Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Романов, Три контрпримера в теории инерциальных многообразий, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 439–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm961>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:12:39

УДК 517.95

ТРИ КОНТРИПРИМЕРА В ТЕОРИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. В. Романов

Построен пример диссипативного полулинейного параболического уравнения в гильбертовом пространстве, для которого не существует гладкого инерциального многообразия. Более того, аттрактор данного уравнения нельзя вложить ни в какое конечномерное инвариантное C^1 -подмногообразие фазового пространства.

Описан класс скалярных уравнений реакции-диффузии в ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, не обладающих инерциальным многообразием $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$ со свойством абсолютной нормальной гиперболичности на множестве E стационарных точек фазового полупотока. При этом такие уравнения могут иметь инерциальное многообразие с более слабым свойством нормальной гиперболичности на E . В то же время, найдены трехмерные системы реакции-диффузии без нормально-гиперболического в стационарных точках инерциального многообразия.

Библиография: 8 названий.

Введение. При изучении диссипативных эволюционных задач в функциональных пространствах большой интерес представляет эффект “асимптотической конечномерности”, позволяющий описывать установившиеся режимы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$. Такой эффект связан с концепцией инерциального многообразия – гладкой (или липшицевой) n -мерной инвариантной поверхности в фазовом пространстве, притягивающей экспоненциально при $t \rightarrow +\infty$ все траектории системы. Соответствующая теория развита для полулинейных уравнений параболического и гиперболического типов (см. обзор [1, § 5]). При этом имеется пример [2] гиперболической задачи, не допускающей инерциального C^1 -многообразия. В параболическом же случае такого примера до сих пор не было, и настоящая статья ставит первоочередной целью ликвидировать этот пробел.

В п. 1 приводятся простые необходимые условия существования инерциальных многообразий (с теми или иными дополнительными свойствами) для абстрактного полулинейного параболического уравнения в банаховом пространстве с гладким компактным фазовым полупотоком. Данные условия связаны со спектральными характеристиками линеаризации полупотока в его стационарных точках. На этой основе, далее, строятся контрпримеры:

- 1) уравнения параболического типа, не обладающего инерциальным C^1 -многообразием;
- 2) класса скалярных уравнений реакции-диффузии без абсолютно нормально-гиперболического на стационарном множестве инерциального многообразия;

- 3) трехмерной системы реакции-диффузии без нормально-гиперболического в стационарных точках инерциального многообразия.

Имеются в виду усиленная и ослабленная версии [3], [4] понятия нормальной гиперболичности инвариантных многообразий на множестве стационарных точек фазового полупотока.

Главным выводом работы является существование параболических уравнений без гладкого инерциального многообразия. Соответствующий пример (предложение 2.1) получен из системы двух одномерных диффузионных уравнений заменой оператора $-\partial_{xx}$ на оператор $(-\partial_{xx})^{1/2}$ и добавлением подходящих линейных членов.

Известные условия “спектрального скачка” [1], [5], [6], обеспечивающие асимптотическую конечномерность параболических уравнений, оказываются довольно жесткими, в связи с чем предпринимались попытки их ослабить (см. [5]). С этой точки зрения представляют интерес теорема 3.1 и другие результаты п. 3, согласно которым для широкого класса скалярных диффузионных задач Коши–Неймана в ограниченных областях $\mathbb{R}^m$ (и задач Коши на торах Tor^m) указанные условия близки к необходимым, если говорить о существовании инерциального многообразия со свойством абсолютной нормальной гиперболичности на стационарном множестве. В частности, такого многообразия нет у уравнения $u_t = \nu \Delta u + f(u)$ в круге $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с фазовым пространством $L^2(\Omega)$ при минимальных требованиях к гладкой функции f и достаточно малых значениях коэффициента $\nu > 0$. То же верно и для трехмерного куба Ω , хотя при этом [5], [4] всегда имеется инерциальное многообразие с более слабым свойством нормальной гиперболичности в стационарных точках.

Наконец, предложение 4.1 дает конструкцию двухкомпонентных систем реакции-диффузии в кубе $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с однородным условием Неймана на $\partial\Omega$, не обладающих нормально-гиперболическим в стационарных точках инерциальным многообразием $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Это обобщает аналогичный результат [4] для уравнения $u_t = \Delta u + f(x, u)$ в кубе $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ и показывает, что такого рода “негиперболическую” предельную динамику могут демонстрировать уже трехмерные диффузионные системы с нелинейностью типа $f = f(u)$.

