Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Соболев, О бирациональной жесткости одной серии многомерных Фано-расслоений, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 455–460

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:03:44

УДК 512.6

О БИРАЦИОНАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ОДНОЙ СЕРИИ МНОГОМЕРНЫХ ФАНО-РАССЛОЕНИЙ

И. В. Соболев

В работе доказана бирациональная жесткость алгебраических многообразий с пучком гиперповерхностей степени M в $\mathbb{P}^M$, которые имеют степень 2 по базе.
Библиография: 9 названий.

1. Введение. Одним из наиболее мощных методов современной бирациональной геометрии является метод максимальных особенностей, созданный В. А. Исковских и Ю. И. Маниным (см. [1]). В своей первоначальной форме он, однако, имел довольно узкую область применения. Недавние технические усовершенствования, введенные А. В. Пухликовым, позволили существенно расширить ее, в частности, стало возможным описание бирациональных автоморфизмов многообразий произвольной размерности.

В работах [2]–[4] установлена бирациональная жесткость некоторых классов Фано-расслоений, удовлетворяющих так называемому K^2 -условию. Для определения границ применимости метода максимальных особенностей полезно рассматривать примеры многообразий, для которых это условие не выполнено. Один из них разбирается в [5]. В настоящей работе исследуется другой пример подобного рода.

Пусть V_m – гиперповерхность в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$, определенная уравнением

$$p_{m,M}(u, v; x_0, \dots, x_M) = 0,$$

где p имеет степень m по u, v и степень M по $x_0, \dots, x_M$. Очевидным образом определена проекция $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, слоем которой является гиперповерхность степени M в $\mathbb{P}^M$. Всюду в дальнейшем F будет обозначать слой π .

В [2], [3] доказано, что при $m \geq 3$ и $M \geq 4$ общее V_m бирационально сверхжестко и обладает единственной структурой Фано-расслоения. С другой стороны, V_1 рационально при всех M . Вопрос о рациональности многообразия $V = V_2$ в этих работах оставлен открытым.

Многообразие V имеет вторую структуру Фано-расслоения. Действительно, пусть $\sigma: V \rightarrow \mathbb{P}^M$ – проекция на второй множитель. Тогда отображение $\tau: V \dashrightarrow V$, которое переставляет точки в слоях σ , определено вне подмножества коразмерности 2 и является бирациональной инволюцией. Вторая структура получается действием τ на первую.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01132, и фонда поддержки научных школ, грант № 96-15-96146.

ГИПОТЕЗА 1. При $M \geq 4$ и общем V группа $\text{Bir } V$ состоит из двух элементов и порождается τ ; на V имеется только две структуры расслоения на рационально связанные многообразия.

ГИПОТЕЗА 2. При $M = 3$ $\text{Bir } V$ свободно порождается τ и группой $\text{Bir } F_\eta$, где F_η – слой π над общей точкой $\mathbb{P}^1$. Любой пучок рациональных поверхностей на V бирациональными преобразованиями можно перевести в $|F|$.

Гипотеза 2 косвенно подтверждается результатами Барделли [6].

2. Формулировка результата. Прежде чем сформулировать наш основной результат, напомним основные понятия метода максимальных особенностей.

Порогом канонического присоединения линейной системы D на Фано-расслоении $\rho: V \rightarrow S$ называется число

$$c(D, W) = \sup \left\{ \frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z}_+, |aD + bK_V| \neq \emptyset \right\}.$$

Фано-расслоение $\rho: V \rightarrow S$ называется *бирационально жестким*, если для любого Фано-расслоения $\rho': V' \rightarrow S'$, $\dim V' = \dim V$, бирационального отображения $\chi: V \dashrightarrow V'$ и линейной системы $|D'|$ на V' , свободной в коразмерности 1, существует бирациональный автоморфизм χ' многообразия V такой, что $c(D, V) \leq c(D', V')$, где $|D| = (\chi \circ \chi')^{-1}|D'|$.

Докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Если многообразие V удовлетворяет условиям сильной регулярности, приведенным ниже, то оно бирационально жестко при $M \geq 6$. Группа $\text{Bir } V$ для общего V изоморфна $\mathbb{Z}_2$ и порождается τ .

