Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Назарова, Нормальная аппроксимация для случайных линейных процессов и полей в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 421–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm959>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:10:11

УДК 519.214

НОРМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Н. Назарова

Доказана центральная предельная теорема для линейных случайных полей, заданных на целочисленной решетке произвольной размерности и принимающих значения в гильбертовом пространстве. Показано, что предложенные условия оптимальны.

Библиография: 6 названий.

Исследование предельного поведения сумм случайных величин со значениями в банаховых или гильбертовых пространствах – традиционная область теории вероятностей, имеющая ряд статистических приложений. В данной работе изучаются суммы, порожденные линейными случайными полями со значениями в гильбертовом пространстве. Такие суммы возникают в задачах оценивания и прогнозирования для некоторых классов случайных процессов и полей (см., например, [1]). Цель данной работы – доказать центральную предельную теорему (ЦПТ) для линейных полей, заданных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ при произвольном $d \geq 1$. Тем самым, достигается обобщение результатов недавней статьи [2]. Доказано также, что предложенные условия носят оптимальный характер.

Нам потребуется ряд определений.

Пусть H – сепарабельное действительное гильбертово пространство, его норма $\|\cdot\|_H$ индуцирована скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{L}(H)$ – пространство линейных ограниченных операторов из H в H . Пусть $\{\xi_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ – поле случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значения в H , а $\{a_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ – семейство линейных операторов из $\mathcal{L}(H)$.

Линейным процессом (или *полем*) называется множество случайных величин следующего вида:

$$X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{j}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{j}}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \quad (1)$$

Здесь и далее мы предполагаем, что $\xi_{\mathbf{k}}$ независимы, одинаково распределены (н.о.р.), центрированы, $E\|\xi_0\|^2 < \infty$, а $\sum \|a_{\mathbf{j}}\|^2 < \infty$. Тогда нетрудно видеть (см. [3, гл. 3.2]), что ряд (1) сходится почти наверное и в пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega)$, состоящем из функций, отображающих Ω в H и имеющих интегрируемый квадрат нормы.

Определим частичные суммы

$$S_n = \sum_{1 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}, \quad n \geq 1.$$

Для векторов $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ и $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ неравенство $\mathbf{k} \leq \mathbf{n}$ означает, что $k_i \leq n_i$ при всех $i = 1, \dots, d$.

В простейшем случае, когда ξ_k – действительнoзначные случайные величины, a_k – действительные числа, а индекс $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $d = 1$, поведение S_n хорошо изучено. (Для таких величин вместо $a_j(\xi_{k-j})$ в (1) берется $a_j \xi_{k-j}$.) Например, известна следующая

ТЕОРЕМА 1 (см. [4, теорема 18.6.5]). *Пусть $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – н.о.р. центрированные случайные величины с конечным вторым моментом, $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность действительных чисел таких, что*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad (2)$$

а X_k, S_n определены выше. Тогда если $E|S_n|^2 \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{S_n}{\sqrt{E|S_n|^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

В случае, если ξ_k принимают значения в бесконечномерном пространстве, ситуация существенно меняется. Так, в теореме 3 из работы [2] было показано, что выполнение условия (2) (конечно, в нем надо заменить $|a_k|$ на $\|a_k\|_{\mathcal{L}(H)}$) не обеспечивает даже плотности последовательности распределений $S_n/\sqrt{E|S_n|^2}$.

Для выполнения ЦПТ с нормировкой $\sqrt{n}$ оказывается достаточным (см. [2, теорема 2]) более сильное условие

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|a_k\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty. \quad (3)$$

В данной работе ЦПТ доказана для случайных величин, принимающих значения в гильбертовом пространстве и индексированных многомерным индексом $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ (теорема 2). Достаточное условие оказывается аналогичным (3). Опираясь на идеи работы [2], показано, что полученное условие неумлучшаемо (теорема 3).