1. Абстрактное уравнение. Речь пойдет о полулинейных параболических уравнениях [7] вида

$$\partial_t u = -Au + F(u) \quad (1)$$

в вещественном сепарабельном банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$. Здесь $u = u(t) \in X$ и $\partial_t u$ – сильная производная по t , A и F – линейный и нелинейный операторы в X . Оператор A предполагается дискретным (имеющим компактную резольвенту) и секториальным. Последнее означает, что область определения $D(A)$ плотна в X , A – замкнут и порождает аналитическую полугруппу ограниченных линейных операторов $\{\exp(-At)\}_{t \geq 0}$ в X . Если спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq 0$, то можно корректно определить шкалу банаховых пространств $\{X^\alpha\}_{\alpha \geq 0}$, где $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ с нормой $\|u\|_\alpha = \|A_1^\alpha u\|$ и $A_1 = A + I$, $I = \text{id}$. При этом $X^0 = X$, $X^1 = D(A)$ и $X^\alpha \subset X^\beta$ для $\beta < \alpha$. Символы $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\alpha$ будут обозначать также нормы линейных операторов в X , X^α .

Считаем, что $F \in \text{Lip}(X^\alpha, X)$ при фиксированном $\alpha \in [0, 1]$, т.е. $F: X^\alpha \rightarrow X$ и $\|F(u) - F(u')\| \leq K\|u - u'\|$ на X^α с $K = \text{const}$. Это обеспечивает для (1) существование в X^α вполне непрерывного разрешающего полупотока $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ с $\Phi_t u_0 = u(t)$ при

любом $u_0 = u(0) \in X^\alpha$. Важно отметить, что $u(t) \in X^1$ для $t > 0$. Постулируем диссипативность уравнения (1) в X^α , означающую наличие такого (втягивающего) шара $B \subset X^\alpha$, что $\Phi_t B' \subset B$ при $t > \tau(B')$ для произвольного шара $B' \subset X^\alpha$. Кроме того, понадобится дифференцируемость функции F . Обычное требование $F \in C^1(X^\alpha, X)$ по Фреше становится весьма ограничительным в важном случае $X = L^2(\Omega)$, где Ω – конечная подобласть $\mathbb{R}^m$, и оператора Немыцкого $F: X \rightarrow X$ (см. [7, § 1.2]). Обозначая $\mathcal{L}(X^\alpha, X)$ множество линейных непрерывных операторов из X^α в X , дадим, следуя [5], слегка иное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция $F \in C^1(X^\alpha, X)$ на X^1 , если имеется непрерывное отображение $u \rightarrow F'(u)$ из X^α в $\mathcal{L}(X^\alpha, X)$ такое, что $\|F(u+h) - F(u) - F'(u)h\| = o(\|h\|_\alpha)$ для $u, h \in X^1$ при $\|h\|_\alpha \rightarrow 0$ равномерно по $\|u\|_1, \|h\|_1$.

Напомним, что в традиционной формулировке $u, h \in X^\alpha$.

Итак, принимаются следующие основные гипотезы относительно коэффициентов и динамики (1).

- (H1) Линейный оператор A секториален и дискретен. Спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.
- (H2) Функция $F \in \operatorname{Lip}(X^\alpha, X)$ и $F \in C^1(X^\alpha, X)$ на X^1 при некотором $\alpha \in [0, 1)$.
- (H3) Уравнение (1) диссипативно в X^α .

Заметим, что секториальным является любой самосопряженный неотрицательный линейный оператор в гильбертовом пространстве.

Конечномерное C^1 -подмногообразие $\mathcal{M}$ в X^α называем *инерциальным*, если $\mathcal{M}$ инвариантно ($\Phi_t \mathcal{M} = \mathcal{M}$ для $t > 0$, так что $\mathcal{M} \subset X^1$) и экспоненциально притягивает шары X^α . Инерциальное многообразие всегда содержит компактный аттрактор $\mathcal{A}$ – максимальное ограниченное инвариантное подмножество X^α . В свою очередь, аттрактору принадлежит множество $E \subset X^1$ стационарных точек полупотока $\{\Phi_t\}$.

Дальнейшие построения связаны со спектральными характеристиками линейных операторов $T = A - F'(u)$ при $u \in E$. Поскольку $D(F'(u)) = X^\alpha \supset X^1$, то $D(T) = X^1$. Оператор T в X дискретен и секториален [7, § 1.4]. Таким образом, спектр $\sigma(T)$ состоит из не более чем счетного числа собственных значений конечной алгебраической кратности и всякое конечномерное инвариантное подпространство T лежит в X^1 .

