}$ – одинаково распределенные случайные величины, то из (7) следует (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Назовем последовательность N_k , удовлетворяющую условиям (1), (2) и (3), “медленно растущей”, а удовлетворяющую (5), “быстро растущей”. Видим, что для “медленно растущих” последовательностей случайных величин условие (4) является необходимым и достаточным для выполнения (7), в то время как для “быстро растущих” необходимое и достаточное условия не совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В литературе часто используется другое определение “быстро растущих” последовательностей:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_{k+1}}{N_k} > 1;$$

которое является более ограничительным, чем (5). Действительно, оно означает, что существует $C > 1$ такое, что $N_{k+1} > CN_k$ для любого k . В частности, $N_l < C^{-(k-l)}N_k$ при $l < k$ или $\sum_{l \leq k} N_l < N_k \sum_{l \leq k} C^{-(k-l)} \leq CN_{k+1}/(C-1)$, откуда следует (5).

Рассмотрим величины

$$S_n^{(k)} = S_{k, N_k} - X_{kn} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{N_k} X_{kl}.$$

Сформулируем теорему, являющуюся обобщением результата Су [12] на достаточно широкий класс последовательностей N_k .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть задан массив $\{X, X_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k, k \geq 1\}$ одинаково распределенных, центрированных, для любого фиксированного k отрицательно ассоциированных случайных величин, $1/2 < p \leq 1$. Пусть $\{N_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям (1), (2) и (3). Тогда условие (4) является необходимым и достаточным для выполнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} |S_n^{(k)}| \geq \varepsilon N_k^p\right\} < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \quad (8)$$

3. Доказательства. Буквой C мы будем обозначать далее константы, вообще говоря, различные для разных формул.

Нам потребуются следующие утверждения.

ЛЕММА 3.1 [6]. Пусть массив случайных величин $\{X_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k, k \geq 1\}$ слабо мажорируется величиной X . Пусть $r > 0$, $A > 0$,

$$X_{k,l}(A) = |X_{k,l}| \cdot I_{\{|X_{k,l}| < A\}} + AI_{\{|X_{k,l}| \geq A\}}, \quad X_{k,l}^*(A) = X_{k,l} \cdot I_{\{|X_{k,l}| \geq A\}},$$

$$X(A) = |X| \cdot I_{\{|X| < A\}} + AI_{\{|X| \geq A\}}, \quad X^*(A) = X \cdot I_{\{|X| \geq A\}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{N_k} \sum_{l=1}^{N_k} \mathbb{E}(X_{k,l}(A))^r \leq \beta \mathbb{E}(X(A))^r, \quad \frac{1}{N_k} \sum_{l=1}^{N_k} \mathbb{E}|X_{k,l}^*(A)|^r \leq \beta \mathbb{E}|X^*(A)|^r.$$

Будем использовать также максимальное неравенство, полученное Су, Зао и Ванг.

ЛЕММА 3.2 [13]. Пусть $m \geq 2$ и $\{Z_i, i \geq 1\}$ – последовательность отрицательно ассоциированных случайных величин с $\mathbb{E}Z_i = 0$ и $\mathbb{E}|Z_i|^m < \infty$. Тогда существует константа $A_m > 0$ такая, что

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{l=1}^k Z_l \right|^m \leq A_m \left(\left(\sum_{l=1}^k \mathbb{E}Z_l^2 \right)^{m/2} + \sum_{l=1}^k \mathbb{E}|Z_l|^m \right).$$

ЛЕММА 3.3. Условие (4) эквивалентно следующему:

$$\mathbb{E}g(|X/\varepsilon|^{1/p}) < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0, \quad (9)$$

где $g(x) = \sum_{N_k \leq x} N_k$. Из (3) и (4) следует (6), а (5) и (6) влекут (4). В частности, из условий теоремы 2.1 в обоих пунктах выполняется и (4), и (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k \mathbb{P}\{|X| \geq \varepsilon N_k^p\} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{j \leq \left(\frac{|X|}{\varepsilon}\right)^{1/p} < j+1\right\} \sum_{N_k \leq j} N_k = \mathbb{E}g(|X/\varepsilon|^{1/p}),$$

откуда следует эквивалентность (4) и (9). С учетом соотношения $g(N_k) = \sum_{l=1}^k N_l$ получаем второе утверждение леммы.

ЛЕММА 3.4. Пусть функция

$$G(x) = \int_0^{\psi^{-1}(x)} \psi(t) dt = \int_0^x t \gamma(t) dt.$$

Тогда $G(x) - x \leq g(x) \leq G(x) + x$.