Для любого вектора $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ положим $|\mathbf{n}| = n_1 \cdots n_d$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\{\xi_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ – описанное выше случайное поле. Предположим, что*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|a_j\| < \infty. \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} S_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, AC_{\xi_0} A^*), \quad \mathbf{n} \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $A = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j$, A^* – сопряженный оператор для A , C_{ξ_0} – ковариационный оператор ξ_0 , а $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ означает, что $|\mathbf{n}| \rightarrow \infty$, причем все координаты не убывают.

Для доказательства понадобится следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 1. Пусть $\{b_j\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$ — элементы какого-либо нормированного пространства — таковы, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|b_j\| < \infty, \quad (6)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} b_j = 0. \quad (7)$$

Тогда

$$\frac{1}{|n|} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \left\| \sum_{1-j \leq i \leq n-j} b_i \right\|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Условимся записать $[-x, x]$ для любого вектора $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ понимать как обозначение прямоугольника в $\mathbb{R}^d$:

$$[-x, x] = [-x_1, x_1] \times \dots \times [-x_d, x_d].$$

Аналогично

$$(-x, x) = (-x_1, x_1) \times \dots \times (-x_d, x_d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Обозначим

$$D_n = \sum_{j \notin (-n, n)} \|b_j\|.$$

В силу (6) имеем $D_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{|n|} \sum_{j \notin (-2n, 2n)} \left\| \sum_{1-j \leq i \leq n-j} b_i \right\|^2 &\leq \frac{1}{|n|} \sum_{j \notin (-2n, 2n)} \left(\sum_{1-j \leq i \leq n-j} \|b_i\| \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{|n|} \sum_{j \notin (-2n, 2n)} \left(\sum_{1-j \leq i \leq n-j} \|b_i\| \right) \left(\sum_{i \notin (-n, n)} \|b_i\| \right) \\ &\leq D_n \cdot \frac{1}{|n|} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{1-j \leq i \leq n-j} \|b_i\| \right) = D_n \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|b_j\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (9)$$

здесь мы снова учли (6).

Рассмотрим функцию

$$h_n(x) = \left\| \sum_{1 - [n|x|] \leq i \leq n - [n|x|]} b_i \right\|^2$$

для всех $x \in [-2, 2]$. Здесь $[\cdot]$ означает взятие целой части. Для вектора из $\mathbb{R}^d$ целая часть вычисляется по координатам. Заметим, что из (6) и (7) следует, что $\forall x \neq 0$ $h_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$|h_n(x)| \leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \|b_{i - [n|x|]}\| \right)^2 \leq \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \|b_i\| \right)^2 < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|n|} \sum_{j \in [-2n, 2n-1]} \left\| \sum_{1-j \leq i \leq n-j} b_i \right\|^2 &= \frac{1}{|n|} \sum_{j \in [-2n, 2n-1]} h_n \left(\frac{j}{|n|} \right) \\
 &= \sum_{j \in [-2n, 2n-1]} \int_{[j/|n|, (j+1)/|n|]} h_n(x) dx \\
 &= \int_{[-2n/|n|, n/|n|]} h_n(x) dx \\
 &\leq \int_{[-2, 2]} h_n(x) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)
 \end{aligned}$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Теперь из (9) и (10) получаем (8). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала покажем, что в условиях этой теоремы выполнено соотношение

$$\frac{1}{|n|} \mathbb{E} \left\| S_n - A \sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k \right\|_H^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Действительно,

$$S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} X_k = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} a_m (\xi_k - m) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_{k-j} \right) \xi_j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 S_n - A \sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k &= \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_{k-j} - A \right) \xi_j + \sum_{j \notin [1, n]} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_{k-j} \right) \xi_j \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} b_{k-j} \right) \xi_j, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где $b_0 = a_0 - A$ и $b_i = a_i$ для всех $i \neq 0$.