Далее, $\|\Phi_t u\|_1 \leq M(\tau, r)$ для $u \in X^1$, $\|u\|_1 \leq r$ и $0 \leq t \leq \tau$. Это легко получается из интегральной записи уравнения (1), если действовать, как в [7, леммы 3.2.1, 3.3.2]. Стандартные рассуждения показывают теперь, что $\Phi_t \in C^1(X^\alpha, X)$ на X^1 , $\Phi'_t(u) = \exp(-A + F'(u))t$ при $u \in E$, полугруппа операторов $\{\Phi'_t(u)\}_{t \geq 0}$ аналитична в X и X^α . Для произвольного конечномерного инвариантного C^1 -подмногообразия $\mathcal{M}$ в X^α обозначаем $\mathcal{T}_u \mathcal{M}$ его касательное подпространство в точке $u \in \mathcal{M}$. Если $u \in E$, то $\mathcal{T}_u \mathcal{M}$ – инвариантное подпространство операторов $\Phi'_t(u)$ и $A - F'(u)$, что доказывается обычным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Конечномерное инвариантное C^1 -многообразие $\mathcal{M}$ в X^α , содержащее стационарное множество E , называем *абсолютно нормально-гиперболическим на E* , если каждому $u \in E$ соответствует такое прямое разложение $X^\alpha = \mathcal{T}_u \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}_u \mathcal{M}$, что подпространство $\mathcal{N}_u \mathcal{M}$ инвариантно для операторов $A - F'(u)$, $\Phi'_t(u)$ и

$$\begin{aligned} \|\Phi'_t(u)h\|_\alpha &\geq K^{-1}e^{-\gamma_1 t}\|h\|_\alpha && \text{на } \mathcal{T}_u \mathcal{M}, \\ \|\Phi'_t(u)h\|_\alpha &\leq Ke^{-\gamma_2 t}\|h\|_\alpha && \text{на } \mathcal{N}_u \mathcal{M} \end{aligned} \quad (2)$$

при $t \geq 0$ с не зависящими от u постоянными $K \geq 1$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$.

Это естественная модификация соответствующей формулировки [3] для конечномерных каскадов. Понадобится также ослабленная версия данного понятия (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Если в 1.2 параметры γ_1, γ_2 зависят от $u \in E$, то многообразие $\mathcal{M}$ называем *нормально-гиперболическим в стационарных точках*.

Перейдем к обсуждению необходимых условий существования инерциального многообразия (в том числе с дополнительными свойствами) для уравнения (1). Полагаем E_- – подмножество точек u в E , для которых спектр $\sigma(A - F'(u))$ не содержит вещественных неотрицательных значений; $l(u)$ – число отрицательных значений (с учетом кратности) в $\sigma(A - F'(u))$ для $u \in E$. Понятно, что $l(u) < \infty$.

ЛЕММА 1.1. Если аттрактор $\mathcal{A}$ можно вложить в конечномерное инвариантное C^1 -многообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$, то для всех гиперболических точек $u \in E_-$ четность числа $l(u)$ одинакова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – гиперболическая стационарная точка из E_- , $Y = \mathcal{T}_u \mathcal{M}$ и $\dim Y = n$. Подпространство Y инвариантно для $T = A - F'(u)$ и $\sigma(T|Y) \subset \sigma(T)$. Поскольку $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$ и аттрактор $\mathcal{A}$ содержит неустойчивое многообразие точки u , то Y содержит инвариантное подпространство оператора T , отвечающее части спектра с $\lambda < 0$. Таким образом, $l(u) \leq n$ и в $\sigma(T|Y)$ имеется ровно $l(u)$ значений $\lambda \in \mathbb{R}$. Так как пространство X вещественно, оператор T записывается вещественной матрицей в произвольном базисе Y , а потому число $n - l(u)$ четно. Но n не зависит от $u \in \mathcal{M}$ и лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Инерциальные многообразия содержат аттрактор, и мы получили необходимое условие их существования.

Для $u \in E$, $\gamma > 0$ обозначим $X(u, \gamma)$ конечномерное инвариантное подпространство оператора $T = A - F'(u)$ в X , отвечающее части спектра $\sigma(T)$ с $\operatorname{Re} \lambda \leq \gamma$. Пусть также $\kappa(u, \gamma) = \dim X(u, \gamma)$.

ЛЕММА 1.2. Если уравнение (1) обладает абсолютно нормально-гиперболическим на E инерциальным многообразием $\mathcal{M} \subset X^\alpha$ размерности n , то $\kappa(u, \gamma) = n$ при некотором $\gamma > 0$ и любом $u \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Y_1 = \mathcal{T}_u \mathcal{M}$, $Y_2 = \mathcal{N}_u \mathcal{M}$ и $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$. Из условий (2) с помощью обычных оценок на полугруппу $\{\exp(-Tt)\}_{t \geq 0}$ находим, что $\operatorname{Re} \lambda \leq \gamma_1$ для $\lambda \in \sigma(T|Y_1)$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq \gamma_2$ для $\lambda \in \sigma(T|Y_2)$. Поскольку $Y_1 \oplus Y_2 = X^\alpha$, то $Y_1 = X(u, \gamma)$ и $\kappa(u, \gamma) = n$ при каждом $u \in E$. Лемма доказана.

Приведем еще вариант теоремы 2.1 из [4].