Следствия.

- 1) V обладает лишь двумя структурами Фано-расслоения.
- 2) Многообразие V не рационально.

Перейдем к нужным нам условиям общности.

Рассмотрим гиперповерхность W степени M в $\mathbb{P}^M$. Пусть p – произвольная точка W и в аффинной системе координат с центром в p уравнение W записывается в виде $q_1 + q_2 + \dots + q_M = 0$, q_i – однородный многочлен степени i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкую точку $p \in W$ назовем *сильно регулярной*, если последовательность $(q_1, \dots, q_{M-1})$ регулярна и, кроме того, уравнения $q_2 = \dots = q_M = 0$ определяют в проективном пространстве $\mathbb{P}^{M-1}$ конечное множество точек, причем сумма кратностей всех точек, лежащих в гиперплоскости $q_1 = 0$, не превосходит M .

Будем говорить, что Фано-расслоение V *сильно регулярно*, если каждая гладкая точка любого слоя проекции π сильно регулярна, а каждая особая – регулярна в смысле работы [3]. С помощью счета констант можно показать, что общее V является сильно регулярным (см. [3], [7]).

3. Максимальные особенности. Пусть теперь $\chi: V \dashrightarrow (W, D')$ – бирациональное отображение, $|\chi| = D = \chi^{-1}(D')$, $D = -nK_V + lF$. Предположим, что $l < 0$. Легко видеть, что τ действует на $\text{Pic } V$ следующим образом:

$$\tau^* K_V = K_V, \quad \tau^* F = \sigma^{-1}(\sigma(F)) - F = MK_V - F,$$

т. е. $(\chi \circ \tau)^{-1}(D') = -nK_V + l(MK_V - F) = -n'K_V + l'F$, где $l' > 0$.

Допустим, что $c(D, V) > c(D', W)$. В силу сказанного выше можно считать, что $l > 0$.

Дискретное нормирование ν поля рациональных функций многообразия V называется *максимальной особенностью*, если выполняется неравенство Нётера–Фано–Исковских $e(\nu) = \nu(|\chi|) - nK(\nu, V) > 0$, где $K(\nu, V)$ – дискрепантность ν по отношению к V .

Так же, как в [2], [3], доказывается, что если $c(D, V) > c(D', W)$, то центры всех максимальных особенностей лежат в слоях π и существует конечное множество максимальных особенностей $\mathcal{M}$ таких, что выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \max_{\{\nu \in \mathcal{M} \mid \text{centre}(\nu) \subset F_t\}} \left(\frac{e(\nu)}{\nu(F_t)} \right) > l,$$

где $F_t = \pi^{-1}(t)$.

ЛЕММА 1. Пусть g – гиперплоское сечение F . Тогда если цикл $NK_V^2 - rg$ эффeктивен, то $r < 2N/M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L_V – ограничение тавтологического пучка $L \in \text{Pic } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$ на V . Так как линейная система $|L_V|$ свободна, то $(NK_V^2 - rg)L_V^{M-2} > 0$, если $NK_V^2 - rg$ эффeктивен. Имеем

$$K_V = -L_V, \quad (NK_V^2 - rg)L_V^{M-2} = NL_V^M - rL_V^{M-1}F = 2N - rM > 0,$$

т. е. $r < 2N/M$.

Пусть $D_i \in |D|$ – общие дивизоры и $Z = (D_1 \circ D_2)$, $Z = Z^v + Z^h$, где Z^h покрывает базу, а компоненты Z^v лежат в слоях;

$$Z = Z^h + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v, \quad \text{supp } Z_t^v \subset F_t,$$

$$Z = (D_1 \circ D_2) \equiv n^2 K_V^2 - 2nl K_V F = n^2 K_V^2 + 2nl g.$$

Так как $Z - \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v$ эффeктивен, то $\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v - 2nlM < 2n^2$ или

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v < 2n^2 + 2Mn \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \max_{\{\nu \in \mathcal{M} \mid \text{centre}(\nu) \subset F_t\}} \left(\frac{e(\nu)}{\nu(F_t)} \right).$$

Отсюда существует максимальная особенность $\nu \in \mathcal{M}$ такая, что $\text{centre}(\nu) \subset F = F_t$ и

$$\nu(F) \deg Z_t^v < 2n^2 \nu(F) + 2Mne(\nu).$$

Приходим к противоречию существования такой максимальной особенности.