Очевидно, операторы $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда, используя (12), имеем

$$\frac{1}{|n|} \mathbb{E} \left\| S_n - A \sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k \right\|_H^2 \leq \frac{\mathbb{E} \|\xi_0\|_H^2}{|n|} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \left\| \sum_{1-j \leq i \leq n-j} b_i \right\|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее, из ЦПТ для н.о.р. центрированных случайных величин со значениями в H , имеющих конечный второй момент (см., например, [5]), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{|n|}} \sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, C_{\xi_0}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Поскольку A – линейный оператор, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} A \sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, AC_{\xi_0} A^*), \quad \mathbf{n} \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Теперь из (11) и (13), применяя теорему 4.1 из [6], получим (5). Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что условие (4) теоремы 2 не может быть улучшено, а значит, в случае бесконечномерного пространства не существует никакого аналога теоремы 1.

Условимся называть семейство случайных величин *плотным*, если плотно семейство их распределений.

ТЕОРЕМА 3. *Условие (4) теоремы 2 точно, т.е. для любого множества положительных чисел t_k ($k \in \mathbb{Z}^d$) таких, что*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} t_k = \infty, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} t_k^2 < \infty,$$

существует поле н.о.р. центрированных случайных величин $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ со значениями в H , для которых $0 < \mathbb{E}\|\xi_0\|_H^2 < \infty$, и существует семейство операторов $\{a_k \in \mathcal{L}(H), k \in \mathbb{Z}^d\}$ с нормой $\|a_k\| = t_k$, при этом

- 1) *семейство $\{S_n / \sqrt{|\mathbf{n}|}\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ не плотно;*
- 2) *существует последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ такая, что $\mathbf{n}_k \rightarrow \infty$ и $\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2 / |\mathbf{n}_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$;*
- 3) *семейство $\{S_n / \sqrt{\mathbb{E}\|S_n\|^2}\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ не плотно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства построим указанные выше множества случайных величин и операторов. Положим

$$T_n = \sum_{k \in [-n, n]} t_k, \quad n \in \mathbb{N}^d, \quad z_k = (1 + T_{([2\sqrt[k]{k}/3], \dots, [2\sqrt[k]{k}/3])})^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$g_p = \sqrt{z_p - z_{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\{N_{p,k}\}_{p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d}$ – массив н.о.р. действительных случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, и $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированный базис пространства H . Определим действие линейных операторов $\{a_k\}$ на базисных векторах:

$$a_k(e_p) = t_k e^{-\|k\|^2/p} e_p = a_k(p) e_p, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad p \geq 1,$$

где $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_d^2}$. Очевидно, что $\|a_k\|_{\mathcal{L}(H)} = t_k$.

Определим теперь случайные величины

$$\xi_k = \sum_{p=1}^{\infty} g_p N_{p,k} e_p.$$

Легко заметить, что $\mathbb{E}\xi_{\mathbf{k}} = 0$ и $0 < \mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < \infty$, так как

$$\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} g_p^2 \mathbb{E}N_{p,0}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} g_p^2 = z_1 = \frac{1}{1 + T_{[1/3]}} = \frac{1}{1 + T_0} = \frac{1}{1 + t_0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{n}} &= \sum_{1 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} = \sum_{1 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{j}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{j}}) \\ &= \sum_{1 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{p=1}^{\infty} g_p N_{p,\mathbf{k}-\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}(p) e_p = \sum_{p=1}^{\infty} S_{\mathbf{n}}(p) e_p, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$S_{\mathbf{n}}(p) = g_p \sum_{1 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} N_{p,\mathbf{k}-\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}(p).$$

Заметим, что при любом фиксированном $p \geq 1$ операторы $\{a_{\mathbf{j}}(p)\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ удовлетворяют условиям теоремы 2 в одномерном пространстве $H^{(p)} = \{\lambda e_p\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Действительно,

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \|a_{\mathbf{j}}(p)\|_{\mathcal{L}(H^{(p)})} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} t_{\mathbf{j}} e^{-(j_1^2 + \dots + j_d^2)/p} < \infty.$$

Следовательно, по теореме 2

$$\frac{S_{\mathbf{n}}(p)}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, c_p), \quad \mathbf{n} \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где c_p – некоторые положительные числа.