ЛЕММА 1.3. Если уравнение (1) обладает нормально-гиперболическим в стационарных точках инерциальным многообразием $\mathcal{M} \subset X^\alpha$ размерности n , то для каждого $u \in E$ найдется $\gamma = \gamma(u) > 0$ такое, что $\kappa(u, \gamma) = n$.

Доказательство то же, что выше, с $\gamma = (\gamma_1(u) + \gamma_2(u))/2$.

Леммы 1.2, 1.3 справедливы и для конечномерного инвариантного (не обязательно инерциального) C^1 -многообразия $\mathcal{M} \supset E$ в X^α .

2. Уравнение без инерциального многообразия. Пусть $H = L^2(0, \pi)$, $X = H \times H$ – гильбертово пространство вещественных вектор-функций $u = (h_1, h_2)$ с нормой $\|\cdot\|$, d – самосопряженный неотрицательный оператор в H такой, что $de_n = ne_n$ для $e_n = \cos nx$, $n \geq 0$. Полагаем: $\varphi_{n,1} = (e_{n-1}, -e_{n-1})$ при $n \geq 2$ и $\varphi_{n,2} = (e_n, e_n)$ при $n \geq 1$; $\varphi_{1,1} = (a, -a)$ и $\varphi_0 = (a, a)$, $a = 1/\sqrt{2}$. Множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_{n,j}\}$ с $n \geq 1$ и $j = 1, 2$ образует в X ортогональный базис, причем $\|\varphi_0\| = \|\varphi_{n,j}\| = \sqrt{\pi}$.

Рассмотрим систему двух уравнений (в векторной записи)

$$u_t = -du + g(u) + Qu \quad (3)$$

с $u(t, \cdot) \in X$, где $du = (dh_1, dh_2)$, функция $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и Q – непрерывный линейный оператор в X . Наложим на g и Q следующие ограничения:

- а) $g \in C^1$ и $g(v) = -v$ для $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ с $|v| \geq r > 0$;
- б) $g(w_1) = g(w_2) = 0$ для двух точек w_1, w_2 на прямой $v_1 = v_2$, причем собственные числа (нормальной) матрицы Якоби $g'(w_1)$ суть $s \pm i\omega$ с $s < 0$ и $\omega > 0$, а матрица $g'(w_2)$ имеет 0 на диагонали и $1/2$ вне ее;
- в) $Q\varphi_0 = 0$, $Q\varphi_{n,1} = -\varepsilon_n \varphi_{n,2}$ и $Q\varphi_{n,2} = \varepsilon_n \varphi_{n,1}$ для $n \geq 1$ с $\varepsilon_n > 0$ и

$$\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}} + \sum_2^\infty \varepsilon_n < \frac{\omega}{4}.$$

Векторное поле на плоскости со свойствами а)–б) построить нетрудно. Пусть w_1, w_2 – произвольные точки прямой $v_1 = v_2$ в $\mathbb{R}^2$, $g(w_1) = g(w_2) = 0$, поле g линейно и удовлетворяет условиям б) вблизи w_1 и w_2 . Положим теперь $g(v) = -v$ для $|v| \geq r$ с достаточно большим r и продолжим g до C^1 -поля в $\mathbb{R}^2$. Оператор Q вполне задан соотношениями в) и (как показывают выкладки) имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2 & -Q_1 \end{pmatrix}, \quad (Q_j h)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q_j(x, \xi) h(\xi) d\xi$$

с $q_j(x, \xi) = p(x, \xi) + (-1)^j p(\xi, x)$ для $j = 1, 2$ и

$$p(x, \xi) = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}} \cos \xi + \sum_{n=2}^\infty \varepsilon_n \cos(n-1)x \cos n\xi.$$

Отметим, что ядра $q_j(x, \xi)$ непрерывны на $[0, \pi]^2$.

Систему (3) можно интерпретировать как абстрактное уравнение (1) в пространстве X с линейным самосопряженным неотрицательным оператором $Au = du$ и нелинейной функцией $F(u) = G(u) + Qu$, где $(G(u))(x) = g(u(x))$ для $x \in (0, \pi)$. Убедимся, что при этом выполнены предположения (Н1)–(Н3) с $\alpha = 0$. Оператор A в X дискретен, ибо таков скалярный оператор d в H . Согласно условию а) функция $g \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, так что $G \in \text{Lip}(X, X)$, а значит, и $F \in \text{Lip}(X, X)$. Поскольку $X^1 = H^1((0, \pi); \mathbb{R}^2)$, то $G, F \in C^1(X, X)$ на X^1 (см. [5, лемма 3.3]). Далее, умножим скалярно в X обе части (3) на u ; тогда

$$(u, u_t) = -(u, du + u) + (u, g(u) + u) + (u, Qu).$$

Оператор Q кососимметричен (это видно из в)), а оператор $d \geq 0$, поэтому $(u, Qu) = 0$ и $(u, du + u) \geq \|u\|^2$. С другой стороны, $(u, g(u) + u) \leq M\|u\|$, где $M = M_0\sqrt{\pi}$ и $M_0 = \sup |g(v) + v|$ по $v \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, $V_t \leq -V + M$ для $V(t) = \|u(t)\|$, откуда следует диссипатичность (3) в X с втягивающим шаром $\|u\| < 2M$.

