Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Ахунжанов, О распределении по модулю 1 экспоненциальных последовательностей, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 163–171

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm96>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:07:08

УДК 511.21

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО МОДУЛЮ 1 ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Р. К. Ахунжанов

Получены новые количественные результаты о пересечении выигрышных множеств и его хаусдорфовой размерности. Имеется приложение к задаче о дробных долях $\{2^n 3^m \alpha\}$.

Библиография: 10 названий.

1. Введение и формулировки результатов. Пусть $Q = \{q_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ – достаточно быстро растущая последовательность положительных действительных чисел, а $\psi(n)$ – некоторая положительнозначная достаточно медленно убывающая к нулю функция. В настоящей работе исследуется множество вещественных чисел x таких, что $\|q_n x\| \geq \psi(n)$ при всех натуральных n ($\|\cdot\|$ означает расстояние до ближайшего целого). Через $\text{HD}(P)$ мы будем обозначать хаусдорфову размерность множества P действительных чисел. Через $\text{ND}(Q)$ обозначим множество таких вещественных x , для которых последовательность $(q_n x)_{n=1}^{\infty}$ не всюду плотна.

Эрдеш в работе [1] поставил следующий вопрос: верно ли, что если последовательность натуральных чисел Q такова, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \lambda > 1, \quad (1)$$

то $\text{ND}(Q) \neq \mathbb{Q}$? Положительный ответ на этот вопрос был дан де Матаном [2] и Поллингтоном [3]. Они доказали, что если последовательность неотрицательных действительных чисел Q такова, что выполняется (1), то $\text{HD}(\text{ND}(Q)) = 1$.

Отметим, что Бошерниан в работе [4] доказал, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1,$$

то $\text{HD}(\text{ND}(Q)) = 0$.

Упомянем также работу Фюрстенберга [5] (см. также [6]), в которой для последовательности Q , представляющей собой “нелакунарную полугруппу целых чисел по умножению” (например, в качестве такой последовательности можно взять последовательность целых чисел вида $2^m 3^n$, упорядоченную по возрастанию), доказано, что для иррационального x дробные доли $\{q_n x\}$ всюду плотны (таким образом, для последовательности Q , состоящей из чисел $2^m 3^n$, будет выполнено $\text{ND}(Q) = \mathbb{Q}$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00912.

С другой стороны, Шмидт в работе [7], рассматривая множество чисел, не являющихся нормальными ни по какому целому основанию, точнее, множество

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid \{q^n x\}, n \in \mathbb{N}, \text{ не всюду плотна для любого целого } q > 1\},$$

используя технику выигрышных множеств, доказал, что $\text{HD}(T) = 1$.

В настоящей статье мы обобщим некоторые из этих результатов, а также получим их количественные аналоги.

Нам понадобятся следующие обозначения: $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел с нулем; $\lfloor \cdot \rfloor$ – ближайшее целое снизу; $\bar{j} = \max\{j, 3\}$.

Сформулируем наши результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(v_j)_{j=1}^\infty$ – последовательность положительных действительных чисел таких, что $\sum_{j=1}^\infty v_j^{-1} = A$, и $\varkappa \geq \varkappa_0 = \ln(2^{18}3^2)$. Тогда существует множество $P_\varkappa$ вещественных чисел x такое, что

$$\forall x \in P_\varkappa \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{выполнена оценка} \quad \|2^n 3^j x\| \geq \exp(-2A\varkappa v_j)$$

$$\text{и } \text{HD}(P_\varkappa) \geq 1 - \varkappa_0/\varkappa.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(v_j)_{j=1}^\infty$ – последовательность положительных действительных чисел таких, что $\sum_{j=1}^\infty v_j^{-1} = A$, и $\varkappa \geq \varkappa_0 = \ln(2^{18}3^2)$. Тогда существует множество $P_\varkappa$ вещественных чисел x такое, что

$$\forall q \in \mathbb{Z}, q \geq 2, \quad \forall x \in P_\varkappa \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{выполнена оценка} \quad \|q^n x\| \geq \exp(-2A\varkappa v_q)$$

$$\text{и } \text{HD}(P_\varkappa) \geq 1 - \varkappa_0/\varkappa.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varkappa \geq \varkappa_0 = \ln(2^{18}3^2)$ и

$$A = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j(\ln \bar{j})^{1+\varepsilon}}.$$

