Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Павлов, О проблеме делителей Ингама, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 429–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 05:41:35

УДК 511

О ПРОБЛЕМЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ИНГАМА

А. И. Павлов

Основным результатом работы является следующая теорема. Пусть $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ и арифметическая функция F удовлетворяет условиям:

- 1) функция F мультипликативна;
- 2) если $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, то существует $\alpha > 0$ такое, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство $f(n) = O(n^{-\alpha})$.

Тогда существуют постоянные A_1 , A_2 и A_3 такие, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) \tau(n+1) F(n) = A_1 x \ln^2 x + A_2 x \ln x + A_3 x + O(x^{5/6+\varepsilon} + x^{1-\alpha/6+\varepsilon}),$$

$x \rightarrow \infty$.

Кроме того, если для любого простого p выполняется неравенство $|f(p)| < 1$ и функция F сильно мультипликативна, то $A_1 > 0$.

Библиография: 8 названий.

Пусть $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ и $S(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) \tau(n+1)$. В 1927 году Ингам [1] доказал, что при $x \rightarrow \infty$ выполняется равенство $S(x) = (6/\pi^2)x \ln^2 x + O(x \ln x)$. В 1931 году Эстерман [2] существенно усилил этот результат. Он доказал, что существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$S(x) = \frac{6}{\pi^2} x \ln^2 x + C_1 x \ln x + C_2 x + R(x), \quad (1)$$

где $R(x) = O(x^{11/12} \ln x)$, $x \rightarrow \infty$. В 1979 году Д. Исмаилов [3] и Хиз-Браун [4] независимо доказали, что остаток $R(x)$ в равенстве (1) имеет оценку $R(x) = O(x^{5/6+\varepsilon})$, где ε – любое фиксированное положительное число.

В работах Н. М. Тимофеева и его учеников [5]–[7] имеется ряд результатов следующего типа. Если мультипликативная функция $\Phi(n)$ принадлежит некоторому классу T , то при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$\sum_{n \leq x} \Phi(n) \tau(n+1) = (1 + o(1)) C(\Phi) \left(\sum_{n \leq x} \Phi(n) \right) \ln x, \quad (2)$$

где $C(\Phi)$ – постоянная, зависящая только от функции Φ .

В этой работе указывается класс T' функций Φ , для которых в равенстве (2) можно получить асимптотику с остатком.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00580.

ТЕОРЕМА. Пусть арифметическая функция F удовлетворяет условиям:

- 1) функция F мультипликативна;
- 2) если $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, то существует $\alpha > 0$ такое, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство $f(n) = O(n^{-\alpha})$.

Тогда существуют постоянные A_1 , A_2 и A_3 такие, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n \leq x} F(n) \tau(n) \tau(n+1) \\ &= A_1 x \ln^2 x + A_2 x \ln x + A_3 x + O(x^{5/6+\varepsilon} + x^{1-\alpha/6+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Кроме того, если функция F сильно мультипликативна, то

$$A_1 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{f(p)}{p} \left(2 - \frac{3}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \right);$$

если, кроме того, для любого простого p выполнено условие $|f(p)| < 1$, то выполняется неравенство $A_1 > 0$.

Напомним, что арифметическая функция F называется *сильно мультипликативной*, если эта функция мультипликативна и для любых простого числа p и натурального k выполняется равенство $F(p^k) = F(p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если функция F тождественно равна 1, то получим ранее упоминавшийся результат Хиз-Брауна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве функции F можно рассматривать, в частности, следующие функции: $\sum_{d|n} \mu(d)/d^\alpha$, $\sum_{d|n} d^{-\alpha} \prod_{p|d} (1 - 1/p)$, $\sum_{d|n} d^{-\alpha}$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, p — простое число, фиксированное $\alpha > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно показать, что функция F из условия теоремы может быть неограничена. Например, $F(n) = \sum_{d|n} 1/\sqrt{d}$.

В дальнейшем под теоремой Хиз-Брауна будем понимать следующее утверждение [4].

