Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, О спектре самосопряженных дифференциальных операторов из параметрического семейства, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 3, 471–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:24:54

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СПЕКТРЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА

А. А. Владимиров

Рассматривается семейство обыкновенных дифференциальных операторов $L(\theta)$, порожденных в $L_2[0, 1]$ дифференциальным выражением

$$l(\theta)y(x) = (-1)^n \left(\frac{y^{(n)}(x)}{p_0(\theta, x)} \right)^{(n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (p_k(\theta, x) y^{(n-k)}(x))^{(n-k)} \quad (1)$$

и самосопряженными краевыми условиями, также зависящими от θ . Здесь n – порядок оператора, параметр θ принимает значения на некотором открытом промежутке $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, а вещественные коэффициенты $p_k(\theta, x)$ суммируемы по переменной x на отрезке $[0, 1]$ при любом фиксированном $\theta \in \Omega$ и непрерывны, как функции от θ в метрике пространства $L_1[0, 1]$. Кроме того, предполагается, что при любом фиксированном $\theta \in \Omega$ функция $p_0(\theta, x)$ положительна почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Краевые условия будем записывать в виде

$$\mathbf{A}(\theta)\mathcal{Y}(y) + \mathbf{B}(\theta)\mathcal{Z}(y) = 0, \quad (2)$$

где векторы $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{2n}$ имеют вид

$$\mathcal{Y}(y) = \begin{pmatrix} y^{[0]}(0) \\ y^{[1]}(0) \\ \vdots \\ y^{[n-1]}(0) \\ y^{[0]}(1) \\ y^{[1]}(1) \\ \vdots \\ y^{[n-1]}(1) \end{pmatrix}; \quad \mathcal{Z}(y) = \begin{pmatrix} y^{[n]}(0) \\ y^{[n+1]}(0) \\ \vdots \\ y^{[2n-1]}(0) \\ y^{[n]}(1) \\ y^{[n+1]}(1) \\ \vdots \\ y^{[2n-1]}(1) \end{pmatrix}$$

(квадратные скобки в показателе обозначают квазипроизводную, см. [1]), а матрицы $\mathbf{A}(\theta)$ и $\mathbf{B}(\theta)$ размера $2n \times 2n$ считаем непрерывно зависящими от $\theta \in \Omega$.

Как уже сказано, краевые условия (2) являются самосопряженными. Поэтому операторы $L(\theta)$ самосопряжены, полуограничены снизу и имеют чисто дискретный спектр (см. [1, §§ 18, 19]).

Пусть $\lambda_m(\theta)$ – занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности собственные значения (СЗ) операторов $L(\theta)$. Вообще говоря, при сделанных предположениях функции $\lambda_m(\theta)$ не обязаны быть непрерывно зависящими от $\theta \in \Omega$. Например, для определенного на $\Omega = \mathbb{R}$ семейства

$$\begin{cases} l(\theta)y(x) = -y''(x), \\ y(0) = y(1) + \theta y'(1) = 0 \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 9801-01000 и № 001596100.

(для которого все $\lambda_m(\theta)$ могут быть выписаны явно) функция $\lambda_1(\theta)$ в левой полуокрестности точки $\theta = 0$ отрицательна и есть решение уравнения

$$-\operatorname{th}(\sqrt{-\lambda}) = \theta\sqrt{-\lambda}.$$

Но тогда $\lambda_1(\theta) \rightarrow -\infty$ при $\theta \rightarrow -0$. Тем самым $\lambda_1(\theta)$ разрывна в точке $\theta = 0$ (на самом деле в этой точке разрывны и остальные $\lambda_m(\theta)$).

Вопрос о непрерывности СЗ $\lambda_m(\theta)$ рассматриваемых семейств операторов возникает при исследовании поведения дискретного спектра оператор-функций в окрестности границы их существенно-го спектра (для некоторого класса оператор-функций второго порядка такая задача рассматривалась, к примеру, в работе [2]). Первым основным результатом данной заметки является следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Если ранг определенной при задании краевых условий (2) матрицы $\mathbf{B}(\theta)$ не зависит от θ , то функции $\lambda_m(\theta)$ непрерывны.*

Формулировке другой теоремы предположим ряд лемм. В дальнейшем везде предполагается, что $\operatorname{rank} \mathbf{B}(\theta)$ постоянен на Ω .

ЛЕММА 1. *Существует непрерывно зависящая от θ матрица $\mathbf{C}(\theta)$ размера $2n \times 2n$ такая, что $\mathbf{B}(\theta)\mathbf{C}(\theta)$ есть ортопроектор на $\operatorname{im} \mathbf{B}(\theta)$, а $\mathbf{C}(\theta)\mathbf{B}(\theta)$ – ортопроектор на ортогональное дополнение к $\ker \mathbf{B}(\theta)$.*

ЛЕММА 2. *Ранг матрицы $(\mathbf{B}(\theta)\mathbf{C}(\theta) - 1)\mathbf{A}(\theta)$ равен $2n - \operatorname{rank} \mathbf{B}$.*

Ввиду леммы 2 ортопроектор $\mathbf{P}(\theta)$ на подпространство $\ker\{(\mathbf{B}(\theta)\mathbf{C}(\theta) - 1)\mathbf{A}(\theta)\}$ непрерывно зависит от θ .