Рассмотрим множество

$$\left\{ r_{\mathbf{n}} = \frac{\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}}\|^2}{|\mathbf{n}|}, \quad \mathbf{n} \geq 1 \right\}. \quad (16)$$

Выберем последовательность $\mathbf{n}_k \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{n}_k = (k, \dots, k)$, $k \in \mathbb{N}$, и докажем, что

$$r_{\mathbf{n}_k} \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (17)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{n}_k} &= \frac{\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2}{|\mathbf{n}_k|} \geq \frac{1}{|\mathbf{n}_k|} \sum_{p=|\mathbf{n}_k|^2}^{\infty} \mathbb{E}S_{\mathbf{n}_k}^2(p) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{n}_k|} \sum_{p=|\mathbf{n}_k|^2}^{\infty} g_p^2 \mathbb{E} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{1 \leq \mathbf{l} \leq \mathbf{n}_k} a_{\mathbf{j}}(p) N_{p,\mathbf{l}-\mathbf{j}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{|\mathbf{n}_k|} \sum_{p=|\mathbf{n}_k|^2}^{\infty} g_p^2 \mathbb{E} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{1 \leq \mathbf{l} \leq \mathbf{n}_k} a_{\mathbf{l}+\mathbf{j}}(p) N_{p,-\mathbf{j}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{|\mathbf{n}_k|} \sum_{p=|\mathbf{n}_k|^2}^{\infty} g_p^2 \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{1+\mathbf{j} \leq \mathbf{l} \leq \mathbf{n}_k+\mathbf{j}} t_{\mathbf{l}} e^{-\|\mathbf{l}\|^2/p} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Куб $\Delta_j = \{l \in \mathbb{Z}^d : 1+j \leq l \leq n_k+j\}$ включает в себя меньший куб $\Delta = \{m \in \mathbb{Z}^d : -[n_k/3] \leq m \leq [n_k/3]\}$, если выполняются неравенства

$$1+j \leq -\left[\frac{n_k}{3}\right], \quad n_k+j \geq \left[\frac{n_k}{3}\right]. \quad (19)$$

В координатной записи это означает, что

$$\left[\frac{k}{3}\right] - k \leq j_i \leq -\left[\frac{k}{3}\right] - 1, \quad i = 1, \dots, d.$$

Таким образом, вектор j может принимать по каждой координате ровно

$$\left(\left(-\left[\frac{k}{3}\right] - 1\right) - \left(\left[\frac{k}{3}\right] - k\right) + 1\right) = k - 2\left[\frac{k}{3}\right]$$

значений. Так как $k - 2[k/3] \geq k/3$, то всего различных j , удовлетворяющих системе (19), будет не менее $(k/3)^d = |n_k|/3^d$. Учитывая это, продолжим неравенство (18):

$$\begin{aligned} r_{n_k} &\geq \frac{1}{|n_k|} \sum_{p=|n_k|^2}^{\infty} g_p^2 \cdot \left|\frac{n_k}{3}\right| \cdot \left(\sum_{-[n_k/3] \leq l \leq [n_k/3]} t_l e^{-\|l\|^2/p}\right)^2 \\ &\geq \frac{|n_k/3|}{|n_k|} \cdot \{e^{-|[n_k/3]|^2/|n_k|^2}\}^2 \cdot z_{|n_k|^2} \cdot T_{[n_k/3]}^2 \\ &\geq \frac{1}{3^d} e^{-2/9^d} \cdot \frac{T_{([k/3], \dots, [k/3])}^2}{1 + T_{([\sqrt[2d]{|n_k|^2/3}], \dots, [\sqrt[2d]{|n_k|^2/3}])}} \\ &= \frac{1}{3^d} e^{-2/9^d} \cdot \frac{T_{([k/3], \dots, [k/3])}^2}{1 + T_{([k/3], \dots, [k/3])}} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, доказали (17) и утверждение 2) теоремы 3.