Пусть

$$V(x, q) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{q}}} \tau(n),$$

где целое $q \geq 1$. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $q = O(x^{2/3})$ выполняется равенство

$$V(x; q) = \frac{\varphi(q)}{q^2} x (\ln x + 2\gamma - 1) - \frac{2x}{q} \sum_{d|n} \frac{\mu(d) \ln d}{d} + O(x^{1/3+\varepsilon}),$$

где γ — постоянная Эйлера.

При доказательстве теоремы будут использованы следующие утверждения.

ЛЕММА 1. При $x \rightarrow \infty$ равномерно по $q \geq 1$ выполняется равенство

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q)=1}} \frac{1}{n} = \frac{\varphi(q)}{q} (\ln x + \gamma) - \sum_{d|q} \frac{\mu(d) \ln d}{d} + O\left(\frac{\tau(q)}{x}\right),$$

где (a, b) — наибольший общий делитель натуральных чисел a и b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь известными свойствами функции Мёбиуса, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} \frac{1}{n} &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sum_{d|(n,q)} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} \frac{1}{n} = \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{m \leq x/d} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} \left(\ln \frac{x}{d} + \gamma + O\left(\frac{d}{x}\right) \right) = \frac{\varphi(q)}{q} (\ln x + \gamma) - \sum_{d|q} \frac{\mu(d) \ln d}{d} + O\left(\frac{\tau(q)}{x}\right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2 [8, с. 266]. Если $x \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{n > x} \frac{\tau(n)}{n^2} = O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

ЛЕММА 3. При $x \rightarrow \infty$ равномерно по $q \geq 1$ выполняется равенство

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} \ln n = \frac{\varphi(q)}{q} (x \ln x - x) + O(\tau(q) \ln(xq)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} \ln n &= \sum_{n \leq x} \ln n \sum_{d|(n,q)} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} \ln n \\ &= \sum_{d|q} \mu(d) \left(\sum_{m \leq x/d} \ln d + \sum_{m \leq x/d} \ln m \right) \\ &= \sum_{d|q} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] \ln d + \sum_{d|q} \mu(d) \left(\frac{x}{d} \ln \frac{x}{d} - \frac{x}{d} + O(\ln x) \right) \\ &= (x \ln x - x) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} + O(\tau(q) \ln(xq)). \end{aligned}$$

Так как $\sum_{d|q} \mu(d)/d = \varphi(q)/q$, лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пользуясь равенством $F(N) = \sum_{d|N} f(d)$, получим

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{N \leq x} F(N) \tau(N) \tau(N+1) = \sum_{mn \leq x} F(mn) \tau(mn+1) \\ &= \sum_{mn \leq x} \tau(mn+1) \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{\substack{mn \leq x \\ d|mn}} \tau(mn+1) \\ &= 2S_1(x) - S_2(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq x/m \\ d|mn}} \tau(mn+1), \\ S_2(x) &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{\substack{m, n \leq \sqrt{x} \\ d|mn}} \tau(mn+1). \end{aligned}$$

Найдем асимптотику функции $S_1(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
 S_1(x) &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} \\ (m, d) = d_1}} \sum_{\substack{n \leq x/m \\ d | mn}} \tau(mn + 1) \\
 &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m_1 \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m_1, d/d_1) = 1}} \sum_{\substack{n \leq x/(d_1 m_1) \\ d/d_1 | m_1 n}} \tau(d_1 m_1 n + 1) \\
 &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m_1 \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m_1, d/d_1) = 1}} \sum_{n_1 \leq x/(dm_1)} \tau(dm_1 n_1 + 1) \\
 &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1) = 1}} \sum_{\substack{N \leq x+1 \\ N \equiv 1 \pmod{dm}}} \tau(N).
 \end{aligned}$$