Тогда существует множество $P_\varkappa$ вещественных чисел x такое, что

$$\forall x \in P_\varkappa \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{выполнена оценка} \quad \|2^n 3^j x\| \geq \exp(-2A\varkappa j(\ln \bar{j})^{1+\varepsilon})$$

$$\text{и } \text{HD}(P_\varkappa) \geq 1 - \varkappa_0/\varkappa.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varkappa \geq \varkappa_0 = \ln(2^{18}3^2)$ и

$$A = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j(\ln \bar{j})^{1+\varepsilon}}.$$

Тогда существует множество $P_\varkappa$ вещественных чисел x такое, что

$$\forall q \in \mathbb{Z}, q \geq 2, \quad \forall x \in P_\varkappa \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{выполнена оценка} \quad \|q^n x\| \geq \exp(-2A\varkappa q(\ln \bar{q})^{1+\varepsilon})$$

$$\text{и } \text{HD}(P_\varkappa) \geq 1 - \varkappa_0/\varkappa.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичный результат, но с более слабыми оценками, был получен в статье [8].

2. О хаусдорфовой размерности. Для оценки снизу хаусдорфовой размерности будет использована следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (Эгглстон [9]). Пусть $A_k = \bigsqcup_{i=1}^{R_k} \Delta_k(i)$, где $\Delta_k(i)$ – интервал длины $\ell(\Delta_k(i)) = \delta_k$, $k \in \mathbb{N}$. И пусть каждый интервал $\Delta_k(i)$ содержит в точности $N_{k+1} > 1$ дизъюнктивных интервалов (длины δ_{k+1}) из множества A_{k+1} (при этом $R_{k+1} = R_k \cdot N_{k+1}$). Предположим, что $0 < s_0 \leq 1$ и что при любом $s < s_0$ сходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} (R_k (\delta_k)^s)^{-1}.$$

Тогда множество $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ имеет хаусдорфову размерность $\text{HD}(A) \geq s_0$.

3. О выигрышных множествах. В этом пункте мы переформулируем нужным нам образом некоторые результаты В. Шмидта из [7], [10].

Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ и $\rho > 0$. Пусть на вещественной оси отмечено некоторое множество точек $S \subseteq \mathbb{R}$. Рассматривается игра, в которую играют черные и белые. Сначала черные выбирают на действительной оси замкнутый отрезок B_1 длины $\ell(B_1) = 2\rho$. Затем белые выбирают замкнутый отрезок $W_1 \subset B_1$ длины $\ell(W_1) = \alpha\ell(B_1)$. Потом черные выбирают замкнутый отрезок $B_2 \subset W_1$ длины $\ell(B_2) = \beta\ell(W_1)$, и т.д. Таким способом порождается последовательность вложенных замкнутых отрезков

$$B_1 \supset W_1 \supset B_2 \supset W_2 \supset \dots$$

с длинами $\ell(B_i) = 2(\alpha\beta)^{i-1}\rho$ и $\ell(W_i) = 2\alpha(\alpha\beta)^{i-1}\rho$, $i = 1, 2, \dots$. Очевидно, что множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ состоит из одной единственной точки. Если $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in S$, то говорят, что белые выиграли игру, иначе игру выиграли черные. Далее, множество S называется (α, β, ρ) -выигрышным, если белые могут выиграть игру независимо от того, как играют черные. Множество S называется (α, β, ρ) -вполне выигрышным, если для всех $\rho' \geq \rho$ это множество является (α, β, ρ') -выигрышным.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если множество S (α, β, ρ) -выигрышно, то множество $aS + b$ является $(\alpha, \beta, a\rho)$ -выигрышным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (α, β, ρ) -выигрышности не следует (α, β, ρ) -вполне выигрышность. Так, например, множество $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n+1]$ является $(1/3, 1/3, 3^k/2)$ -выигрышным, если k нечетное натуральное, и не является $(1/3, 1/3, 3^k/2)$ -выигрышным, если k четное натуральное.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = 1 + \alpha\beta - 2\alpha > 0$, $\rho > 0$, и пусть $t \in \mathbb{N}$ такое, что $(\alpha\beta)^t < \gamma/2$. Пусть отрезок B_k длины $2\rho_k$ и с центром в точке b_k получается в (α, β, ρ) игре. Тогда белые могут играть так, что при любой игре черных отрезок B_{k+t} лежит в полупрямой $x > b_k + \rho_k\gamma/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Выполнено неравенство $\gamma < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть белые придерживаются такой стратегии: ходят как можно правее. Тогда

$$w_k = b_k + \rho_k(1 - \alpha),$$

$$b_{k+1} \geq w_k - \alpha \rho_k(1 - \beta) = b_k + \rho_k(1 - \alpha - \alpha + \alpha\beta) = b_k + \rho_k\gamma > b_k.$$

