Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тельных, Топологическая классификация сверхтранзитивных потоков на замкнутых неориентируемых поверхностях. Часть I. Необходимые условия топологической эквивалентности, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 461–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:12:12

УДК 517.9+513.83

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СВЕРХТРАНЗИТИВНЫХ ПОТОКОВ НА ЗАМКНУТЫХ НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ.

ЧАСТЬ I. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

И. А. Тельных

В статье вводится топологический инвариант для класса сверхтранзитивных потоков на замкнутых неориентируемых поверхностях M отрицательной эйлеровой характеристики. Описываются свойства этого инварианта и устанавливается, что он дает необходимые условия топологической эквивалентности для потоков из вышеуказанного класса сверхтранзитивных потоков.

Библиография: 14 названий.

Введение. В 1973 году С.Х. Арансоном и В.З. Гринесом в [1] были найдены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности одного из основных классов потоков (динамических систем с непрерывным временем) на замкнутых ориентируемых поверхностях M отрицательной эйлеровой характеристики, являющихся естественным обобщением иррациональной обмотки тора и обладающих следующими свойствами: 1) каждый такой поток f^t на M имеет хотя бы одну незамкнутую устойчивую по Пуассону (т.е. самопредельную) полутраекторию, всюду плотную на M ; 2) состояниями равновесия потока f^t являются только топологические седла отрицательного индекса; 3) у потока f^t нет сепаратрис, идущих из седла в то же самое или другое седло. Такие потоки в дальнейшем получили название *сверхтранзитивных*. В частности отсюда следует, что каждый сверхтранзитивный поток f^t имеет непустое конечное множество седел и сепаратрис. Более того, любая полутраектория L потока f^t , не имеющая седло своим предельным множеством, является незамкнутой устойчивой по Пуассону полутраекторией, всюду плотной на M . В [2] Арансоном решены также задачи допустимости и реализации для найденного в [1] полного топологического инварианта – *гомотопического класса вращения*.

Важность изучения таких потоков связана с тем, что, с одной стороны, они являются наиболее простейшими объектами, тесно связанными с топологией и геометрией несущей поверхности, а, с другой стороны, интегральные кривые таких потоков могут

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00230, и фонда INTAS, грант № 97-1843.

служить инвариантными многообразиями каскадов (динамических систем с дискретным временем) таких, например, как каскады, порожденные псевдоаносовскими гомеоморфизмами, введенными У. Тёрстеном, сыгравшими важную роль в гомотопической и топологической классификации гомеоморфизмов на поверхностях.

Точно так же определяются сверхтранзитивные потоки на замкнутых неориентируемых поверхностях M . Исследование сверхтранзитивных потоков на замкнутых неориентируемых поверхностях долгое время оставалось в стороне, что связано со специфическими свойствами фундаментальной группы этих поверхностей по сравнению с замкнутыми ориентируемыми поверхностями, хотя и были получены отдельные результаты в этой области. Так в работе [3] показано, что на замкнутых неориентируемых поверхностях рода три не может быть сверхтранзитивных потоков, а в [4], [5] установлено, что на замкнутых неориентируемых поверхностях рода большего или равного четырем такие потоки существуют. Отметим, что сверхтранзитивные потоки не существуют и на замкнутых неориентируемых поверхностях неотрицательной эйлеровой характеристики, т. е. не могут быть на проективной плоскости и бутылке Клейна. Это следует из того, что множество состояний равновесия каждого сверхтранзитивного потока непусто, а сами же состояния равновесия являются топологическими седлами отрицательного индекса, и, следовательно, эйлерова характеристика несущих замкнутых поверхностей должна быть отрицательной, ибо сумма индексов состояний равновесия равна эйлеровой характеристике. Из тех же соображений имеем, что сверхтранзитивные потоки не могут быть на сфере и торе. На остальных же замкнутых ориентируемых поверхностях сверхтранзитивные потоки существуют и легко получаются либо с помощью операции разветвления над некоторыми точками тора, на котором задана иррациональная обмотка, либо непосредственным построением (по этому поводу отсылаем читателя к монографиям С. Х. Арансона, Е. В. Жужомы, Г. Р. Белицкого [6] и И. В. Николаева, Е. В. Жужомы [7]).

В 1998 году в [8] Арансоном, Жужомой, Тельных анонсированы необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности сверхтранзитивных потоков на замкнутых неориентируемых поверхностях рода большего или равного четырем, а в депонированной работе Арансона и Тельных [9] приведены некоторые аспекты доказательств.

В данной работе построена специальная группа накрытия для замкнутых неориентируемых поверхностей M отрицательной эйлеровой характеристики, введен на M топологический инвариант сверхтранзитивных потоков – орбита гомотопического класса вращения и доказана теорема о необходимых условиях топологической эквивалентности таких потоков.