4. Оценки кратностей. Пусть $\varphi_{i,i-1}: V_i \rightarrow V_{i-1}$, $i = 1, \dots, K$, – разрешение дискретного нормирования ν (подробности см. в [7], [8]), где $\varphi_{i,i-1}$ – раздутие с центром $B_{i-1} \subset V_{i-1}$ и исключительным дивизором $E_i \subset V_i$, причем первые $L \leq K$ раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности > 3 , а первые $N \leq L$ – циклам $B_{i-1} \subset F^{i-1}$ (верхний индекс обозначает собственный прообраз относительно соответствующего раздутия). На множестве индексов $\{1, \dots, K\}$ введем структуру ориентированного графа: j и i соединяются стрелкой, если $j > i$ и $B_{j-1} \subset E_i^{j-1}$. Пусть p_i – число путей в этом графе, ведущих из вершины K в вершину i . Обозначим

$$\Sigma_l = \sum_{i=1}^L p_i, \quad \Sigma_u = \sum_{i=L+1}^K p_i, \quad \Sigma_f = \sum_{i=1}^N p_i, \quad d_h = \deg Z^h, \quad d_v = \deg Z^v,$$

$$m_i^h = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^h)^{i-1}, \quad m_i^v = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^v)^{i-1}, \quad m_i^h \leq m_1^h = m^h, \quad m_i^v \leq m_1^v = m^v.$$

В следующих двух леммах мы используем элементарную теорию пересечений (см., например, [9]).

ЛЕММА 2. Пусть $p \in F$ – сильно регулярная гладкая точка и $Z \subset F$ – эффективный цикл коразмерности 2. Тогда при $M \geq 6$ верно неравенство

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z} \leq \frac{3}{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_p F$ – касательная гиперплоскость к F в p .

Рассмотрим два случая.

1) Z не содержится в $T_p F \cap F = T$. Тогда $(Z \circ T)$ – эффективный цикл коразмерности 3 на F и по доказанному в [7]

$$\frac{5}{2M} \geq \frac{1}{2} \frac{\text{mult}_p(Z \circ T)}{\deg(Z \circ T)} \geq \frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z}.$$

2) $Z \subset T$. В этом случае мы рассуждаем, как в лемме 6 из [3].

Пусть Q – квадратичный касательный конус к T в точке p и $S = Q \cap T$. Для того чтобы получить нужное неравенство, нужно показать, что S замещается семейством кривых C_t , общий член которого неприводим и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_p C_t}{\deg C_t} > \frac{2}{3}.$$

Рассмотрим линейные системы $\Lambda_k = |kH - (k+1)E|$, $k = 2, \dots, M-1$, где H – гиперплоское сечение T , а E – исключительный дивизор раздутия точки p . Так как p – сильно регулярная особая точка, то $\text{codim}_T Bs\Lambda_k \geq k-1$; следовательно, для общих дивизоров $D_k \in \Lambda_k$ семейство одномерных циклов

$$C^* = (S \circ D_4 \circ \dots \circ D_{M-1})$$

состоит из эффективных кривых. Общий член семейства C^* не обязательно неприводим, потому что C^* может содержать прямые, проходящие через p , среди которых могут быть и кратные. Выбросив эти прямые, получим семейство C , все кривые которого удовлетворяют неравенству

$$\frac{\text{mult}_p C}{\deg C} \geq \frac{M!/4 - \gamma_1}{M!/3 - \gamma_2},$$

где

$$0 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 \leq M,$$

так как выполнено условие сильной регулярности, т.е. неравенство

$$\frac{\text{mult}_p C}{\deg C} > \frac{2}{3}$$

выполняется при $M \geq 6$.

