Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейных разностных операторов в пространствах $l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 448–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 09:49:27

УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛИПШИЦЕВОЙ ОБРАТИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ $l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$

В. Е. Слюсарчук

Получены необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости разностного отображения

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - x(n) - f(x(n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, в пространствах двусторонних числовых последовательностей $l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Библиография: 11 названий.

Обозначим через X одно из следующих банаховых пространств двусторонних числовых последовательностей:

$$l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) = \left\{ x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \mid \|x\|_{l_p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) = \left\{ x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \mid \|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < \infty \right\}.$$

Отображение $\mathcal{A}: X \rightarrow X$ назовем *липшицевым*, если

$$\sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|}{\|x - y\|} < +\infty.$$

Рассмотрим непрерывное разностное отображение $\mathcal{D}: X \rightarrow X$, определенное равенством

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - x(n) - f(x(n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $x = x(n) \in X$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, которое в случае $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$, удовлетворяет соотношениям

$$f(0) = 0 \tag{1}$$

и

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \infty. \tag{2}$$

Выполнение этих соотношений, очевидно, необходимо и достаточно для того, чтобы каждое из пространств l_p , $1 \leq p < \infty$, в случае непрерывности отображения f было инвариантным относительно отображения $\mathcal{D}$.

Выясним, когда отображение $\mathcal{D}$ имеет обратное липшицевое отображение.

Для линейных или слабо нелинейных разностных отображений аналогичная задача решалась в [1]–[10].

Пусть $R(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы отображение $\mathcal{D}: X \rightarrow X$ имело обратное липшицевое отображение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была строго монотонной на $\mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}$ и*

$$\sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \left| \frac{x + f(x) - y - f(y)}{x - y} \right| < 1 \quad (3)$$

или

$$\inf_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \left| \frac{x + f(x) - y - f(y)}{x - y} \right| > 1. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Рассмотрим сначала случай $X = l_\infty$. Пусть отображение $\mathcal{D}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратное липшицевое отображение. Тогда для любого $h = h(n) \in l_\infty$ разностное уравнение

$$y(n+1) - y(n) = f(y(n)) - h(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

имеет единственное ограниченное решение. Положим $h(n) = c$, где $c \in \mathbb{R}$. Пусть $x(n)$ – единственное ограниченное решение этого уравнения. Тогда $x(n+m)$ при любом $m \in \mathbb{Z}$ также является решением этого уравнения и в силу единственности $x(n+m) = x(n)$, т. е. $x(n) = x = \text{const}$, откуда

$$f(x) = c. \quad (6)$$

Отсюда и из произвольности c следует, что $R(f) = \mathbb{R}$, а из единственности постоянного решения уравнения (6), вытекающей из единственности ограниченного решения уравнения (5) при $h(n) = c$, следует, что функция $f(x)$ имеет обратную функцию $f^{-1}(x)$. В силу липшицевости отображения $\mathcal{D}^{-1}$ функция $f^{-1}(x)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$. Поэтому функция $f(x)$ является монотонной на $\mathbb{R}$.

Покажем, что для $f(x)$ выполняется соотношение (3) или (4). Предположим противное. Тогда найдутся числа $a'_m, a''_m \in \mathbb{R}$, $a'_m \neq a''_m$, $m \in \mathbb{N}$, для которых

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(a'_m) - f(a''_m)}{a'_m - a''_m} = 0 \quad (7)$$

или

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(a'_m) - f(a''_m)}{a'_m - a''_m} = -2. \quad (8)$$

Рассмотрим элементы $x'_m = x'_m(n)$, $x''_m = x''_m(n) \in l_\infty$, для которых $x'_m(n) = a'_m$ и $x''_m(n) = a''_m$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $(\mathcal{D}x'_m)(n) = -f(a'_m)$ и $(\mathcal{D}x''_m)(n) = -f(a''_m)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому в случае выполнения соотношения (7)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{D}x'_m - \mathcal{D}x''_m\|_{l_\infty}}{\|x'_m - x''_m\|_{l_\infty}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{f(a'_m) - f(a''_m)}{a'_m - a''_m} \right| = 0,$$

что противоречит липшицевости отображения $\mathcal{D}^{-1}$. В случае выполнения соотношения (8) для элементов

$$y'_m(n) = \begin{cases} a'_m, & \text{если } n \text{ четное число,} \\ a''_m, & \text{если } n \text{ нечетное число,} \end{cases} \quad (9)$$

$$y''_m(n) = \begin{cases} a''_m, & \text{если } n \text{ четное число,} \\ a'_m, & \text{если } n \text{ нечетное число,} \end{cases} \quad (10)$$