Поэтому согласно теореме Хиз-Брауна

$$\begin{aligned}
 S_1(x) &= \sum_{d \leq x^{1/6}} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1) = 1}} \left(\frac{\varphi(dm)}{(dm)^2} x \ln x \right. \\
 &\quad \left. + x \left((2\gamma - 1) \frac{\varphi(dm)}{(dm)^2} - \frac{2}{dm} \sum_{d_2 | dm} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2} \right) + O(x^{1/3+\varepsilon}) \right) \\
 &\quad + O \left(\sum_{x^{1/6} < d \leq x} |f(d)| \sum_{d_1 | d} \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{x^{1+\varepsilon}}{dm} \right) \\
 &= A(x)x(\ln x + 2\gamma - 1) - 2xB(x) + O \left(x^{5/6+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/6}} |f(d)| + x^{1+\varepsilon} \sum_{d > x^{1/6}} \frac{|f(d)|}{d} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$A(x) = \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1) = 1}} \frac{\varphi(dm)}{dm^2}$$

и

$$B(x) = \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1) = 1}} \frac{1}{m} \sum_{d_2 | dm} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2}.$$

Для любых фиксированных $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ из $f(d) = O(d^{-\alpha})$, $d \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow \infty$ получим

$$\sum_{d \leq x^{1/6}} |f(d)| = O(x^\varepsilon + x^{(1-\alpha)/6}), \quad \sum_{d > x^{1/6}} \frac{|f(d)|}{d} = O(x^{-\alpha/6}).$$

Значит, остаток в асимптотике для $S_1(x)$ будет равен $O(x^{5/6+\varepsilon} + x^{1-\alpha/6+\varepsilon})$. Согласно

определению $A(x)$ имеем

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \frac{1}{m} \sum_{d_2 | (dm)} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \\ &= \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1 \\ d_2 | (dm)}} \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Из $\mu(d_2) \neq 0$ и $(d, d_2) = d_3$ следует $(d, d_2/d_3) = 1$. Поэтому

$$A(x) = \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq d_3 \sqrt{x}/(d_1 d_2) \\ (m, d/d_1)=1}} \frac{1}{m}.$$

Следовательно, пользуясь леммой 1, получим

$$\begin{aligned} A(x) &= \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma \right) \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} \\ &\quad + \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} \ln \frac{d_1 d_3}{dd_2} \\ &\quad - \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{d_4 | d_1} \frac{\mu(d_4) \ln d_4}{d_4} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} d_2^{-2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{|f(d)|}{d} \sum_{d_1 | d} \tau(d_1) \frac{dd_2}{d_1 d_3} \right) \\ &= \left(\frac{\ln x}{2} + \gamma \right) \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d=1 \\ (d, d_2)=d_3}}^{\infty} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} + O(x^{\varepsilon - \alpha/6}) \\ &\quad + \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d=1 \\ (d, d_2)=d_3}}^{\infty} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \left(\frac{\varphi(d_1)}{d_1} \ln \frac{d_1 d_3}{dd_2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{d_4 | d_1} \frac{\mu(d_4) \ln d_4}{d_4} \right) + O(x^{\varepsilon - \alpha/6} + x^{\varepsilon - 1/2} + x^{(1-\alpha)/6 - 1/2}). \end{aligned}$$

Ясно, что при фиксированном $\alpha > 0$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{d=1 \\ (d, d_2)=d_3}}^{\infty} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1|d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} \right| &\leq \sum_{\substack{d=1 \\ d_3|d}}^{\infty} \frac{|f(d)|\tau(d)}{d} = O\left(\sum_{\substack{d=1 \\ d_3|d}}^{\infty} \frac{\tau(d)}{d^{1+\alpha}}\right) \\ &= O\left(\frac{\tau(d_3)}{d_3^{1+\alpha}} \sum_{d_4=1}^{\infty} \frac{\tau(d_4)}{d_4^{1+\alpha}}\right) = O\left(\frac{\tau(d_3)}{d_3^{1+\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Поэтому согласно лемме 2

$$A(x) = A_1 \left(\frac{\ln x}{2} + \gamma \right) + A_2 + O(x^{-2/3} \ln^2 x + x^{\varepsilon-\alpha/6} + x^{-(2+\alpha)/6}),$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3|d_2} d_3 \sum_{\substack{d=1 \\ (d, d_2)=d_3}}^{\infty} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1|d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1}, \\ A_2 &= \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3|d_2} d_3 \sum_{\substack{d=1 \\ (d, d_2)=d_3}}^{\infty} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1|d} \left(\frac{\varphi(d_1)}{d_1} \ln \frac{d_1 d_3}{dd_2} - \sum_{d_4|d_1} \frac{\mu(d_4) \ln d_4}{d_4} \right). \end{aligned}$$