Отсюда видна монотонность последовательности b_k ; в частности, из нее следует неравенство

$$b_{k+t} \geq b_{k+1} \geq b_k + \rho_k\gamma.$$

Поскольку $\rho_{k+t} = \rho_k(\alpha\beta)^t < \rho_k\gamma/2$, то для всех $x \in B_{k+t}$ выполнено неравенство

$$x \geq b_{k+t} - \rho_{k+t} > b_k + \frac{\rho_k\gamma}{2}.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 1/2$, $\rho > 0$ и множество S является (α, β, ρ) -выигрышным. Тогда множество S имеет хаусдорфову размерность

$$\text{HD}(S) \geq \frac{\ln(1/(2\beta))}{\ln(1/(\alpha\beta))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $N = \lfloor 1/\beta \rfloor$. Предположим, что белые используют выигрышную стратегию и что B_1 и W_1 уже заданы. Разобьем отрезок W_1 на N равных частей. Черные могут играть таким образом, что отрезок B_2 будет лежать в одной из N частей отрезка W_1 . Обозначим B_2 через $B_2^{i_1}$, $i_1 \in \{1, \dots, N\}$. Разобьем отрезок W_2 на N равных частей. За следующий шаг черные могут сыграть так, что отрезок B_3 будет лежать в одной из N частей отрезка W_2 . Таким образом, существуют N^2 возможности выбора отрезка B_3 , которые обозначим через $B_3^{i_1 i_2}$, $i_1, i_2 \in \{1, \dots, N\}$, и т.д. Для всякой последовательности $(i_k)_{k=1}^\infty$, $i_k \in \{1, \dots, N\}$, мы получаем последовательность отрезков $B_2^{i_1}, B_3^{i_1 i_2}, B_4^{i_1 i_2 i_3}, \dots$, пересечение которых принадлежит множеству S . Теперь положим

$$A_k = \bigcup_{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}} B_{k+1}^{i_1 \dots i_k}.$$

Тогда $A = \bigcap_{k=1}^\infty A_k \subset S$, $N_k = N$, $R_k = N^k$, $\delta_k = 2(\alpha\beta)^k \rho$. Имеет место равенство

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} (R_k(\delta_k)^s)^{-1} = \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{\alpha\beta} (N^k(2(\alpha\beta)^k \rho)^s)^{-1} = \frac{(2\rho)^{-s}}{\alpha\beta} \sum_{k=2}^\infty (N(\alpha\beta)^s)^{-k}.$$

Этот ряд сходится при $s < \ln N / |\ln(\alpha\beta)|$. Применяя теорему 3, получим, что

$$\text{HD}(S) \geq \frac{\ln \lfloor 1/\beta \rfloor}{\ln(1/(\alpha\beta))} \geq \frac{\ln(1/(2\beta))}{\ln(1/(\alpha\beta))}.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим

$$N_{a,b}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ \|g^{n-1}(ax + b)\| \geq g^{-1}\}$$

и положим $N(g) = N_{1,0}(g)$.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = 1 + \alpha\beta - 2\alpha > 0$, $\rho \geq \alpha\beta/2$, $g \geq 6/(\alpha\beta\gamma)$. Тогда множество $N(g)$ является (α, β, ρ) -выигрышным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\rho \geq \alpha\beta/2$, то найдутся натуральные числа $n_i, i = 0, 1, \dots$, такие, что

$$\frac{4g^{-(i+1)}}{\gamma} \leq g^{-i} \left(1 - \frac{2}{g}\right) \alpha\beta \leq 2(\alpha\beta)^{n_i-1} \rho < g^{-i} \left(1 - \frac{2}{g}\right) < 1 \leq 2(\alpha\beta)^{-1} \rho.$$