Покажем теперь, что система (3) не имеет инерциального многообразия. Фактически, будет доказано больше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. При выполнении условий а)-в) аттрактор системы (3) нельзя вложить в конечномерное инвариантное C^1 -многообразие $\mathcal{M} \subset X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $Au = 0$ для $u = \text{const}$ и $Qu = 0$ при $u = \theta\varphi_0$ с $\theta \in \mathbb{R}$. По условию б) особые точки w_1, w_2 поля g лежат на прямой $v_1 = v_2$ в $\mathbb{R}^2$, стало быть, $u_1 \equiv w_1$ и $u_2 \equiv w_2$ – стационарные решения (3). Спектр $\sigma(A - G'(u_1))$ состоит (см. б)) из простых собственных чисел вида $n - s \pm i\omega$ с $s < 0, \omega > 0$ и целыми $n \geq 0$. Из условия в) находим, что $\|Q\| < \omega$, а потому $\sigma(A - F'(u_1)) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ и $l(u_1) = 0$ (в терминах леммы 1.1). Положим еще $T = G'(u_2)$. Согласно б) оператор $T = 2^{-1}J$, где $J: (h_1, h_2) \rightarrow (h_2, h_1)$ для $h = (h_1, h_2) \in X$. Имеем $A\varphi_{n,1} = (n-1)\varphi_{n,1}$ и $A\varphi_{n,2} = n\varphi_{n,2}$, $T\varphi_{n,1} = -2^{-1}\varphi_{n,1}$ и $T\varphi_{n,2} = 2^{-1}\varphi_{n,2}$. Таким образом, $(A - T)\varphi_{n,j} = (n - 1/2)\varphi_{n,j}$ при $j = 1, 2$ и $n \geq 1$. Так как $Q\varphi_{n,1} = -\varepsilon_n\varphi_{n,2}$ и $Q\varphi_{n,2} = \varepsilon_n\varphi_{n,1}$, двумерные подпространства $Y_n = \{\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2}\}$ инвариантны для оператора $A - T - Q$ и в Y_n данный оператор имеет собственные значения $n - 1/2 \pm i\varepsilon_n$. Наконец, $Q\varphi_0 = 0$ и $(A - T - Q)\varphi_0 = -2^{-1}\varphi_0$, так что $\sigma(A - F'(u_2))$ состоит из простых собственных чисел $\lambda_0 = -1/2$ и $\lambda_n = n - 1/2 \pm i\varepsilon_n$ с $n \geq 1$. Поскольку $\varepsilon_n > 0$, то $l(u_2) = 1$. Кроме того, стационарные точки u_1, u_2 – гиперболические и принадлежат множеству E . Предложение 2.1 следует теперь из леммы 1.1.

3. Абсолютная нормальная гиперболичность на E . Рассмотрим скалярное уравнение

$$u_t = \nu\Delta u + f(u) \quad (\nu > 0) \quad (4)$$

в гладкой ограниченной области или параллелепипеде $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \leq 3$, с периодическим (Р) или однородным краевым условием Неймана (N). Считаем везде в этом пункте, что $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $f(v) = -v$ при $|v| \geq r > 0$. Запишем уравнение (4) в виде (1) с $X = L^2(\Omega)$, дискретным самосопряженным неотрицательным оператором $Au = -\nu\Delta u$ в X и нелинейностью $(F(u))(x) = f(u(x))$ для $x \in \Omega$. Тогда (как и в п. 2) $F \in \text{Lip}(X, X)$ и уравнение (4) диссипативно в X . Поскольку $X^1 \subset H^2(\Omega)$ и $m \leq 3$, то $F \in C^1(X, X)$ на X^1 [5, лемма 3.3] и (4) удовлетворяет основным гипотезам (Н1)–(Н3) с $\alpha = 0$. Напомним, что E – множество стационарных решений (4) и $E \subset X^1$.