1. Свойства группы накрытия. Везде далее M – неориентируемая замкнутая поверхность рода $p \geq 4$. Обозначим через $\widehat{M}$ замкнутую ориентируемую поверхность рода $\widehat{p} = p - 1$, являющуюся двулистной накрывающей для M , и через π_1 – проекцию $\widehat{M}$ на M . По теореме об униформизации $\widehat{M}$ можно представить в виде фактор-пространства $\overline{M}/\Gamma$, где $\overline{M}$ – круг $x^2 + y^2 < 1$ комплексной z -плоскости ($z = x + iy$), Γ – дискретная группа преобразований $\overline{M}$, а естественная проекция $\pi_2: \overline{M} \rightarrow \widehat{M}$ является универсальным неразветвленным накрытием для $\widehat{M}$. Окружность $E: x^2 + y^2 = 1$ называется *абсолют*. Поверхность M представляется в виде фактор-пространства $\overline{M}/G$, где G – группа накрытия для M , а накрытие $\pi = \pi_1 \circ \pi_2: \overline{M} \rightarrow M$ является универсальным неразветвленным накрытием, при этом Γ есть подгруппа группы G индекса два.

Введем на $\overline{M}$ метрику постоянной отрицательной кривизны. Тогда геодезические в

этой метрике являются дугами окружностей, ортогональными абсолюту с концевыми точками на E . Эта метрика индуцирует в силу проекций π_2 и π метрику постоянной отрицательной кривизны на $\widehat{M}$ и на M соответственно. Каждое нетождественное преобразование группы Γ является *гиперболическим элементом первого рода*, т.е. имеет вид

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} = 1, \quad |\alpha + \bar{\alpha}| > 2.$$

Здесь черта сверху означает операцию сопряжения комплексных чисел. Каждый гиперболический элемент первого рода сохраняет ориентацию и имеет ровно две неподвижные точки: притягивающую $\sigma^+ \in E$ и отталкивающую $\sigma^- \in E$.

Назовем *каноническим гиперболическим элементом первого рода* преобразование вида

$$\gamma_0(z) = \frac{\alpha_0 z + \bar{\beta}_0}{\beta_0 z + \bar{\alpha}_0}, \quad \alpha_0 = -\frac{1+K}{2\sqrt{K}}, \quad \beta_0 = \frac{1-K}{2\sqrt{K}}, \quad K > 1.$$

Неподвижными точками элемента γ_0 являются притягивающая $\sigma_0^+ = 1$ и отталкивающая $\sigma_0^- = -1$.

Гиперболическим элементом второго рода называется преобразование вида

$$g(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \bar{\beta}}{\beta \bar{z} + \bar{\alpha}}, \quad \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} = 1, \quad \operatorname{Re} \beta \neq 0.$$

Каждый гиперболический элемент второго рода меняет ориентацию и имеет ровно две неподвижные точки: притягивающую $\sigma^+ \in E$ и отталкивающую $\sigma^- \in E$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что g^2 есть гиперболический элемент первого рода.

Каноническим гиперболическим элементом второго рода назовем элемент вида $g_0(z) = \bar{\gamma}_0(z)$, где $\gamma_0(z)$ – канонический гиперболический элемент первого рода. Неподвижными точками элемента g_0 являются притягивающая точка $\sigma_0^+ = 1$ и отталкивающая точка $\sigma_0^- = -1$, при этом $g_0^2 = \gamma_0^2 \in G$. В частности, гиперболическим элементом второго рода является любой элемент вида $\gamma g_0 \gamma^{-1}$, где $g_0 \in G$ – канонический гиперболический элемент второго рода, $\gamma \in \Gamma$.

Элементы фуксовой группы, переводящие круг $\overline{M} = \{z \mid |z| < 1\}$ в себя и оставляющие инвариантной окружность $|z| = 1$, помимо гиперболических элементов первого и второго родов могут быть следующими: эллиптические элементы первого рода, эллиптические элементы второго рода, параболические элементы. Для полноты картины дадим их определения.

Эллиптическим элементом первого рода называется элемент вида

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} = 1, \quad |\alpha + \bar{\alpha}| < 2.$$

Элемент γ сохраняет ориентацию абсолюта E и имеет на z -плоскости ровно две неподвижные точки ξ, η , из которых одна точка, например ξ , лежит внутри E , а другая точка η лежит вне E . Эллиптический элемент первого рода γ имеет период k , если $\gamma \neq \operatorname{id}, \dots, \gamma^{k-1} \neq \operatorname{id}, \gamma^k = \operatorname{id} (k > 1)$.