Так определенная последовательность натуральных чисел оказывается строго возрастающей и, более того,

$$\frac{(\alpha\beta)^{n_i}}{(\alpha\beta)^{n_{i-1}}} = \frac{2(\alpha\beta)^{n_i-1} \rho}{2(\alpha\beta)^{n_{i-1}-1} \rho} < \frac{g^{-i}(1-2/g)}{g^{-(i-1)}(1-2/g)\alpha\beta} = \frac{1}{g\alpha\beta} < \frac{\gamma}{2} < 1, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что белые могут играть так, что при любой игре черных

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_{n_i} \quad \|g^{i-1}x\| \geq g^{-1}.$$

Пусть дан отрезок $B_{n_{i-1}}$ длины $2(\alpha\beta)^{n_{i-1}-1} \rho$ с центром в точке $b_{n_{i-1}}$. Числа x , для которых выполнено неравенство $\|g^{i-1}x\| \leq g^{-1}$, содержатся в отрезках длины $2g^{-i}$, расстояние между которыми

$$g^{-(i-1)} - 2g^{-i} = g^{-(i-1)} \left(1 - \frac{2}{g}\right) > 2(\alpha\beta)^{n_{i-1}-1} \rho = 2\rho(B_{n_{i-1}}).$$

Это означает, что отрезок $B_{n_{i-1}}$ пересекается не более, чем с одним таким “плохим” отрезком I . Не ограничивая общности, можно считать, что центр отрезка I лежит не правее центра отрезка $B_{n_{i-1}}$. Тогда весь отрезок I содержится в полупрямой

$$\begin{aligned} x &\leq b_{n_{i-1}} + g^{-i} \leq b_{n_{i-1}} + g^{-(i-1)} \left(1 - \frac{2}{g}\right) \frac{\alpha\beta\gamma}{4} \\ &\leq b_{n_{i-1}} + (\alpha\beta)^{n_{i-1}-1} \rho \frac{\gamma}{2} = b_{n_{i-1}} + \rho(B_{n_{i-1}}) \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Определив $t_i = n_i - n_{i-1}$, получаем

$$(\alpha\beta)^{t_i} = \frac{(\alpha\beta)^{n_i}}{(\alpha\beta)^{n_{i-1}}} < \frac{\gamma}{2}.$$

Теперь из леммы 1 следует, что для всех $x \in B_{n_i} = B_{n_{i-1}+t_i}$ выполнено неравенство

$$x > b_{n_{i-1}} + \rho(B_{n_{i-1}}) \frac{\gamma}{2}.$$

Итак, лемма 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = 1 + \alpha\beta - 2\alpha > 0$, $\rho \geq \alpha\beta/2$, $g \geq 6/(\alpha\beta\gamma)$, $a \geq 1$. Тогда множество $N_{a,b}(g)$ является (α, β, ρ) -выигрышным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} N_{a,b}(g) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \|g^{n-1}(ax+b)\| \geq g^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \frac{1}{a} \{x \in \mathbb{R} \mid \|g^{n-1}x\| \geq g^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\} - \frac{b}{a} = \frac{1}{a} N(g) - \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

В силу леммы 3 множество $N(g)$ (α, β, ρ) -вполне выигрышно. Тогда в силу замечания 1 множество $N_{a,b}(g)$ $(\alpha, \beta, \rho/a)$ -вполне выигрышно. А так как $a \geq 1$, то множество $N_{a,b}(g)$ (α, β, ρ) -выигрышно.

Следствие доказано.

Пусть натуральный ряд $\mathbb{N}$ содержит дизъюнктное объединение $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ арифметических прогрессий P_j с первым членом m_j и разностью d_j . Пусть α и β удовлетворяют условиям

$$1 + \alpha\beta - 2\beta > 0, \quad 1 - 2\alpha \geq 0. \quad (2)$$

Определим последовательно для всех $j \in \mathbb{N}$ следующие величины:

$$\alpha_j = \alpha, \quad \beta_j = \beta(\alpha\beta)^{d_j-1}, \quad \gamma_j = 1 + \alpha_j\beta_j - 2\alpha_j, \quad \rho_j = (\alpha\beta)^{m_j-1}. \quad (3)$$

ЛЕММА 4. Пусть множества N_j $(\alpha_j, \beta_j, \rho_j)$ -выигрышны. Тогда $\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j$ $(\alpha, \beta, 1)$ -выигрышно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Белые играют следующим образом. Для ходов с номерами $m_j + kd_j \in P_j$, $k \in \mathbb{N}_0$, они используют $(\alpha, \beta(\alpha\beta)^{d_j-1}, (\alpha\beta)^{m_j-1})$ -выигрышную стратегию для множества N_j . Следовательно, $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in N_j$. Таким образом, белые могут сыграть так, чтобы $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \bigcap_{j=1}^{\infty} N_j$.