Очевидно, что

$$\frac{S_{n_k}}{\sqrt{\mathbb{E}\|S_{n_k}\|^2}} = \frac{S_{n_k}}{\sqrt{|n_k|}} \cdot \sqrt{\frac{|n_k|}{\mathbb{E}\|S_{n_k}\|^2}}. \quad (20)$$

Обозначим символом θ случайную величину $\theta: \Omega \rightarrow H$, принимающую тождественно нулевое значение. Напомним, что *конечномерными распределениями случайного элемента* $\zeta: \Omega \rightarrow H$ называется семейство распределений проекций ζ на конечномерные подпространства $H^k \subset H$. Тогда из (14)–(17) и (20) следует, что верно утверждение

А: все конечномерные распределения последовательности $\{S_{n_k}/\sqrt{\mathbb{E}\|S_{n_k}\|^2}\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходятся к конечномерным распределениям величины θ .

Предположим, что выполнено также предположение

В: последовательность $\{S_{n_k}/\sqrt{\mathbb{E}\|S_{n_k}\|^2}\}_{k \in \mathbb{N}}$ плотна.

Тогда в силу А и В она сходится по распределению к нулю как элементу гильбертова пространства H (см. [5, гл. 2.1]).

Рассмотрим последовательность $Y_k = \|S_{\mathbf{n}_k}\|^2 / \mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2$ и докажем, что она равномерно интегрируема. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_k \mathbb{E} Y_k I\{Y_k > c\} &= \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_k \frac{1}{\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2} \mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2 I\{\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2 > c \mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2\} \\ &\leq \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_k \frac{1}{(\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2)^2} \cdot \frac{1}{c} \mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^4. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как

$$\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2 = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}} v_{\mathbf{j}}^2 \eta_{\mathbf{j}}^2,$$

где $\eta_{\mathbf{j}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, независимы, а $v_{\mathbf{j}}^2 \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^4 &= \mathbb{E}\left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}} v_{\mathbf{j}}^2 \eta_{\mathbf{j}}^2\right)^2 = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}} v_{\mathbf{j}}^4 \mathbb{E}\eta_{\mathbf{j}}^4 + 2 \sum_{\mathbf{i} \neq \mathbf{j}} v_{\mathbf{i}}^2 v_{\mathbf{j}}^2 \mathbb{E}\eta_{\mathbf{i}}^2 \mathbb{E}\eta_{\mathbf{j}}^2 \\ &\leq 3 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}} v_{\mathbf{j}}^2\right)^2 = 3(\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2)^2 \end{aligned}$$

и можно продолжить неравенство (21). Получим

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_k \mathbb{E} Y_k I\{Y_k > c\} \leq \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_k \frac{3}{c} = 0.$$

Так как $Y_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, $k \rightarrow \infty$, и $\{Y_k\}$ – равномерно интегрируемы, то по теореме 5.4 из [6] получаем $\mathbb{E} Y_k \rightarrow \mathbb{E} 0 = 0$. Но $\mathbb{E} Y_k = 1 \not\rightarrow 0$. Получили противоречие. Значит, предположение В неверно и последовательность $\{S_{\mathbf{n}_k} / \sqrt{\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}_k}\|^2}\}_{k \in \mathbb{N}}$ не плотна, тогда и все семейство $\{S_{\mathbf{n}} / \sqrt{\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}}\|^2}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d}$ не плотно. Этим доказано утверждение 3) теоремы 3.

Далее, из (20) легко видеть, что последовательность $\{S_{\mathbf{n}_k} / \sqrt{|\mathbf{n}_k|}\}_{k \in \mathbb{N}}$ также не плотна, что влечет утверждение 1). Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность проф. А. В. Булинскому за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Merlevède F. Sur l'inversibilité des processus linéaires à valeurs dans un espace de Hilbert // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 321. P. 477–480.
- [2] Merlevède F., Peligrad M., Utev S. Sharp conditions for the CLT of linear processes in a Hilbert space // J. Theor. Probab. 1997. V. 10. № 3. P. 681–693.
- [3] Araujo A., Giné E. The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables. New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [4] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. М.: Наука, 1965.
- [5] Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Space. Berlin: Springer, 1991.
- [6] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.