Эллиптическим элементом второго рода называется элемент g , порождаемый преобразованием вида

$$g(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} = 1, \quad \operatorname{Re} \beta = 0.$$

Непосредственная проверка показывает, что $g^2(z) \equiv z$, т.е. $g^2 = \text{id}$. Эллиптический элемент второго рода g меняет ориентацию абсолюта E и, следовательно, имеет на E ровно две неподвижные точки, скажем ξ, η . Кроме этого, g имеет геодезическую L из неподвижных точек, идеальные концевые точки которой совпадают с ξ и η .

Параболическим элементом называется элемент g , порождаемый преобразованием $g(z)$ вида

$$g(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} = 1, \quad |\alpha + \bar{\alpha}| = 2.$$

Такой элемент g , $g \neq \text{id}$, сохраняет ориентацию абсолюта E и имеет ровно одну неподвижную точку ξ , принадлежащую E .

Поскольку M – замкнутая поверхность, то она не имеет проколов и границы. Поэтому в группе накрытия G нет параболических элементов и эллиптических элементов второго рода. Кроме того, поскольку $\bar{M}$ – неразветвленная универсальная накрывающая для M , в G нет эллиптических элементов первого рода. Поэтому в группе G могут быть лишь элементы двух типов: гиперболические элементы первого и второго родов. Следующая лемма уточняет структуру группы G .

ЛЕММА 1.1. *Для любого канонического гиперболического элемента g_0 второго рода существуют на $\bar{M}$ группа накрытия G замкнутой неориентируемой поверхности M рода $p \geq 4$ и группа накрытия Γ замкнутой ориентируемой поверхности $\bar{M}$ рода $\hat{p} = p - 1$, являющейся для M двулистной неразветвленной накрывающей, такие, что:*

- 1) Γ является нормальным делителем группы G индекса два, $\mathbb{Z}_2 = G/\Gamma$;
- 2) группа G представима в виде

$$G = \Gamma \cup g_0 \Gamma, \quad \Gamma \cap g_0 \Gamma = \emptyset; \quad (1)$$

- 3) любой элемент $g_0 \gamma$, $\gamma \in \Gamma$, является гиперболическим элементом второго рода и $(g_0 \gamma)^2 \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, для определенности, замкнутые неориентируемые поверхности M рода $p = 4$ и $p = 5$. Для замкнутых неориентируемых поверхностей рода $p > 5$ построения полностью аналогичны. Начнем с M рода $p = 4$. Построим на $\bar{M}$ фундаментальный многоугольник Φ для M со сторонами a, b, c, α, β и определяющим соотношением

$$a^2 c \beta \alpha \beta^{-1} \alpha^{-1} b^{-2} c^{-1} = 1,$$

где $\beta \alpha \beta^{-1} \alpha^{-1}$ – ручка 1-го рода. Пусть $\widehat{M}$ – замкнутая ориентируемая поверхность рода $\hat{p} = p - 1 = 3$, являющаяся для M двулистной неразветвленной накрывающей. Возьмем $g_0: a \rightarrow a$ – канонический гиперболический элемент второго рода. Тогда $\widehat{\Phi} = \Phi \cup g_0(\Phi)$ – фундаментальный многоугольник для $\widehat{M}$ со сторонами $a, b, c, \alpha, \beta, c_1, \alpha_1, \beta_1$ и определяющим соотношением

$$a c_1 b^2 \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} c_1^{-1} a^{-1} c \beta \alpha \beta^{-1} \alpha^{-1} b^{-2} c^{-1} = 1,$$

где $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1}$, $\beta \alpha \beta^{-1} \alpha^{-1}$ – ручки первого рода.

В качестве образующих группы G возьмем следующие элементы: $g_0: a \rightarrow a$ – канонический гиперболический элемент второго рода, $g_1: b \rightarrow b$ – гиперболический элемент

второго рода, $\gamma_1: c \rightarrow c$, $\gamma_2: \alpha \rightarrow \alpha$, $\gamma_3: \beta \rightarrow \beta$ – гиперболические элементы первого рода.

В качестве образующих группы Γ возьмем следующие элементы: $g_0^2: a \rightarrow a$, $\gamma_0: b^2 \rightarrow b^2$, $\gamma_1: c \rightarrow c$, $\gamma_2: \alpha \rightarrow \alpha$, $\gamma_3: \beta \rightarrow \beta$, $\hat{\gamma}_1: c_1 \rightarrow c_1$ ($\hat{\gamma}_1 = g_0\gamma_1g_0^{-1}$), $\hat{\gamma}_2: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1$ ($\hat{\gamma}_2 = g_0\gamma_2g_0^{-1}$), $\hat{\gamma}_3: \beta_1 \rightarrow \beta_1$ ($\hat{\gamma}_3 = g_0\gamma_3g_0^{-1}$). Пусть теперь M – замкнутая неориентируемая поверхность рода $p = 5$, $\bar{M}$ – замкнутая ориентируемая поверхность рода $\bar{p} = p - 1 = 4$, являющаяся для M двулистной неразветвленной накрывающей, $\bar{M}$ – неразветвленная универсальная накрывающая для M и $\bar{M}$.