Тем самым, лемма 4 доказана.

4. О вложении непересекающихся арифметических прогрессий в натуральный ряд. Следующее утверждение немного уточняет соответствующую лемму из работы [8].

ЛЕММА 5. Пусть $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ – последовательность положительных действительных чисел таких, что $\sum_{j=1}^{\infty} v_j^{-1} \leq 1/2$. Тогда существует последовательность непересекающихся арифметических прогрессий

$P_j = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv m_j \pmod{d_j}\}$, где m_j и d_j – некоторые натуральные числа, таких, что $v_j/2 < d_j \leq v_j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $v_j \geq 2$ и $m_j \leq d_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ монотонно возрастает. Определим последовательность натуральных чисел $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ из следующих соотношений:

$$1 \leq \frac{v_j}{2} < 2^{n_j} \leq v_j.$$

Далее, положим $d_j = 2^{n_j}$. Заметим, что при этом $\sum_{j=1}^{\infty} d_j^{-1} < 1$ и последовательность $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ монотонно возрастает.

Мы построим по индукции последовательность $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ непересекающихся арифметических прогрессий с разностями соответственно $d_1, d_2, \dots, d_k, \dots$. В качестве арифметической последовательности P_1 возьмем любую арифметическую прогрессию с разностью d_1 . Пусть уже построены непересекающиеся прогрессии $P_1, P_2, \dots, P_k$. Так как плотность множества $\bigcup_{j=1}^k P_j$ равна $\sum_{j=1}^k d_j^{-1} < 1$, то существует натуральное число $m_{k+1} \notin \bigcup_{j=1}^k P_j$. Это значит, что для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ выполнено $m_{k+1} \not\equiv m_j \pmod{2^{n_j}}$. А это, в свою очередь, означает, что прогрессия

$$P_{k+1} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv m_{k+1} \pmod{d_{k+1}}\}$$

не пересекается с предыдущими прогрессиями.

Лемма 5 доказана.

5. Доказательство основного результата.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(v_j)_{j=1}^\infty$ – последовательность положительных действительных чисел таких, что $\sum_{j=1}^\infty v_j^{-1} \leq 1/2$, $(q_j)_{j=1}^\infty$ – последовательность целых чисел таких, что $q_j \geq 2$, $(a_j)_{j=1}^\infty$ – последовательность действительных чисел таких, что $a_j \geq 1$, $(b_j)_{j=1}^\infty$ – произвольная последовательность действительных чисел, $\varkappa \geq \varkappa_0 = \ln(2^{18}3^2) = 14.67387383 \dots$. Тогда существует множество $P_\varkappa$ вещественных чисел x такое, что

$$\forall x \in P_\varkappa \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{выполнена оценка} \quad \|q_j^n(a_j x + b_j)\| \geq \exp(-\varkappa v_j)$$

$$\text{и } \text{HD}(P_\varkappa) \geq 1 - \varkappa_0/\varkappa.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $\varkappa \rightarrow \infty$, то $\text{HD}(P_\varkappa) \rightarrow 1$.

Теоремы 1 и 2 являются следствиями теоремы 4. Теорема 1 получается, если в условии теоремы 4 положить

$$q_j = 2, \quad a_j = 3^j, \quad b_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2 получается, если в условии теоремы 4 положить

$$q_j = j + 1, \quad a_j = 1, \quad b_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $\tau = 2\varkappa/\varkappa_0$, $\alpha = 1/2$, $\beta = (1/2)^{\tau-1}$, m_j, d_j – числа из леммы 5 и $\alpha_j, \beta_j, \rho_j$ выбраны согласно (3). Определим $s_j \in \mathbb{N}$ и g_j из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j} &\leq q_j^{s_j} < \left(\frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j} \right)^2, \quad g_j = q_j^{s_j}, \quad \text{если } q_j < \frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j}, \\ \frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j} &\leq q_j^{1/s_j} < \left(\frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j} \right)^2, \quad g_j = q_j^{1/s_j}, \quad \text{если } q_j \geq \frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оценим снизу хаусдорфову размерность множества точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих для любых $n \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$ неравенству

$$\|q_j^n(a_j x + b_j)\| \geq \left(\frac{\alpha_j \beta_j \gamma_j}{6} \right)^4. \quad (5)$$