Таким образом, из (4) и (6) вытекает, что $\mathbb{E}G(|X|^{1/p}\lambda) < \infty$ для любого $\lambda > 0$, причем

$$\mathbb{E}G(|X|^{1/p}\lambda) = \frac{\lambda^2}{p} \int_0^{\infty} F(x) \gamma(\lambda x^{1/p}) x^{2/p-1} dx < \infty, \quad (10)$$

где $F(t) = \mathbb{P}\{|X| > t\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$g(x) \leq \sum_{k:k+1 \leq \psi^{-1}(x)} \psi(k) + N_k^* \leq \sum_{k:k+1 \leq \psi^{-1}(x)} \int_k^{k+1} \psi(t) dt + x \leq G(x) + x;$$

здесь $k^* = \max\{k : N_k \leq x\}$. Аналогичными выкладками приходим ко второму неравенству. Выражение (10) получается интегрированием по частям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Произведем урезание случайных величин:

$$Y_{k,l} = X_{k,l} \cdot I_{\{|X_{k,l}| \leq N_k^p\}} + N_k^p \cdot I_{\{X_{k,l} \geq N_k^p\}} - N_k^p \cdot I_{\{X_{k,l} \leq -N_k^p\}}, \quad S_{k,n}^* = \sum_{l=1}^n Y_{k,l},$$

$$Y_k = X \cdot I_{\{|X| \leq N_k^p\}} + N_k^p \cdot I_{\{X \geq N_k^p\}} - N_k^p \cdot I_{\{X \leq -N_k^p\}}, \quad X_k = |X| \cdot I_{\{|X| \leq N_k^p\}}.$$

Поскольку $Y_{k,l}$ являются неубывающими функциями от $X_{k,l}$, то величины $\{Y_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k\}$ для любого k обладают свойством отрицательной ассоциированности.

Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\exists n : S_{k,n}^* \neq S_{k,n}\} \leq \beta N_k \mathbf{P}\{|X| \geq N_k^p\}.$$

Из леммы 3.3 следует выполнение условия (4), поэтому достаточно доказать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} |S_{k,n}^*| \geq \varepsilon N_k^p\right\} < \infty.$$

Принимая во внимание центрированность и слабую могожорируемость случайных величин, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N_k} \frac{|\mathbf{E} S_{k,n}^*|}{N_k^p} &\leq \sum_{l=1}^{N_k} \frac{|\mathbf{E} Y_{k,l}|}{N_k^p} \leq \sum_{l=1}^{N_k} \mathbf{P}\{|X_{k,l}| > N_k^p\} + \sum_{l=1}^{N_k} \frac{|\mathbf{E} X_{k,l} \cdot I_{\{|X_{k,l}| > N_k^p\}}|}{N_k^p} \\ &\leq \beta N_k \mathbf{P}\{|X| > N_k^p\} + \beta \frac{\mathbf{E}|X| \cdot I_{\{|X| > N_k^p\}}}{N_k^{p-1}} \leq \beta N_k \mathbf{P}\{|X| > N_k^p\} \\ &\quad + \beta \frac{N_k^{p(1-1/p)} \mathbf{E}|X|^{1/p} I_{\{|X| > N_k^p\}}}{N_k^{p-1}} = \beta N_k \mathbf{P}\{|X| > N_k^p\} + \beta \mathbf{E}|X|^{1/p} I_{\{|X| > N_k^p\}}. \end{aligned}$$

По лемме 3.3 выполняются условия (6) и (4); первое из них дает $\mathbf{E}|X|^{1/p} I_{\{|X| > N_k^p\}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а второе влечет соотношение $N_k \mathbf{P}\{|X| > N_k^p\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\max_{1 \leq n \leq N_k} \frac{|\mathbf{E} S_{k,n}^*|}{N_k^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} |S_{k,n}^* - \mathbf{E} S_{k,n}^*| \geq \frac{\varepsilon}{2} N_k^p\right\}.$$

Применив лемму 3.2 и неравенство Чебышева, имеем

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} |S_{k,n}^* - \mathbf{E}S_{k,n}^*| \geq \varepsilon N_k^p\right\} \leq \frac{A_m}{(\varepsilon N_k^p)^m} \left(\left(\sum_{l=1}^{N_k} \mathbf{E}Z_{k,l}^2 \right)^{m/2} + \sum_{l=1}^{N_k} \mathbf{E}|Z_{k,l}|^m \right),$$

где $Z_{k,l} = Y_{k,l} - \mathbf{E}Y_{k,l}$.