Построим на $\bar{M}$ фундаментальный многоугольник Φ для M со сторонами $a, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ и определяющим соотношением $a^2\beta_2\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2^{-1}\beta_1\alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1} = 1$ и фундаментальный многоугольник $\hat{\Phi} = \Phi \cup g_0(\Phi)$ для $\bar{M}$ со сторонами $a, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2$ и определяющим соотношением

$$a\alpha'_1\beta'_1\alpha'_1^{-1}\beta'_1^{-1}\alpha'_2\beta'_2\alpha'_2^{-1}\beta'_2^{-1}a^{-1}\beta_2\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2^{-1}\beta_1\alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1} = 1,$$

где $g_0 \in G$ – канонический гиперболический элемент второго рода.

В качестве образующих группы G выберем следующие элементы: $g_0: a \rightarrow a$ – канонический гиперболический элемент второго рода, $\gamma_1: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1$, $\gamma_2: \beta_1 \rightarrow \beta_1$, $\gamma_3: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2$, $\gamma_4: \beta_2 \rightarrow \beta_2$ – гиперболические элементы первого рода. В качестве образующих элементов группы Γ выберем следующие элементы: $g_0^2: a \rightarrow a$, $\gamma_1: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1$, $\gamma_2: \beta_1 \rightarrow \beta_1$, $\gamma_3: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2$, $\gamma_4: \beta_2 \rightarrow \beta_2$, $\hat{\gamma}_1: \alpha'_1 \rightarrow \alpha'_1$ ($\hat{\gamma}_1 = g_0\gamma_1g_0^{-1}$), $\hat{\gamma}_2: \beta'_1 \rightarrow \beta'_1$ ($\hat{\gamma}_2 = g_0\gamma_2g_0^{-1}$), $\hat{\gamma}_3: \alpha'_2 \rightarrow \alpha'_2$ ($\hat{\gamma}_3 = g_0\gamma_3g_0^{-1}$), $\hat{\gamma}_4: \beta'_2 \rightarrow \beta'_2$ ($\hat{\gamma}_4 = g_0\gamma_4g_0^{-1}$).

Из конструкции фундаментальных многоугольников Φ для M и $\hat{\Phi} = \Phi \cup g_0(\Phi)$ для $\bar{M}$ получаем, что если в $\hat{\Phi}$ заданы две любые точки a, a' , конгруэнтные в силу G , но неконгруэнтные в силу Γ , то $a' = g_0^\sigma(a)$, где $\sigma = \pm 1$. Отсюда получаем, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ и любого $\sigma = \pm 1$ существует элемент $\gamma' \in \Gamma$ такой, что $g_0^\sigma\gamma = \gamma'g_0^\sigma$. Покажем, что если элемент $g \in G \setminus \Gamma$, то существует элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $g = g_0\gamma$. Пусть элемент $g \in G \setminus \Gamma$. Зафиксируем любую точку $a \in \bar{M}$ и обозначим через a' точку на $\bar{M}$ такую, что $a' = g(a)$. Так как $\hat{\Phi}$ есть фундаментальный многоугольник для $\bar{M}$, существуют элементы $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ такие, что $\gamma_1(a), \gamma_2(a) \in \hat{\Phi}$. Поскольку $g \in G \setminus \Gamma$, найдется элемент $\tilde{g}_0$ такой, что $\tilde{g}_0 = \gamma_2g\gamma_1^{-1}: \gamma_1(a) \rightarrow \gamma_2(a')$. Так как $g \in G \setminus \Gamma$, $\gamma_1^{-1}, \gamma_2 \in \Gamma$, то точки $\gamma_1(a), \gamma_2(a')$, принадлежащие $\hat{\Phi}$, конгруэнтны в силу G , но неконгруэнтны в силу Γ ($\tilde{g}_0 \notin \Gamma$, иначе если $\tilde{g}_0 \in \Gamma$, то $g = \gamma_2^{-1}\tilde{g}_0\gamma_1 \in \Gamma$, что невозможно), и, следовательно, согласно конструкции многоугольника $\hat{\Phi} = \Phi \cup g_0(\Phi)$ получаем, что $\tilde{g}_0 = g_0^\sigma$, где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Но тогда $g_0^\sigma = \gamma_2g\gamma_1^{-1}$, т.е. $g = \gamma_2^{-1}g_0^\sigma\gamma_1$.

В силу выше сказанного по элементу $\gamma_2^{-1} \in \Gamma$ находим элемент $\gamma_3 \in \Gamma$ такой, что $\gamma_2^{-1}g_0^\sigma = g_0^\sigma\gamma_3$, поэтому $g = \gamma_2^{-1}g_0^\sigma\gamma_1 = g_0^\sigma\gamma_3\gamma_1 = g_0^\sigma\gamma_4$, где $\gamma_4 = \gamma_3\gamma_1 \in \Gamma$.