пространства l_∞ имеет место соотношение

$$(\mathcal{D}y'_m)(n) - (\mathcal{D}y''_m)(n) = \begin{cases} 2(a''_m - a'_m) + (f(a''_m) - f(a'_m)), & \text{если } n \text{ четное число,} \\ 2(a'_m - a''_m) + (f(a'_m) - f(a''_m)), & \text{если } n \text{ нечетное число.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{D}y'_m - \mathcal{D}y''_m\|_{l_\infty}}{\|y'_m - y''_m\|_{l_\infty}} = 0,$$

что также противоречит липшицевости отображения $\mathcal{D}^{-1}$.

Итак, для $f(x)$ выполняется соотношение (3) или (4). Следовательно, необходимость в случае $X = l_\infty$ доказана.

Теперь рассмотрим случай $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$.

Пусть отображение $\mathcal{D}: l_p \rightarrow l_p$ имеет обратное липшицевое отображение. Тогда

$$\|\mathcal{D}^{-1}x - \mathcal{D}^{-1}y\|_{l_p} \leq M\|x - y\|_{l_p} \quad (11)$$

для всех $x, y \in l_p$ и некоторого числа $M > 0$. Определим равенством

$$\chi_{[a,b]}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in [a,b], \\ 0, & \text{если } n \notin [a,b], \end{cases}$$

элемент пространства l_p , где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a < b$. Фиксируем произвольное число $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим элементы $h_m = h_m(n) = c\chi_{[0,m]}(n) \in l_p$, $m \geq 3$. Тогда уравнение

$$y(n+1) - y(n) = f(y(n)) - h_m(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

для каждого $m \geq 3$ имеет единственное решение $y_m = y_m(n) \in l_p$. В силу неравенства (11)

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_m(n+1) - y_m(n)|^p \right)^{1/p} \leq M|c|2^{1/p}, \quad m \geq 3, \quad (13)$$

поскольку

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_m(n+1) - h_m(n)|^p \right)^{1/p} = |c|2^{1/p}, \quad m \geq 3,$$

для всех $p \in [1, \infty)$. Из соотношения (13) следует, что для каждого $m \geq 3$ найдется число a_m и величина $\varepsilon_m(n)$ такие, что

$$\begin{aligned} y_m(n) &= a_m + \varepsilon_m(n), \quad n \in [1, m-1] \cap \mathbb{Z}, \\ \left(\sum_{n=1}^{m-1} |\varepsilon_m(n)|^p \right)^{1/p} &\leq M|c|2^{1/p}, \quad m \geq 3, \end{aligned} \quad (14)$$

и согласно (12)

$$f(a_m + \varepsilon_m(n)) = c + \varepsilon_m(n+1) - \varepsilon_m(n), \quad n \in [1, m-1] \cap \mathbb{Z}, \quad m \geq 3, \quad (15)$$

причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq n \leq m-1} (|\varepsilon_m(n)| + |\varepsilon_m(n+1) - \varepsilon_m(n)|) = 0. \quad (16)$$

Для чисел a_m , $m \geq 3$, имеет место неравенство

$$|a_m| \leq \frac{M|c|(2^{1/p} + (m+1)^{1/p})}{(m-1)^{1/p}}, \quad m \geq 3,$$

поскольку

$$\begin{aligned} |a_m|(m-1)^{1/p} - M|c|2^{1/p} &\leq |a_m|(m-1)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{m-1} |\varepsilon_m(n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{m-1} |a_m + \varepsilon_m(n)|^p \right)^{1/p} \leq \|y_m\|_{l_p} \leq M\|h_m\|_{l_p} \leq M|c|(m+1)^{1/p}, \quad m \geq 3, \end{aligned}$$

согласно (11), (14) и неравенству Минковского [11, с. 50], т.е. множество $\{a_m \mid m \geq 3\}$ ограничено. Поэтому на основании (15), (16) и непрерывности отображения f получаем, что множество решений уравнения (6) является непустым.