Заметим также, что по лемме 3.1 для любого $j \geq 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{N_k} \sum_{l=1}^{N_k} \mathbf{E}|Z_{k,l}|^j \leq 2^j \beta \mathbf{E}|Y_k|^j.$$

К тому же, $\mathbf{E}Y_k^j = N_k^{jp} \mathbf{P}\{|X| > N_k^p\} + \mathbf{E}X_k^j$. Значит,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} |S_{k,n}^* - \mathbf{E}S_{k,n}^*| \geq \varepsilon N_k^p\right\} \\ & \leq C \left((N_k \mathbf{P}\{|X| > N_k^p\})^{m/2} + \left(\frac{\mathbf{E}X_k^2}{N_k^{2p-1}} \right)^{m/2} + N_k \mathbf{P}\{|X| > N_k^p\} + \frac{\mathbf{E}X_k^m}{N_k^{mp-1}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Обратимся к случаю а):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} N_k \mathbf{P}\{|X| \geq u N_k^p\} du = \int_0^1 u^\alpha \mathbf{E}g(|X/u|^{1/p}) du \\ & \leq \int_0^1 u^\alpha \mathbf{E}G(|X/u|^{1/p}) du + \int_0^1 u^\alpha \mathbf{E}|X/u|^{1/p} du \\ & = C \int_0^1 \frac{u^\alpha}{u^{2/p}} \int_0^\infty F(x) \gamma\left(\left(\frac{x}{u}\right)^{1/p}\right) x^{2/p-1} dx du + C \int_0^1 u^{\alpha-1/p} du \\ & \leq C \int_0^1 u^{\alpha-(2+\theta)/p} du \int_0^\infty F(x) \gamma(x^{1/p}) x^{2/p-1} dx + C \int_0^1 u^{\alpha-1/p} du. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали лемму 3.4 и условие (2). Таким образом, получаем для любого $\alpha > (2 + \theta)/p$ сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k \int_0^1 u^\alpha \mathbf{P}\{|X| \geq u N_k^p\} du. \quad (12)$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{\mathbf{E}X_k^m}{N_k^{mp-1}} = N_k^{1-pm} \int_0^{N_k^p} t^m d\mathbf{P}\{|X| \leq t\} \leq N_k m \int_0^1 u^{m-1} \mathbf{P}\{|X| \geq u N_k^p\} du.$$

Из последнего неравенства и (12) получаем, что для любого $m > 1 + (2 + \theta)/p$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} X_k^m}{N_k^{pm-1}} < \infty. \quad (13)$$

Используя простое неравенство

$$\mathbb{E} X_k^2 = \mathbb{E} X^2 \cdot I_{\{|X| \leq N_k^p\}} \leq \frac{N_k^{2p}}{g(N_k)} \mathbb{E} g(|X|^{1/p})$$

и условия (3) и (9), а также то, что $g(N_k) = \sum_{l=1}^k N_l$, легко установить неравенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{E} X_k^2}{N_k^{2p-1}} \right)^{m/2} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{N_k}{g(N_k)} \right)^{m/2} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\delta m/2} < \infty \quad (14)$$

при $m \geq 2/\delta$. Из (11), (13) и (14) следует, что утверждение теоремы в случае а) доказано.

Обратимся теперь к случаю б). Заметим, что (5) влечет существование $\Delta > 0$ и $k_0 \leq 1$ таких, что $N_{k+1} \geq \Delta \sum_{l=1}^k N_l$, $k \geq k_0$, откуда по индукции можно получить, что $N_k \geq c\lambda^k$, $k > k_0$, где $\lambda = 1 + \Delta > 1$. Тогда для любого $j \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |X|^j \cdot I_{\{|X| \leq N_k^p\}}}{N_k^{jp-1}} &= \mathbb{E} |X|^j \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{\{|X| \leq N_k^p\}}}{N_k^{jp-1}} \right) \\ &\leq \mathbb{E} |X|^j \cdot \left(\sum_{k: N_k \geq X^{1/p}} \frac{1}{N_k^{jp-1}} \right) \leq C \mathbb{E} |X|^{1/p}. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя (18) с $j = 2$, получим оценку $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} X_k^2 / N_k^{2p-1} < \infty$, а значит, и для любого $m > 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{E} X_k^2}{N_k^{2p-1}} \right)^{m/2} < \infty. \quad (16)$$

Таким образом, из (11), (16) и (15) при $j = m$ следует утверждение теоремы 2.1 в случае б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Заметим, что

$$\max_{1 \leq n \leq N_k} |X_{k,n}| \leq 2 \max_{1 \leq n \leq N_k} |S_{k,n}|.$$

Поэтому из (7) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \max_{1 \leq n \leq N_k} |X_{k,n}| \geq \varepsilon N_k^p \right\} < \infty. \quad (17)$$

Свойство отрицательной определенности случайных величин дает неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} X_{k,n} \leq t\right\} \leq \prod_{n=1}^{N_k} \mathbf{P}\{X_{k,n} \leq t\} \quad \text{для любого } t > 0,$$

так как функция $f(x) = 1_{\{x \leq t\}}$ является невозрастающей, или, что то же самое,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} X_{k,n} \geq t\right\} \geq 1 - \prod_{n=1}^{N_k} (1 - \mathbf{P}\{X_{k,n} \geq t\}).$$