Обозначим через γ элемент группы G такой, что $g_0^\sigma\gamma_4 = g_0\gamma$, откуда $\gamma = g_0^{-1}g_0^\sigma\gamma_4$. Покажем, что $\gamma \in \Gamma$. Действительно, если $\sigma = 1$, то $\gamma = g_0^{-1}g_0\gamma_4 = \gamma_4 \in \Gamma$. Если же $\sigma = -1$, то $\gamma = g_0^{-2}\gamma_4$. В силу конструкции многоугольника $\hat{\Phi} = \Phi \cup g_0(\Phi)$ имеем, что $g_0^{2\sigma} \in \Gamma$, $\sigma = \pm 1$, т.е. $g_0^{-2} \in \Gamma$, откуда, используя, что $\gamma_4 \in \Gamma$, получаем $\gamma = g_0^{-2}\gamma_4 \in \Gamma$.

Итак, искомый элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $g = g_0\gamma$ ($g \in G \setminus \Gamma$) равен γ_4 , если $\sigma = 1$, и равен $g_0^{-2}\gamma_4$, если $\sigma = -1$. Поэтому $\mathbb{Z}_2 = G/\Gamma = \{\gamma\} \cup \{g_0\gamma\}$, где $\gamma \in \Gamma$, $g_0\gamma \in G \setminus \Gamma$, при этом поскольку γ сохраняет ориентацию абсолюта, а $g_0\gamma$ меняет ориентацию абсолюта, то $\{\gamma\} \cap \{g_0\gamma\} = \emptyset$.

Здесь через $\mathbb{Z}_2$ обозначена группа вычетов по модулю два и через $\{\cdot\}$ – смежный класс.

Поскольку согласно формуле (1) Γ есть нормальный делитель группы G , то $(g_0\gamma)^2 \in \Gamma$, ибо $\mathbb{Z}_2 = G/\Gamma$.

Покажем теперь, что $g_0\gamma$ является гиперболическим элементом второго рода. Предположим противное, т.е. $g_0\gamma$ не является гиперболическим элементом второго рода. Поскольку $g_0\gamma$ меняет ориентацию абсолюта, то в силу того, что элементы фуксовой группы, меняющие ориентацию абсолюта, могут быть лишь либо эллиптическими элементами второго рода, либо параболическими элементами, причем, как было указано выше, для замкнутой поверхности M в группе накрытия G нет, кроме элемента id , других параболических элементов и $g_0\gamma \neq \text{id}$, то $g_0\gamma$ должен быть эллиптическим элементом второго рода. Обозначим через

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad g_0(z) = \frac{\bar{\alpha}_0 \bar{z} + \beta_0}{\bar{\beta}_0 \bar{z} + \alpha_0} = \frac{\lambda \bar{z} + 1}{\bar{z} + \lambda}, \quad |\operatorname{Re} \alpha| > 1, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1,$$

$$\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = -\frac{1+K}{2\sqrt{K}}, \quad \beta_0 = \bar{\beta}_0 = \frac{1-K}{2\sqrt{K}}, \quad K > 1, \quad \lambda = \frac{K+1}{K-1} > 1.$$

Поскольку по предположению $g_0\gamma$ эллиптический элемент второго рода, то

$$g_0\gamma(z) = \frac{A\bar{z} + \bar{B}}{B\bar{z} + \bar{A}}, \quad \operatorname{Re} B = 0, \quad |A|^2 - |B|^2 = 1$$

и, следовательно, выражая $\operatorname{Re} B = 0$ через α, β, λ , получаем, что $\operatorname{Re} \alpha = -\lambda \operatorname{Re} \beta$.

Эллиптический элемент второго рода имеет в $\bar{M}$ линию L из неподвижных точек, являющуюся либо дугой окружности, ортогональной абсолюту, либо отрезком прямой, проходящей через начало координат, и поскольку он меняет ориентацию абсолюта, он меняет и ориентацию неразветвленной универсальной накрывающей $\bar{M}$ для M .

Поскольку $g_0\gamma(z): \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ гомеоморфизм, то какую бы точку $a \in L$ ни взять, в сколь угодно малой окрестности этой точки по обе стороны от L существуют конгруэнтные в силу эллиптического элемента второго рода $g_0\gamma$ точки, поэтому линия L не может иметь точек, лежащих внутри любого из многоугольников $g(\Phi)$, где $g \in G$, Φ — фундаментальный многоугольник для M , иначе группа G не является дискретной.