Аналогично согласно определению $B(x)$

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1|d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \frac{1}{m} \sum_{d_2|(dm)} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2} \\ &= \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2} \sum_{d_3|d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1|d} \left(\frac{\varphi(d_1)}{d_1} \left(\ln \frac{d_1 d_3}{dd_2} \sqrt{x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{d_4|d_1} \frac{\mu(d_4) \ln d_4}{d_4} \right) + O\left(\frac{dd_2\tau(d_1)}{d_1 d_3 \sqrt{x}}\right) \right) \\ &= B_1 \left(\frac{\ln x}{2} + \gamma \right) + B_2 + O(x^{-2/3+\varepsilon} + x^{\varepsilon-\alpha/6} + x^{\varepsilon-1/2} + x^{-(2+\alpha)/6}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2^2} \sum_{d_3|d_2} d_3 \sum_{\substack{d=1 \\ (d, d_2)=d_3}}^{\infty} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1|d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1}, \\ B_2 &= \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2^2} \sum_{d_3|d_2} d_3 \sum_{\substack{d=1 \\ (d, d_2)=d_3}}^{\infty} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1|d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} \left(\ln \frac{d_1 d_3}{dd_2} - \sum_{d_4|d_1} \frac{\mu(d_4) \ln d_4}{d_4} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$S_1(x) = x(\ln x + 2\gamma - 1)A(x) - 2xB(x) + O(x^{5/6+\varepsilon} + x^{1-\alpha/6+\varepsilon}),$$

то

$$S_1(x) = \frac{A_1}{2} x \ln^2 x + \left(A_1 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) - B_1 + A_2 \right) x \ln x + ((2\gamma - 1)A_2 - 2\gamma B_1 - 2B_2)x + O(x^{5/6+\varepsilon} + x^{1-\alpha/6+\varepsilon}).$$

Найдем асимптотику для $S_2(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Согласно определению $S_2(x)$ получим

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \sum_{n \leq d_1 \sqrt{x}/d} \tau(dmn + 1) \\ &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \sum_{\substack{N \leq d_1 m \sqrt{x} + 1 \\ N \equiv 1 \pmod{dm}}} \tau(N). \end{aligned}$$

Покажем, что если $d \leq x^{1/6}$, то $dm \leq (d_1 m \sqrt{x} + 1)^{2/3}$. Действительно, из $d \leq x^{1/6}$ следует $d \leq d_1 x^{1/6} = d_1^{2/3} (\sqrt{x}/d_1)^{-1/3} x^{1/3}$. Но $\sqrt{x}/d_1 \geq m$. Поэтому $d \leq d_1^{2/3} m^{-1/3} x^{1/3}$. Значит, $dm \leq d_1^{2/3} m^{2/3} x^{1/3} < (d_1 m \sqrt{x} + 1)^{2/3}$, что и требовалось. Следовательно, по теореме Хиз-Брауна

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sum_{d \leq x^{1/6}} f(d) \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \left(\frac{\varphi(dm)}{(dm)^2} (d_1 m \sqrt{x} + 1) (\ln(d_1 m \sqrt{x} + 1) + 2\gamma - 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{dm} \left(\sum_{d_2 | (dm)} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2} (d_1 m \sqrt{x} + 1) + O((d_1 m \sqrt{x})^{1/3+\varepsilon}) \right) \right) \\ &\quad + O\left(x^{1+\varepsilon} \sum_{x^{1/6} < d \leq x} \frac{|f(d)|}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{m \leq \sqrt{x}/d_1} \frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Главный член в последнем равенстве представим в виде трех слагаемых. Первое будет равно