Пусть $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ – спектр оператора $(-\Delta)$ в Ω с условием (N) или (Р). Как известно [5, § 4], уравнение (4) при любых $\nu > 0$ и $f \in C^3$ обладает гладким инерциальным многообразием $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$, коль скоро

$$\sup_{n \geq 0} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty, \quad (5)$$

причем, на самом деле, можно утверждать, что $\mathcal{M}$ – абсолютно нормально-гиперболично на E . Оказывается, в данной ситуации условие (5) близко к необходимому.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq M$ при $n \geq 0$, $f(v_1) = f(v_2) = 0$ и $f'(v_1) - f'(v_2) = a > 0$ для некоторых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Тогда при $\nu < a/M$ для задачи (4)_N и (4)_Р не существует абсолютно нормально-гиперболического на E инерциального многообразия $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f'(v_j) = a_j$ и $u_j \equiv v_j$, $u_j \in E$ для $j = 1, 2$. Спектр $\sigma(A - F'(u_j)) = \sigma(-\nu\Delta - a_j I) = \{\mu_{n,j}\}$ с $\mu_{n,j} = \nu\lambda_n - a_j$, $n \geq 0$. Если $a = a_1 - a_2 > 0$ и $\nu < a/M$, то $\nu\lambda_{n+1} - a_1 < \nu\lambda_n - a_2$ или $\mu_{n+1,1} < \mu_{n,2}$ для всех $n \geq 0$. Теперь остается применить лемму 1.2.

Теорема верна и при $m > 3$, если работать не в $L^2(\Omega)$, а в $H^s(\Omega)$ с подходящим $s \geq 1$. Поскольку $\lambda_n \sim cn^{2/m}$ при $n \rightarrow \infty$ с $c = c(\Omega)$, условие (5) не гарантировано уже для $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Так, (5) не верно для круга, что видно из известного представления λ_n через нули функции Бесселя.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. При ограничении теоремы 3.1 на f и $\nu < \nu_1(f, \Omega)$ для задачи (4)_N в круге $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ не существует абсолютно нормально-гиперболического на E инерциального многообразия $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$.

Положим $K = \sup |f'(v)|$ по $v \in \mathbb{R}$ и $K_1 = \sup |f'(v_1) - f'(v_2)|$ по $v_1, v_2 \in$ множеству нулей f . Ясно, что $K_1 \leq 2K$. Оптимальное достаточное условие [6] существования (липшицева) n -мерного инерциального многообразия уравнения (4) имеет вид $\lambda_{n+1} - \lambda_n > 2K/\nu$. Действуя, как выше, получаем для (4) необходимое условие существования абсолютно нормально-гиперболического на E инерциального многообразия $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$ в форме $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq K_1/\nu$, что демонстрирует действительно принципиальную роль условия “спектрального скачка” в проблеме асимптотической конечности подобных эволюционных систем.

Согласно [5], [4] для задачи (4)_N в кубе $\Omega = (0, \pi)^3$ с $f \in C^3$ всегда имеется нормально-гиперболическое в стационарных точках инерциальное многообразие $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$. В этом случае, однако, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \mid l_j - \text{целые} \geq 0\}$ и [8, гл. 20] $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 3$, так что по теореме 3.1 абсолютно нормально-гиперболическое на E инерциальное многообразие существует не при любых ν и f . Все то же верно и для задачи (4)_P в кубе $(0, 2\pi)^3$.

4. Нормальная гиперболичность в стационарных точках. Малле-Паре, Селл и Шао построили пример [4] диссипативного уравнения $u_t = \Delta u + f(x, u)$ в кубе $\Omega = (0, \pi)^4$ с условием Неймана на $\partial\Omega$ и гладкой функцией f , для которого не существует нормально-гиперболического в стационарных точках инерциального многообразия $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$.

Здесь будет дан аналогичного рода контрпример для двухкомпонентной системы уравнений реакции-диффузии

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad (6)$$

в кубе $\Omega = (0, \pi)^3$ с однородным условием Неймана (N) на $\partial\Omega$ и функцией $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ такой, что $f(v) = -v$ при $|v| \geq r > 0$. Подчеркнем, что в отличие от [4] нелинейность f в (6) не зависит от x и, главное, размерность задачи понижена до трех. Трехмерные системы реакции-диффузии имеют разнообразные приложения, и вопрос об асимптотической конечномерности их фазовой динамики представляет интерес.

Запишем (6) в абстрактном виде (1) с $X = L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$, $Au = -\Delta u$ и $(F(u))(x) = f(u(x))$ для $x \in \Omega$. При этом (как и в пп. 2, 3) $F \in \text{Lip}(X, X)$, $F \in C^1(X, X)$ на X^1 , система (6) диссипативна в X и справедливы все предположения (H1)–(H3) с $\alpha = 0$. Для $v \in \mathbb{R}^2$ обозначаем через $\delta(v) \geq 0$ разность собственных значений матрицы Якоби $f'(v)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Допустим, векторное поле f имеет (по крайней мере) четыре особые точки $v_j \in \mathbb{R}^2$, причем $\text{Re } \delta(v_0) = 0$ и $\delta(v_j) = j$ для $1 \leq j \leq 3$. Тогда система (6) с краевым условием (N) не обладает нормально-гиперболическим в стационарных точках инерциальным многообразием $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

Соответствующее векторное поле строится, как в п. 2.