Но тогда линия L должна иметь дугу $[\alpha', \beta']$, являющуюся общей стороной двух многоугольников $g_1(\Phi), g_2(\Phi)$ (g_1, g_2 — какие-то элементы группы G). Поскольку $M = \bar{M}/G$ и дуга $[\alpha', \beta']$ состоит из неподвижных точек элемента $g_0\gamma \in G$, меняющего ориентацию универсальной накрывающей $\bar{M}$, то M имеет компоненту края $\mu = \pi([\alpha', \beta'])$, что невозможно, поскольку M является замкнутой поверхностью. Поэтому $g_0\gamma$ является гиперболическим элементом второго рода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 1.1 следует, что если элемент $\gamma \in G$ является гиперболическим элементом первого рода и он порождается преобразованием

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1, \quad |\alpha + \bar{\alpha}| > 2,$$

то α, β удовлетворяют следующему арифметическому условию:

$$\operatorname{Re} \alpha \neq -\lambda \operatorname{Re} \beta, \quad \text{где } \lambda = \frac{K+1}{K-1} > 1,$$

K ($K > 1$) – параметр, с помощью которого определяется каноническое гиперболическое преобразование второго рода $g_0(z) = (\lambda\bar{z} + 1)/(\bar{z} + \lambda)$ такое, что канонический гиперболический элемент второго рода g_0 , соответствующий $g_0(z)$, входит в систему образующих группы G . Если система образующих группы G выбрана в соответствии с конструкцией, указанной в доказательстве леммы 1.1, то $g_0 \in G$ является единственным каноническим гиперболическим элементом второго рода, входящим в систему образующих группы G (среди образующих группы G могут быть другие гиперболические элементы второго рода, но они не являются каноническими гиперболическими элементами второго рода).

Рациональными точками (относительно группы G) называются неподвижные точки неединичных элементов группы G , принадлежащие абсолюту. Остальные точки абсолюта назовем *иррациональными точками*.

Множество рациональных точек абсолюта обозначим через $R(E)$, а иррациональных точек через $I(E)$. Из леммы 1.1 следует, что ось элемента группы G , т.е. дуга окружности, ортогональная абсолюту и инвариантная относительно действия этого элемента группы G (осями элементов группы G могут быть также отрезки прямых, проходящих через начало координат и имеющих концевые точки, принадлежащие абсолюту), является одновременно осью некоторого элемента группы Γ . Поэтому множество рациональных точек абсолюта относительно группы G совпадает с множеством рациональных точек абсолюта относительно группы Γ . Аналогичное свойство выполняется и для иррациональных точек абсолюта. Определение рациональных и иррациональных точек абсолюта относительно группы Γ дано в [1]. Но тогда в силу [10], [11] получаем, что $R(E)$ является счетным всюду плотным на E множеством и, следовательно, $I(E)$ имеет мощность континуума и также всюду плотно на абсолюте.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\tau: G \rightarrow G$ автоморфизм. Тогда τ единственным образом продолжается до гомеоморфизма $\tau^*: E \rightarrow E$, переводящего множество рациональных точек в множество рациональных точек, а множество иррациональных точек в множество иррациональных точек.

Поскольку в силу леммы 1.1 Γ является нормальным делителем группы G и $\mathbb{Z}_2 = G/\Gamma = \{\gamma\} \cup \{g_0\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$, то τ индуцирует автоморфизм $\tau|_\Gamma$ группы Γ . Согласно [10], [11] $\tau|_\Gamma$ единственным образом индуцирует гомеоморфизм $\tau^*: E \rightarrow E$, переводящий множество рациональных (иррациональных) точек абсолюта относительно группы Γ в множество рациональных (соответственно иррациональных) точек абсолюта относительно группы Γ .

Поскольку множество рациональных (иррациональных) точек абсолюта относительно группы Γ совпадает с множеством рациональных (иррациональных) точек абсолюта относительно группы G , то τ^* переводит $R(E)$ в $R(E)$ и $I(E)$ в $I(E)$. Поэтому τ^* является одновременно продолжением на абсолют автоморфизма $\tau: G \rightarrow G$.

Пусть $f: M \rightarrow M$ гомеоморфизм. Поскольку $\pi: \bar{M} \rightarrow M$ универсальное неразветвленное накрытие, f поднимается (неединственным образом) до гомеоморфизма $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$, инвариантного относительно группы G . Если $\bar{f}$ зафиксирован, то все другие поднятия $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ гомеоморфизма f имеют в этом случае вид $\bar{f} = g\bar{f}$, где g любые элементы группы G . Если $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ известно, то $\bar{f}$ индуцирует автоморфизм $\tau: G \rightarrow G$ по правилу $\tau(g) = \bar{f}g\bar{f}^{-1}$, $g \in G$. Справедливо и обратное утверждение.

ЛЕММА 1.3. Пусть $\tau: G \rightarrow G$ автоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм

$\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$, инвариантный относительно группы G , такой, что он индуцирован автоморфизмом τ и $\tau(g) = \bar{f}g\bar{f}^{-1}$ для любого $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этой леммы имеется в [12].