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} \left(\frac{\ln x}{2} + 2\gamma - 1 \right) \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} d_1 \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \sum_{d_2 | (dm)} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \\ &= \sqrt{x} \left(\frac{\ln x}{2} + 2\gamma - 1 \right) \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1, (m, d/d_1)=1 \\ d_2 | (dm), d_2/d_3 | m}} 1 \\ &= \sqrt{x} \left(\frac{\ln x}{2} + 2\gamma - 1 \right) \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} d_1 \sum_{\substack{m \leq d_3 \sqrt{x}/(d_1 d_2) \\ (m, d/d_1)=1}} 1. \end{aligned}$$

Следовательно, после применения равномерного по $q \geq 1$ равенства

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q)=1}} 1 = \frac{\varphi(q)}{q} x + O(\tau(q)), \quad x \rightarrow \infty,$$

первое слагаемое примет вид

$$\begin{aligned}
 & x \left(\frac{\ln x}{2} + 2\gamma - 1 \right) \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2) = d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} \\
 & + O \left(\sqrt{x} \ln x \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} d_2^{-2} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{d \leq x^{1/6}} |f(d)| \sum_{d_1 | d} \frac{\tau(d_1)}{d_1} \right) \\
 & = \frac{A_1}{2} x \ln x + A_1 (2\gamma - 1) x + O(x^{1/2+\varepsilon} (x^\varepsilon + x^{(1-\alpha)/6})).
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x} \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} d_1 \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1) = 1}} \frac{\varphi(dm)}{dm} \ln(d_1 m) \\
 & = \sqrt{x} \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} d_1 \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1) = 1}} (\ln d_1 + \ln m) \sum_{d_2 | (dm)} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \\
 & = \sqrt{x} \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2) = d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} d_1 \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1) = 1 \\ d_2/d_3 | m d/d_3}} (\ln d_1 + \ln m) \\
 & = x \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2) = d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{\substack{d_1 | d \\ (d_1, d_2/d_3) = 1}} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} \ln \frac{d}{d_1} \\
 & + O \left(\sqrt{x} \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} d_2^{-1} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{d \leq x^{1/6}} |f(d)| \tau^2(d) \ln d \right) \\
 & + \sqrt{x} \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2) = d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{\substack{d_1 | d \\ (d_1, d_2/d_3) = 1}} d_1 \sum_{\substack{m \leq d_3 \sqrt{x}/(d_1 d_2) \\ (m, d/d_1) = 1}} \left(\ln m + \ln \frac{d_2}{d_3} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, после применения леммы 3 второе слагаемое примет вид

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} x \ln x - x \right) \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2)}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2) = d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{\substack{d_1 | d \\ (d_1, d_2/d_3) = 1}} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} + O(x^{2/3+\varepsilon}) \\
 & = A_1 \left(\frac{1}{2} x \ln x - x \right) + O(x^{1-\alpha/6+\varepsilon} + x^{2/3+\varepsilon}).
 \end{aligned}$$

Третье слагаемое равно

$$\begin{aligned}
 & -2\sqrt{x} \sum_{d \leq x^{1/6}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} d_1 \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}/d_1 \\ (m, d/d_1)=1}} \sum_{d_2 | (dm)} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2} \\
 & = -2\sqrt{x} \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2} \sum_{d_3 | d_2} \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} d_1 \sum_{\substack{m \leq d_3 \sqrt{x}/(d_1 d_2) \\ (m, d/d_1)=1}} 1 \\
 & = -2x \sum_{d_2 \leq x^{2/3}} \frac{\mu(d_2) \ln d_2}{d_2^2} \sum_{d_3 | d_2} d_3 \sum_{\substack{d \leq x^{1/6} \\ (d, d_2)=d_3}} \frac{f(d)}{d} \sum_{d_1 | d} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} + O(x^{2/3+\varepsilon}) \\
 & = -2B_1 x + O(x^{1-\alpha/6+\varepsilon} + x^{2/3+\varepsilon}).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_2(x) = A_1 x \ln x + 2(A_1(\gamma - 1) - B_1)x + O(x^{1-\alpha/6+\varepsilon} + x^{2/3+\varepsilon}).$$

Так как $S(x) = 2S_1(x) - S_2(x)$, первая часть теоремы доказана.