Сделаем сначала ряд замечаний. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ – собственные числа λ_n кратности k_n скалярного оператора $(-\Delta)$ с условием (N) в Ω и $\varkappa_n = k_0 + \dots + k_n$. Как уже отмечалось, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\}$ со всевозможными целыми $l_j \geq 0$ и всегда $1 \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 3$. Пусть еще $u_j \equiv v_j$, $u_j \in E \subset X^1$ для $0 \leq j \leq 3$. Спектр оператора $T_j = A - F'(u_j)$ в X есть объединение по $n \geq 0$ спектров (2×2) -матриц вида $\lambda_n I - f'(v_j)$, $I = \text{id}$. Спектр $\sigma(T_0)$ состоит из собственных чисел $\lambda_n - s \pm i\omega$, где $s \pm i\omega$ – собственные значения матрицы $f'(v_0)$ с s и $\omega \in \mathbb{R}$, а $\sigma(T_j)$ при $1 \leq j \leq 3$ состоит из собственных чисел $\lambda_n - s_j \pm j/2$, где $s_j \pm j/2$ – собственные значения матриц $f'(v_j)$ и $s_j \in \mathbb{R}$. Полагаем

$$\begin{aligned}\chi(0, m) &= \text{card}\{\mu \in \sigma(T_0) \mid \text{Re } \mu \leq \lambda_m - s\}, \\ \psi(j, n) &= \text{card}\{\mu \in \sigma(T_j) \mid \mu \leq \lambda_n - s_j - j/2\}, \\ \chi(j, n) &= \text{card}\{\mu \in \sigma(T_j) \mid \mu \leq \lambda_n - s_j + j/2\}\end{aligned}$$

для $m, n \geq 0$ и $1 \leq j \leq 3$, причем точки спектра считаются с алгебраической кратностью. Как видим, $\chi(0, m) = 2\varkappa_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Согласно лемме 1.3 достаточно привести к противоречию следующую гипотезу: найдутся целые $m \geq 0$ и $n_j \geq 0$ с $1 \leq j \leq 3$ такие, что при каждом j величина $\chi(0, m)$ совпадает с $\psi(j, n_j)$ или с $\chi(j, n_j)$.

Непосредственно проверяются соотношения: $\psi(j, n) = \varkappa_n$, если $\lambda_n - \lambda_0 < j$; $\psi(j, n) = \varkappa_n + \varkappa_{n-l}$, если $\lambda_n - \lambda_0 \geq j$ и $l \geq 1$ – наименьший индекс со свойством $\lambda_n - \lambda_{n-l} \geq j$; $\chi(j, n) = \varkappa_n + \varkappa_{n+l}$, где $l \geq 0$ – наибольший индекс со свойством $\lambda_{n+l} - \lambda_n \leq j$. Так как $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq 1$, то здесь $l \leq j$. Кроме того: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$; $k_0 = 1$, $k_1 = 3$ и $k_2 = 3$; $\varkappa_0 = 1$, $\varkappa_1 = 4$ и $\varkappa_2 = 7$. Наконец, $\varkappa_n + \varkappa_{n-l} = 2\varkappa_{n-l} + k_{n-l+1} + \dots + k_n$ и $\varkappa_n + \varkappa_{n+l} = 2\varkappa_n + k_{n+1} + \dots + k_{n+l}$.

Заметим, что $\chi(0, m) \neq \psi(j, n)$ при $\lambda_n - \lambda_0 < j$. Действительно, в этой ситуации $0 \leq n \leq 2$ и $\psi(j, 0) = 1$, $\psi(j, 1) = 4$, $\psi(j, 2) = 7$. Если же $\chi(0, m) = 4$, то $\varkappa_m = 2$, чего быть не может. Итак, при анализе величин $\psi(j, n)$ ограничимся далее случаем $\lambda_n - \lambda_0 \geq j$, $n \geq j$.

Пусть сначала $j = 1$; тогда $\psi(1, n) = 2\varkappa_{n-1} + k_n$, $\chi(1, n) = 2\varkappa_n + k_{n+1}$ при $\lambda_{n+1} - \lambda_n = 1$ и $\chi(1, n) = 2\varkappa_n$ при $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq 2$. Понятно, что равенства типа $2\varkappa_m = 2\varkappa_n + k_{n+1}$ невозможны, поэтому $\chi(0, m) \neq \psi(1, n)$ для любых $m \geq 0$, $n \geq 0$. С другой стороны, может быть $\chi(0, m) = \chi(1, n)$, если $m = n$ и