Из соотношений (4) и замечания к лемме 5 следует, что выполняются условия следствия леммы 3 и, значит, множество $N_{a_j, b_j}(g_j)$ является $(\alpha_j, \beta_j, \rho_j)$ -выигрышным. Из соотношений (3) и леммы 4 следует, что пересечение P всех множеств $N_{a_j, b_j}(g_j)$ является $(\alpha, \beta, 1)$ -выигрышным. А из соотношений (2) и леммы 2 следует, что это множество имеет хаусдорфову размерность

$$\text{HD}(P) \geq \frac{\ln(1/(2\beta))}{\ln(1/(\alpha\beta))} = 1 - \frac{\varkappa_0}{\varkappa}.$$

Кроме того, оно состоит из тех $x \in \mathbb{R}$, для которых для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и любого $\forall j \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\|g_j^n(a_j x + b_j)\| \geq g_j^{-1}.$$

Выражая g_j через q_j , эту оценку можно записать так:

$$\begin{aligned} \|q_j^{s_j n}(a_j x + b_j)\| &\geq q_j^{-s_j} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{если } q_j < \frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j}, \\ \|q_j^{n/s_j}(a_j x + b_j)\| &\geq q_j^{-1/s_j} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{если } q_j \geq \frac{6}{\alpha_j \beta_j \gamma_j}, \end{aligned} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Пусть $q_j < 6/(\alpha_j \beta_j \gamma_j)$; тогда в q_j -ичной записи числа $a_j x + b_j$ не может стоять $2s_j$ нулей подряд и $2s_j$ цифр “ $q_j - 1$ ” подряд, т.е.

$$\|q_j^n(a_j x + b_j)\| \geq q_j^{-2s_j} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Применяя неравенство (4), получим неравенство (5).

Пусть $q_j \geq 6/(\alpha_j \beta_j \gamma_j)$; тогда, подставляя в (6) $n = ks_j, k \in \mathbb{N}_0$, получим

$$\|q_j^k(a_j x + b_j)\| \geq q_j^{-1/s_j} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Применяя неравенство (4), получим неравенство (5).

Учитывая определения величин $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ (соотношения (3)), неравенство (5) и неравенства леммы 5, получаем для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и любого $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\|q_j^n(a_j x + b_j)\| \geq \left(\frac{\alpha_j \beta_j \gamma_j}{6} \right)^4 = \frac{1}{6^4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{8d_j \tau} \geq \exp(-\varkappa v_j).$$

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В доказательстве теоремы при $q_j \leq 6/(\alpha_j \beta_j \gamma_j)$ можно сделать оценку лучше, но это, по-видимому, не представляет интереса.

Автор глубоко признателен рецензенту за ряд существенных замечаний к рукописи, позволивших несколько улучшить основной результат.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Erdős P. Problems and results on Diophantine approximations. II // Répartition modulo 1 (Actes Colloq., Marseille-Luminy, 1974). Lecture Notes in Math. V. 475. Berlin: Springer-Verlag, 1975. P. 89–99.
- [2] de Mathan D. Numbers contravening a condition in density modulo 1 // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1980. V. 36. № 3–4. P. 237–241.
- [3] Pollington A.D. On the density of sequence $\{n_k\zeta\}$ // Illinois J. Math. 1979. V. 23. P. 511–702.
- [4] Boshernitzan M. Density modulo 1 of dilations of sublacunary sequences // Adv. in Math. 1994. V. 108. P. 104–117.
- [5] Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation // Math. Systems Theory. 1967. V. 1. P. 1–49.
- [6] Boshernitzan M.D. Elementary proof of Furstenberg's diophantine result // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122. № 1. P. 67–70.
- [7] Schmidt W.M. On badly approximable numbers and certain games // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. № 1. P. 67–70.
- [8] Ахунжанов Р. К. Об аномальных числах // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 1. С. 150–152.
- [9] Eggleston H. G. Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. 1951–52. V. 54. P. 42–93.
- [10] Шмидт В. М. Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

18.09.2003

Исправленный вариант

29.12.2003