Найдем вид постоянной A_1 в случае сильной мультипликативности функции F . В этом случае, как известно, в представлении $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ функция f является мультипликативной и обладает свойством: если $(m, n) > 1$, то $f(mn) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 A_1 & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{d|n} d \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1, n)=1}}^{\infty} \frac{f(d_1)}{d_1} \sum_{l|d_1} \frac{\varphi(l)}{l} \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{d|n} d \sum_{\substack{m=1 \\ (m, n/d)=1}}^{\infty} \frac{f(dm)}{dm} \sum_{l|(md)} \frac{\varphi(l)}{l} \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{d|n} f(d) \sum_{\substack{m=1 \\ (m, n)=1}}^{\infty} \frac{f(m)}{m} \left(\sum_{l_1|m} \frac{\varphi(l_1)}{l_1} \right) \left(\sum_{l_2|d} \frac{\varphi(l_2)}{l_2} \right).
 \end{aligned}$$

Если $\mu(m) \neq 0$, то

$$\sum_{l|m} \frac{\varphi(l)}{l} = \sum_{l|m} \prod_{p|l} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p|m} \left(2 - \frac{1}{p}\right).$$

Следовательно,

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \left(\sum_{d|n} f(d) \prod_{p|d} \left(2 - \frac{1}{p}\right) \right) \left(\sum_{\substack{m=1 \\ (m, n)=1}}^{\infty} \frac{f(m)}{m} \prod_{p|m} \left(2 - \frac{1}{p}\right) \right).$$

Легко видеть, что

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m, n)=1}}^{\infty} \frac{f(m)}{m} \prod_{p|m} \left(2 - \frac{1}{p}\right) = A_0 \prod_{p|n} \left(1 + \frac{f(p)}{p} \left(2 - \frac{1}{p}\right)\right)^{-1},$$

где

$$A_0 = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p} \left(2 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

Кроме того,

$$\sum_{d|n} f(d) \prod_{p|d} \left(2 - \frac{1}{p} \right) = \prod_{p|n} \left(1 + f(p) \left(2 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \prod_{p|n} \frac{1 + f(p)(2 - 1/p)}{1 + f(p)/p \cdot (2 - 1/p)} \\ &= A_0 \prod_p \left(1 - \frac{1 + f(p)(2 - 1/p)}{p^2(1 + f(p)/p \cdot (2 - 1/p))} \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p} \left(2 - \frac{3}{p} + \frac{1}{p^2} \right) - \frac{1}{p^2} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $|f(p)| \leq 1$, получим

$$1 + \frac{f(p)}{p} \left(2 - \frac{3}{p} + \frac{1}{p^2} \right) - \frac{1}{p^2} \geq 1 - \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^3} = \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + \frac{1}{p^3} \right) \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1} > 0.$$

Значит, теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ingham A. E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc. 1927. V. 2. № 3. P. 202–208.
- [2] Esterman T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math. 1931. V. 164. P. 173–182.
- [3] Исмаилов Д. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН Тадж. ССР. 1979. Т. 22. № 2. С. 75–79.
- [4] Heath-Brown D. R. The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proc. London Math. Soc. 1979. V. 38. № 3. P. 385–422.
- [5] Тимофеев Н. М. Аналог теоремы Халоса в случае обобщения аддитивной проблемы делителей // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 1. С. 116–127.
- [6] Тимофеев Н. М., Туляганов С. Т. Задачи типа аддитивной проблемы делителей // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 3. С. 443–456.
- [7] Хрипунова М. Б. Суммы мультипликативных функций со сдвинутыми аргументами // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 4. С. 136–138.
- [8] Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

09.03.2000

Исправленный вариант

04.04.2000