$$\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq 2. \quad (7)$$

Для $j = 2$ имеем

$$\begin{aligned}\psi(2, n) &= \begin{cases} 2\varkappa_{n-2} + k_{n-1} + k_n & \text{при } \lambda_n - \lambda_{n-1} = 1, \\ 2\varkappa_{n-1} + k_n & \text{при } \lambda_n - \lambda_{n-1} \geq 2, \end{cases} \\ \chi(2, n) &= \begin{cases} 2\varkappa_n + k_{n+1} + k_{n+2} & \text{при } \lambda_{n+2} - \lambda_n = 2, \\ 2\varkappa_n + k_{n+1} & \text{при } \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 2 \text{ и } \lambda_{n+2} - \lambda_n \geq 3, \\ 2\varkappa_n & \text{при } \lambda_{n+1} - \lambda_n = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Если $\chi(0, m) = \psi(2, n)$, то $2\varkappa_m = 2\varkappa_{n-2} + k_{n-1} + k_n$. Но тогда необходимо $m = n - 1$, а значит, $\lambda_{m+1} - \lambda_m = 1$, что противоречит (7). Если же $\chi(0, m) = \chi(2, n)$, то либо

$2\kappa_m = 2\kappa_n + k_{n+1} + k_{n+2}$, либо $\kappa_m = \kappa_n$. В первом случае должно быть $m = n + 1$, откуда следует равенство $\lambda_{m+1} - \lambda_{m-1} = 2$, несовместное с (7). Во втором случае $m = n$ и условие (7) нужно усилить до

$$\lambda_{m+1} - \lambda_m = 3. \quad (8)$$

Для $j = 3$ находим

$$\psi(3, n) = \begin{cases} 2\kappa_{n-3} + k_{n-2} + k_{n-1} + k_n & \text{при } \lambda_n - \lambda_{n-2} = 2, \\ 2\kappa_{n-2} + k_{n-1} + k_n & \text{при } \lambda_n - \lambda_{n-2} \geq 3 \text{ и } \lambda_n - \lambda_{n-1} \leq 2, \\ 2\kappa_{n-1} + k_n & \text{при } \lambda_n - \lambda_{n-1} = 3, \end{cases}$$

$$\chi(3, n) = \begin{cases} 2\kappa_n + k_{n+1} + k_{n+2} + k_{n+3} & \text{при } \lambda_{n+3} - \lambda_n = 3, \\ 2\kappa_n + k_{n+1} + k_{n+2} & \text{при } \lambda_{n+2} - \lambda_n \leq 3 \text{ и } \lambda_{n+3} - \lambda_n \geq 4, \\ 2\kappa_n + k_{n+1} & \text{при } \lambda_{n+2} - \lambda_n \geq 4. \end{cases}$$

Если $\chi(0, m) = \psi(3, n)$, то либо $2\kappa_m = 2\kappa_{n-3} + k_{n-2} + k_{n-1} + k_n$, либо $2\kappa_m = 2\kappa_{n-2} + k_{n-1} + k_n$. Первое равенство влечет $m = n - 2$ или $m = n - 1$, а значит, $\lambda_{m+2} - \lambda_m = 2$ или $\lambda_{m+1} - \lambda_{m-1} = 2$. И то и другое противоречит (8). Из второго равенства следует $m = n - 1$, откуда получаем оценку $\lambda_{m+1} - \lambda_m \leq 2$, несовместную с (8). Если же $\chi(0, m) = \chi(3, n)$, то либо $2\kappa_m = 2\kappa_n + k_{n+1} + k_{n+2} + k_{n+3}$, либо $2\kappa_m = 2\kappa_n + k_{n+1} + k_{n+2}$. В первом случае должно быть $m = n + 2$ или $m = n + 1$, так что $\lambda_{m+1} - \lambda_{m-2} = 3$ или $\lambda_{m+2} - \lambda_{m-1} = 3$; в другом случае $m = n + 1$ и $\lambda_{m+1} - \lambda_{m-1} \leq 3$. Последние три соотношения для λ вновь не согласуются с условием (8), и предложение 4.1 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чуешов И. Д. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 135–162.
- [2] Mora X., Sola-Morales J. Existence and non-existence of finite-dimensional globally attracting invariant manifolds in semilinear damped wave equations // Dynamics of Infinite Dimensional Systems. New York: Springer, 1987. P. 187–210.
- [3] Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds // Lecture Notes in Math. V. 583. New York: Springer, 1977.
- [4] Mallet-Paret J., Sell G. R., Shao Z. Obstructions to the existence of normally hyperbolic inertial manifolds // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. № 3. P. 1027–1055.
- [5] Mallet-Paret J., Sell G. R. Inertial manifolds for reactions-diffusion equations in higher space dimensions // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. № 4. P. 805–866.
- [6] Романов А. В. Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 36–54.
- [7] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [8] Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. 5th ed. Oxford: Oxford Univ. Press, 1979.