ЛЕММА 3. Если p – регулярная особая точка F , Z – эффективный цикл коразмерности 2 на V , не содержащийся в F , то

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z} \leq \frac{2}{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По доказанному в [3] имеем

$$\frac{4}{M} \geq \frac{\text{mult}_p(Z \circ F)}{\deg(Z \circ F)} \geq 2 \frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z}.$$

ЛЕММА 4. Для любого простого дивизора Y и неособой точки $p \in F$ верно неравенство

$$\frac{\text{mult}_p Y}{\deg Y} \leq \frac{2}{M}.$$

ЛЕММА 5. Если p – особая точка F , Y – дивизор на F , то

$$\frac{\text{mult}_p Y}{\deg Y} \leq \frac{3}{M}.$$

ЛЕММА 6. Пусть p – особая точка F , Y – дивизор на F , $\tilde{Y}$ – его собственный прообраз при раздутии точки p , x – точка исключительного дивизора раздутия. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\text{mult}_x \tilde{Y}}{\deg Y} \leq \frac{2}{M}.$$

Доказательство лемм 4–6 см. в [3].

5. Исключение максимальной особенности. Так же, как в [2], мы получаем квадратичное неравенство

$$(\Sigma_l + \Sigma_u) \left(\sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v \right) \geq (2\Sigma_l + \Sigma_u)^2 n^2 + 2(2\Sigma_l + \Sigma_u)ne + e^2.$$

Рассмотрим два случая.

1) Общая точка цикла $B_0 = \text{centre}(\nu)$ неособа на F . Тогда при $M \geq 6$

$$\begin{aligned} m^h &\leq \frac{3}{M}d_h = 3n^2, & m^v &\leq \frac{2}{M}d_v, \\ d_v &\leq 2n^2 + 2Mn \frac{e(\nu)}{\nu(F)} \leq 2n^2 + \frac{2Mne}{\Sigma_f}, \\ \sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v &\leq m^h \Sigma_l + m^v \Sigma_f \leq 3n^2 \Sigma_l + \frac{4n^2}{M} \Sigma_f + 4ne. \end{aligned}$$

Из квадратичного неравенства имеем

$$n^2(\Sigma_l + \Sigma_u) \left(\frac{4}{M} \Sigma_f - \Sigma_l \right) \geq (n\Sigma_u - e)^2.$$

Так как $\Sigma_f \leq \Sigma_l$, то получаем противоречие.

2) $B_0 = \text{centre}(\nu) = p$ – особая точка F . Положим $\Sigma'_f = 2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i$, $\Sigma'_f \leq 2\Sigma_l$. Имеем

$$\begin{aligned} m^h &\leq \frac{2}{M}d_h = 2n^2, & m_1^v &\leq \frac{3}{M}d_v < \frac{4}{M}d_v, & m_i^v &\leq \frac{2}{M}d_v \quad \text{при } i \geq 2, \\ d_v &\leq 2n^2 + 2Mn \frac{e(\nu)}{\nu(F)} \leq 2n^2 + \frac{2Mne}{\Sigma'_f}, \\ \sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v &\leq m^h \Sigma_l + p_1 m_1^v + \sum_{i=2}^N p_i m_i^v \leq 2n^2 \Sigma_l + \frac{4n^2}{M} \Sigma'_f + 4ne, \\ n^2(\Sigma_l + \Sigma_u) &\left(\frac{4}{M} \Sigma'_f - 2\Sigma_l \right) \geq (n\Sigma_u - e)^2. \end{aligned}$$

Противоречие при $M > 4$. Доказательство основной теоремы закончено.

Автор благодарит А. В. Пухликова за постановку и обсуждение проблемы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
- [2] Пухликов А. В. Бирационально жесткие расслоения Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 3. С. 131–150.
- [3] Pukhlikov A. V. Certain examples of birationally rigid varieties with a pencil of double quadrics. MPI preprint 1998-15.
- [4] Гриненко М. М. Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.
- [5] Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. P. 401–426.
- [6] Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
- [7] Pukhlikov A. V. Essentials of method of maximal singularities. Warwick preprint 31-1996.
- [8] Bardelli F. Polarized mixed Hodge structures: On irrationality of threefolds via degeneration // Ann. Mat. Pura et Appl. 1984. V. 137. P. 287–369.
- [9] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.