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждения лемм 1.1–1.3 справедливы также для неориентируемых поверхностей рода $p = 3$.

2. Орбита гомотопического класса вращения и ее свойства. Пусть f^t сверхтранзитивный поток на M . В силу [13] на $\bar{M}$ существует сверхтранзитивный поток $\hat{f}^t$, накрывающий поток f^t , при этом образом каждой незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории потока $\hat{f}^t$ на $\bar{M}$ при отображении $\pi_1: \bar{M} \rightarrow M$ является незамкнутая устойчивая по Пуассону траектория потока f^t на M , а прообразом незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории потока f^t на M являются две незамкнутые устойчивые по Пуассону траектории потока $\hat{f}^t$ на $\bar{M}$.

Сверхтранзитивный поток $\hat{f}^t$ на $\bar{M}$ с помощью отображения $\pi_2: \bar{M} \rightarrow \widehat{M}$ индуцирует на $\bar{M}$ поток $\bar{f}^t$, накрывающий поток $\hat{f}^t$, и согласно [1] поток $\bar{f}^t$ обладает следующими свойствами:

- 1) состояниями равновесия потока $\bar{f}^t$ являются топологические седла отрицательного индекса и их счетное множество;
- 2) у потока $\bar{f}^t$ нет сепаратрис, идущих из седла в то же самое седло или в другое седло;
- 3) любая полутраектория l потока $\bar{f}^t$, не имеющая своим предельным множеством топологическое седло, покидает компактную часть универсальной накрывающей $\bar{M}$ и стремится при $t \rightarrow +\infty$, если l является положительной полутраекторией, либо при $t \rightarrow -\infty$, если l является отрицательной полутраекторией, к ровно одной точке абсолюта $\sigma(l)$ и при этом $\sigma(l)$ является иррациональной точкой абсолюта;
- 4) две различные полутраектории l_1, l_2 такие, что $l_1 \cap l_2 = \emptyset$, потока $\bar{f}^t$, покидающие компактную часть универсальной накрывающей $\bar{M}$, стремятся к разным иррациональным точкам $\sigma(l_1), \sigma(l_2)$ абсолюта.

Поскольку сверхтранзитивный поток $\hat{f}^t$ на $\bar{M}$ накрывает сверхтранзитивный поток f^t на M , а поток $\bar{f}^t$ на $\bar{M}$ накрывает сверхтранзитивный поток $\hat{f}^t$ на $\bar{M}$, то $\bar{f}^t$ накрывает с помощью отображения $\pi = \pi_1\pi_2: \bar{M} \rightarrow M$ поток f^t . Поэтому вышеуказанные свойства 1)–4), присущие потоку $\bar{f}^t$ на $\bar{M}$, являются свойствами, которыми обладает поток f^t на M при его поднятии с помощью отображения π на универсальную накрывающую $\bar{M}$.

Пусть L любая полутраектория потока f^t на $M = \bar{M}/G$ и l полутраектория потока $\bar{f}^t$ на $\bar{M}$ такая, что $L = \pi(l)$. Обозначим через $\sigma(l)$ множество всех предельных точек полутраектории l , принадлежащих абсолюту E . По аналогии с [1] дадим следующее определение.

Гомотопическим классом вращения полутраектории L потока f^t на M называется множество

$$\mu(L) = \bigcup_{g \in G} g(\sigma(l)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно вышесказанному из-за того, что f^t сверхтранзитивный поток на M , получаем, что в случае, когда L имеет своим предельным множеством топологическое седло потока f^t на M , $\mu(L) = \emptyset$, а если L не имеет своим предельным

множеством топологическое седло, то $\sigma(l)$ является ровно одной иррациональной точкой абсолюта и гомотопический класс вращения $\mu(L)$ есть орбита действия группы G на $\sigma(l)$, состоящая из счетного всюду плотного на E подмножества иррациональных точек множества иррациональных точек $I(E)$.

Обозначим через H множество всех автоморфизмов группы G (таких автоморфизмов счетное множество) и через H^* множество всех гомеоморфизмов абсолюта, индуцированных автоморфизмами H группы G . Таких гомеоморфизмов абсолюта счетное множество, поскольку согласно лемме 1.2 каждый автоморфизм $\tau \in H$ единственным образом продолжается на абсолют гомеоморфизмом $\tau: E \rightarrow E$, переводящим множество $R(E)$ в множество $R(E)$ и множество $I(E)$ в множество $I(E)$.