Покажем, что уравнение (6) имеет единственное решение. Пусть b_1 и b_2 – решения этого уравнения. Рассмотрим элементы

$$z'_m = z'_m(n) = b_1 \chi_{[0, m]}(n), \quad z''_m = z''_m(n) = b_2 \chi_{[0, m]}(n)$$

пространства l_p . Очевидно, что

$$(\mathcal{D}z'_m)(n) - (\mathcal{D}z''_m)(n) = \begin{cases} b_1 - b_2, & \text{если } n = -1, \\ b_2 - b_1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \notin \{-1, m\}, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\|\mathcal{D}z'_m - \mathcal{D}z''_m\|_{l_p} = 2^{1/p}|b_1 - b_2|.$$

Легко проверить, что

$$\|z'_m - z''_m\|_{l_p} = (m+1)^{1/p}|b_1 - b_2|.$$

Тогда согласно неравенству (11) должно выполняться неравенство

$$(m+1)^{1/p}|b_1 - b_2| \leq M2^{1/p}|b_1 - b_2|$$

для всех $m \geq 3$. Это возможно, когда $b_1 = b_2$.

Следовательно, уравнение (6) имеет единственное решение $x \in \mathbb{R}$ для каждого $s \in \mathbb{R}$. Поэтому функция $f(x)$ с учетом ее непрерывности на $\mathbb{R}$ является строго монотонной на $\mathbb{R}$ и $R(f) = \mathbb{R}$.

Теперь покажем, что для $f(x)$ выполняется соотношение (3) или (4). Предположим, что ни одно из этих соотношений не выполняется. Тогда найдутся числа $a'_m, a''_m \in \mathbb{R}$, $a'_m \neq a''_m$, $m \geq 3$, для которых выполняется соотношение (7) или соотношение (8). В случае выполнения соотношения (7) рассмотрим следующие элементы:

$$x'_m = x'_m(n) = a'_m \chi_{[0, m]}(n), \quad x''_m = x''_m(n) = a''_m \chi_{[0, m]}(n),$$

$m \geq 3$, пространства l_p . Для этих элементов

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}x'_m - \mathcal{D}x''_m\|_{l_p} &= (|a'_m - a''_m|^p + m|f(a'_m) - f(a''_m)|^p \\ &\quad + |(a'_m - a''_m) + (f(a'_m) - f(a''_m))|^p)^{1/p} \\ &\leq 2^{1/p}|a'_m - a''_m| + (m+1)^{1/p}|f(a'_m) - f(a''_m)| \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{D}x'_m - \mathcal{D}x''_m\|_{l_p}}{\|x'_m - x''_m\|_{l_p}} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{1/p}|a'_m - a''_m| + (m+1)^{1/p}|f(a'_m) - f(a''_m)|}{(m+1)^{1/p}|a'_m - a''_m|} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/p}}{(m+1)^{1/p}} + \left| \frac{f(a'_m) - f(a''_m)}{a'_m - a''_m} \right| \right) = 0, \end{aligned}$$

что противоречит липшицевости отображения $\mathcal{D}^{-1}$. В случае выполнения соотношения (8) рассмотрим элементы

$$\begin{aligned} z'_m &= z'_m(n) = \chi_{[0, 2m-1]}(n)y'_m(n) \in l_p, \\ z''_m &= z''_m(n) = \chi_{[0, 2m-1]}(n)y''_m(n) \in l_p, \end{aligned}$$

$m \geq 3$, где y'_m и y''_m — определенные равенствами (9) и (10) элементы пространства l_∞ . Для этих элементов

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}z'_m - \mathcal{D}z''_m\|_{l_p} &= (|a'_m - a''_m|^p + (2m-1)|(a'_m - a''_m) + (f(a'_m) - f(a''_m))|^p \\ &\quad + |(a'_m - a''_m) + (f(a'_m) - f(a''_m))|^p)^{1/p} \\ &\leq 2^{1/p}|a'_m - a''_m| + (2m)^{1/p}|2(a'_m - a''_m) + (f(a'_m) - f(a''_m))|, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{D}z'_m - \mathcal{D}z''_m\|_{l_p}}{\|z'_m - z''_m\|_{l_p}} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{1/p}|a'_m - a''_m| + (2m)^{1/p}|2(a'_m - a''_m) + (f(a'_m) - f(a''_m))|}{(2m)^{1/p}|a'_m - a''_m|} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/p}}{(2m)^{1/p}} \left| 2 + \frac{f(a'_m) - f(a''_m)}{a'_m - a''_m} \right| \right) = 0, \end{aligned}$$

что также противоречит липшицевости отображения $\mathcal{D}^{-1}$.

Итак, для $f(t)$ выполняется соотношение (3) или (4) и в случае $X = l_p, p \in [1, \infty)$.

Следовательно, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функций $f(x)$ является строго монотонной на $\mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}$ и выполняется соотношение (3) или (4). Из первых двух требований вытекает, что функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Покажем сначала, что отображение $\mathcal{D}$ имеет обратное отображение.