Построим на некотором вероятностном пространстве набор независимых случайных величин $\{Z_{k,l}, 1 \leq l \leq N_k, k \geq 1\}$ таких, что величина $Z_{k,l}$ совпадает по распределению с $X_{k,l}$. Тогда $\mathbf{P}\{\max_{1 \leq n \leq N_k} Z_{k,n} \geq t\} = 1 - \prod_{n=1}^{N_k} (1 - \mathbf{P}\{X_{k,n} \geq t\})$ и, следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\max_{1 \leq n \leq N_k} Z_{k,n} \geq \varepsilon N_k^p\} < \infty$. По лемме Бореля–Кантелли имеем

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq n \leq N_k} Z_{k,n} \geq \varepsilon N_k^p \text{ бесконечно часто по } k\right\} = 0.$$

Учитывая, что величины $Z_{k,l}$ независимы в совокупности, еще раз применяем лемму Бореля–Кантелли:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_k} \mathbf{P}\{Z_{k,l} \geq \varepsilon N_k^p\} < \infty.$$

Проведя аналогичные рассуждения для величин $\{-X_{k,n}, 1 \leq n \leq N_k\}$, которые также являются отрицательно ассоциированными величинами, получим утверждение теоремы 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Достаточность легко следует из теоремы 2.1 и очевидного неравенства

$$\max_{1 \leq n \leq N_k} |S_n^{(k)}| \leq |S_{k,N_k}| + \max_{1 \leq n \leq N_k} |X_{k,n}|,$$

$$\text{а } \mathbf{P}\{\max_{1 \leq n \leq N_k} X_{k,n} \geq \varepsilon N_k^p\} \leq N_k \mathbf{P}\{X_{k,n} \geq N_k^p\}.$$

Докажем необходимость. Поскольку

$$S_{k,N_k} = \frac{1}{N_k - 1} \sum_{n=1}^{N_k} S_n^{(k)},$$

то

$$|S_{k,N_k}| \leq \frac{N_k}{N_k - 1} \max_{1 \leq n \leq N_k} |S_n^{(k)}|.$$

Итак,

$$\max_{1 \leq n \leq N_k} |X_{k,n}| \leq |S_{k,N_k}| + \max_{1 \leq n \leq N_k} |S_n^{(k)}| \leq \left(2 + \frac{1}{N_k - 1}\right) \max_{1 \leq n \leq N_k} |S_n^{(k)}|.$$

Следовательно, из (8) следует (17). Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как при доказательстве теоремы 2.2.

Автор выражает благодарность профессору А. В. Булинскому за множество полезных замечаний, способствовавших улучшению данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hsu P. L., Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers // Proc. Nat. Acad. Sci. 1947. V. 33. P. 25–31.
- [2] Erdős P. On a theorem of Hsu and Robbins // Ann. Math. Statist. 1949. V. 20. P. 286–291.
- [3] Hu T. C., Moricz F., Taylor R. L. Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables // Acta Math. Hungar. 1992. V. 54. P. 153–162.
- [4] Asmussen S., Kurtz T. G. Necessary and sufficient conditions for complete convergence in the law of large numbers // Ann. Probab. 1980. V. 8. № 1. P. 176–182.
- [5] Gut A. On complete convergence in the law of large numbers for subsequences // Ann. Probab. 1985. V. 13. № 4. P. 1286–1291.
- [6] Gut A. Complete convergence for arrays // Periodica Math. Hungar. 1992. V. 25. № 1. P. 51–75.
- [7] Kuczmaszewska A., Szynal D. On the Hsu–Robbins law of large numbers for subsequences // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1988. V. 36. № 1. P. 69–79.
- [8] Bulinski A. V. Limit laws for arrays // Int. Congress of Mathematicians. Abstracts of communications. Berlin, 1998. P. 24.
- [9] Bulinski A. V., Mikusheva A. E. SLLN and other laws for arrays // 7th Vilnius Conference on Probab. Theory. Abstracts of communications, 1998. P. 167.
- [10] Микушева А. Е. Закон больших чисел и логарифмический закон в схеме серий // Фундамент. и прикл. матем. (в печати).
- [11] Joag-Dev K., Proschan F. Negative association of random variables with applications // Ann. Statist. 1983. V. 11. P. 286–295.
- [12] Su C. A theorem of Hsu–Robbins type for negatively associated sequence // Chinese Sci. Bull. 1996. V. 41. № 6. P. 441–446.
- [13] Su C., Zhao L., Wang Y. Moment inequality and weak convergence for negatively associated sequences // Sci. in China. Ser. A. 1997. V. 40. № 2. P. 172–182.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.12.1999