Следуя [2], дадим следующее определение. *Орбитой $O(L)$ гомотопического класса вращения полутраектории L потока f^t на M называется множество*

$$O(L) = H^*(\mu(L)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если L имеет своим предельным множеством топологическое седло, то $O(L) = \emptyset$. Если L не имеет своим предельным множеством топологическое седло, то $O(L)$ состоит из счетного всюду плотного на абсолюте E подмножества иррациональных точек $I(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Орбита гомотопического класса вращения $O(L)$ полутраектории L потока f^t на M есть топологический инвариант в следующем смысле: для любого гомеоморфизма $\varphi: M \rightarrow M$ имеет место соотношение $O(L) = O(\varphi(L))$. Доказательство этого факта непосредственно следует из леммы 1.2, замечания к определению гомотопического класса вращения и замечания 1 к определению орбиты гомотопического класса вращения.

3. Необходимые условия топологической эквивалентности.

ТЕОРЕМА. *Если сверхтранзитивные потоки f^t, f'^t на M топологически эквивалентны, то существуют две устойчивые по Пуассону полусепаратрисы L, L' этих потоков такие, что их орбиты $O(L), O(L')$ гомотопических классов вращения совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сверхтранзитивные потоки f^t, f'^t , заданные на M , топологически эквивалентны и $\varphi: M \rightarrow M$ – отождествляющий гомеоморфизм, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t . Но тогда f^t, f'^t имеют на M одинаковое число состояний равновесия (все они являются топологическими седлами отрицательного индекса) и соответствующие в силу φ состояния равновесия имеют одинаковое (четное) число сепаратрис. В силу свойств сверхтранзитивных потоков [2], [13], [14] любая полутраектория сверхтранзитивного потока на M , не имеющая седло своим предельным множеством, является незамкнутой устойчивой по Пуассону полутраекторией, всюду плотной на M .

Пусть седло A потока f^t имеет ν сепаратрис, L_A сепаратриса седла A и L устойчивая по Пуассону полусепаратриса сепаратрисы L_A . Под действием φ седло A переходит в седло $A' = \varphi(A)$ с ν сепаратрисами потока f'^t и устойчивая по Пуассону полусепаратриса L переходит в устойчивую по Пуассону полусепаратрису $L' = \varphi(L)$ сепаратрисы $L'_{A'} = \varphi(L_A)$ седла A' .

Но тогда согласно замечаниям 1 и 2 к определению орбиты гомотопических классов вращения получаем, что $O(L) = O(L') \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В подготовленной к печати части 2 будет доказано достаточное условие топологической эквивалентности: если $O(L) = O(L')$, то сверхтранзитивные потоки f^t, f'^t , заданные на M , топологически эквивалентны.

Автор выражает благодарность С.Х. Арансону и Е.В. Жужоме за постановку задачи и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арансон С.Х., Гринес В.З. О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем) // Матем. сб. 1973. Т. 90. № 3. С. 372–402.
- [2] Арансон С.Х. Топологическая классификация слоений с особенностями и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях Часть I. Слоения // ГГУ им. Лобачевского. Деп ВИНТИ № 6687-B88. Горький, 1988. С. 1–195.
- [3] Блохин А.А. Гладкие эргодические потоки на поверхностях // Тр. ММО. 1972. Т. 27. С. 113–128.
- [4] Nogueira A. Nonorientable recurrence of flows and interval exchange transformations // J. Differential Equations. 1987. V. 70. P. 153–166.
- [5] Gutierrez C. Smooth nonorientable recurrence on 2-manifolds // J. Differential Equations. 1978. V. 29. № 3. P. 388–395.
- [6] Aranson S. Kh., Belisky G. R., Zhuzhoma E. V. Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems of Surfaces. Amer. Math. Soc. Math. Monographs. V. 153. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1996.
- [7] Nicolaev I. V., Zhuzhoma E. V. Flows on 2-dimensional Manifolds / An Overview. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc. 1999. V. 1705.
- [8] Арансон С.Х., Жужома Е.В., Тельных И.А. Транзитивные и сверхтранзитивные потоки на замкнутых неориентируемых поверхностях // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 4. С. 625–627.
- [9] Арансон С.Х., Тельных И.А. Топологическая динамика сверхтранзитивных потоков на замкнутых неориентируемых поверхностях // Нижегородский государственный технический университет. Деп. ВИНТИ № 1751-B98. Нижний Новгород, 1998. С. 1–81.
- [10] Mangler W. Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich // Math. Z. 1939. V. 44. P. 541–553.
- [11] Nielsen J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen // Acta Math. 1927. V. 50. P. 189–358.
- [12] Nielsen J. Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen // Abh. Math. Seminar Hamburg Univ. 1924. V. III. № 1. P. 246–260.
- [13] Арансон С.Х. Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях // Матем. сб. 1969. Т. 80. С. 314–333.
- [14] Майер А.Г. О траекториях на ориентируемых поверхностях // Матем. сб. 1943. Т. 123. № 1. С. 71–84.