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n) = x(n-1) + f(x(n-1)) + h(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (17)$$

с произвольным $h = h(n) \in X$. Это уравнение в случае выполнения соотношения (3) имеет единственное решение $x = x(n) \in X$, поскольку отображение $F: X \rightarrow X$, определенное равенством

$$(Fx)(n) = x(n-1) + f(x(n-1)) + h(n-1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

является отображением сжатия [11]. В случае выполнения соотношения (4) на основании непрерывности $f(x)$ на $\mathbb{R}$ функция $\varphi(x) = x + f(x)$ будет непрерывной и строго монотонной на $\mathbb{R}$, а ее область значений будет совпадать с $\mathbb{R}$. Поэтому функция $\varphi(x)$ будет иметь обратную непрерывную функцию $\varphi^{-1}(x)$ и для нее, очевидно, будет выполняться соотношение

$$\sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \left| \frac{\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)}{x - y} \right| < 1, \quad (18)$$

причем на основании (1) $\varphi^{-1}(0) = 0$, если $X = l_p, 1 \leq p < \infty$. В силу этого уравнение (17) равносильно уравнению

$$x(n) = \varphi^{-1}(x(n+1) - h(n)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Последнее уравнение имеет единственное решение $x = x(n) \in X$, поскольку на основании (18) отображение $G: X \rightarrow X$, определенное правой частью этого же уравнения:

$$(Gx)(n) = \varphi^{-1}(x(n+1) - h(n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

является отображением сжатия.

Итак, отображение $\mathcal{D}: X \rightarrow X$ имеет обратное отображение $\mathcal{D}^{-1}$.

Покажем, что отображение $\mathcal{D}^{-1}$ является липшицевым. Обозначим через q и Q соответственно левые части соотношений (3) и (4).

Пусть элементы $x_1 = x_1(n)$ и $x_2 = x_2(n)$ пространства X являются решениями уравнения (17), если $h = h(n)$ равняется соответственно $h_1 = h_1(n)$ и $h_2 = h_2(n)$ ($h_1, h_2 \in X$). Тогда

$$|x_1(n) - x_2(n)| \leq q|x_1(n-1) - x_2(n-1)| + |h_1(n-1) - h_2(n-1)|, \quad n \in \mathbb{Z},$$

если выполняется соотношение (3), и

$$Q|x_1(n-1) - x_2(n-1)| \leq |x_1(n) - x_2(n)| + |h_1(n-1) - h_2(n-1)|, \quad n \in \mathbb{Z},$$

если выполняется соотношение (4). Из этих неравенств вытекает, что $\|x_1 - x_2\|_X \leq q\|x_1 - x_2\|_X + \|h_1 - h_2\|_X$, т.е.

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq (1 - q)^{-1} \|h_1 - h_2\|_X \quad (19)$$

в случае выполнения соотношения (3), и $Q\|x_1 - x_2\|_X \leq \|x_1 - x_2\|_X + \|h_1 - h_2\|_X$, т.е.

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq (Q - 1)^{-1} \|h_1 - h_2\|_X \quad (20)$$

в случае выполнения соотношения (4).

Из соотношений (19) и (20) следует, что отображение $\mathcal{D}^{-1}$ является липшицевым.

Таким образом, достаточность и, следовательно, теорема доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение доказанной теоремы сохраняется, если пространство X заменить одним из следующих пространств: $\mathcal{B}$ – пространство почти периодических элементов $x = x(n) \in l_\infty [1]$, $\mathcal{P}_m$ – пространство m -периодических элементов $x = x(n) \in l_\infty$ ($m \in \mathbb{N}$),

$$c_0 = \left\{ x \in l_\infty \mid \lim_{|n| \rightarrow +\infty} \|x(n)\| = 0 \right\}.$$

В случае $X = c_0$ выполнение соотношения (2) является лишним.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
- [2] Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972.
- [3] Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.
- [4] Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. Киев: Вища школа, 1992.
- [5] Coffman S. V., Schäffer J. J. Dichotomies for linear difference equations // Math. Ann. 1967. V. 172. P. 139–166.
- [6] Слюсарчук В. Е. Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. матем. ж. 1983. Т. 35, № 1. С. 109–115.
- [7] Слюсарчук В. Е. Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на Z функций // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 662–666.
- [8] Слюсарчук В. Е. О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем // Укр. матем. ж. 1987. Т. 39, № 2. С. 210–215.
- [9] Слюсарчук В. Е. Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. матем. ж. 1987. Т. 39, № 5. С. 660–662.
- [10] Баскаков А. Г. Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 3. С. 282–284.
- [11] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

Ровенский государственный технический университет

Поступило

01.06.1999

Исправленный вариант

21.03.2000