Обозначим теперь через $\mathbf{J}$ матрицу размера $2n \times 2n$ вида

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\mathcal{J} & 0 \\ 0 & \mathcal{J} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{J}$ – матрица размера $n \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 3. *Матрица $\mathbf{D}(\theta) = \mathbf{P}(\theta)\mathbf{J}\mathbf{C}(\theta)\mathbf{A}(\theta)\mathbf{P}(\theta)$ при всех $\theta \in \Omega$ является самосопряженной, и для любой функции $y(x)$ из области определения $\mathcal{D}(L(\theta))$ оператора $L(\theta)$ имеет место равенство*

$$(L(\theta)y, y) = \sum_{k=0}^n \int_0^1 p_k(\theta, x) |y^{[n-k]}(x)|^2 dx + (\mathbf{D}(\theta)\mathcal{Y}(y), \mathcal{Y}(y))_{\mathbb{C}^{2n}}.$$

Теперь сформулируем второй основной результат заметки.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

- 1) оператор $\mathbf{P}(\theta)$ постоянен на Ω ;
- 2) при любых $\theta' < \theta'' \in \Omega$ почти для всех $x \in [0, 1]$ выполнены неравенства $p_k(\theta', x) \geq p_k(\theta'', x)$ при $1 \leq k \leq n$ и $p_0(\theta', x) \leq p_0(\theta'', x)$, хотя бы одно из которых почти для всех $x \in [0, 1]$ является строгим;
- 3) матрицы $\mathbf{D}(\theta)$ не возрастают по θ .

Тогда функции $\lambda_m(\lambda)$ строго убывают.

При доказательстве теорем 1 и 2 вводятся вспомогательные гильбертовы пространства $\mathbb{H}(\theta) = L_2([0, 1]; p_0(\theta, x)) \times \mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

$$(w, v)_{\mathbb{H}(\theta)} = \int_0^1 p_0(\theta, \zeta) \varphi(\zeta) \overline{\psi(\zeta)} d\zeta + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{b_k},$$

где

$$w = \begin{pmatrix} \varphi(\zeta) \\ a_0 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \psi(\zeta) \\ b_0 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Так же вводятся инъективно отображающие $\mathbb{H}(\theta)$ в $L_2[0, 1]$ ограниченные операторы $\Gamma(\theta)$, действующие по правилу

$$\Gamma(\theta) \begin{pmatrix} \varphi(\zeta) \\ z_0 \\ \dots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = y(x) = \int_0^x p_0(\theta, \zeta) \frac{(x-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(\zeta) d\zeta + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!} z_k.$$

При этом оказывается, что области $\mathcal{D}(L(\theta))$ операторов $L(\theta)$ принадлежат образам операторов $\Gamma(\theta)$, и замыкания $K(\theta)$ операторов $1 - \Gamma^*(\theta)L(\theta)\Gamma(\theta)$ вполне непрерывны. Области операторов $K(\theta)$, являющиеся замыканиями линейалов $\Gamma^{-1}(\theta)\mathcal{D}(L(\theta))$, будут в дальнейшем обозначаться $\mathbb{G}(\theta)$.

Доказательство теоремы 1 основано на сведении ее к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3. Если при некотором $\theta_0 \in \Omega$ оператор $1 - K(\theta_0)$ имеет ограниченный обратный, то найдется такая окрестность $U(\theta_0)$ точки θ_0 , что для всякого $\theta \in U(\theta_0)$ оператор $1 - K(\theta)$ имеет ограниченный обратный, а $\nu(1 - K(\theta))$ — число отрицательных СЗ оператора $1 - K(\theta)$ — равно $\nu(1 - K(\theta_0))$.

Основой доказательства теоремы 3 является следующая лемма.

ЛЕММА 4. Для любых фиксированных $\theta_0 \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ найдутся самосопряженная матрица A в некотором конечномерном пространстве $\mathbb{C}^N$ и определенное в некоторой окрестности $V(\theta_0)$ точки θ_0 семейство операторов $Q(\theta): \mathbb{G}(\theta) \rightarrow \mathbb{C}^N$ такие, что матрицы $Q(\theta)Q^*(\theta)$ обратимы и непрерывны по θ и при всех $\theta \in V(\theta_0)$ справедливо неравенство

$$\|Q^*(\theta)AQ(\theta) - K(\theta)\| < \varepsilon.$$

Если лемма 4 верна, то доказательство теоремы 3 проводится следующим образом. Из обратности $1 - K(\theta_0)$ следует, что при достаточно малом ε резольвентное множество оператора $K(\theta_0)$ содержит 4ε -окрестность точки 1. Тогда из неравенства $\|Q^*(\theta_0)AQ(\theta_0) - K(\theta_0)\| < \varepsilon$ вытекает принадлежность 3ε -окрестности точки 1 резольвентному множеству оператора $Q^*(\theta_0)AQ(\theta_0)$ и равенство $\nu(1 - Q^*(\theta_0)AQ(\theta_0)) = \nu(1 - K(\theta_0))$. Это, в свою очередь, означает принадлежность 3ε -окрестности точки 1 резольвентному множеству матрицы $AQ(\theta_0)Q^*(\theta_0)$ и равенство $\nu(1 - AQ(\theta_0)Q^*(\theta_0)) = \nu(1 - K(\theta_0))$. Тогда для некоторой подокрестности $U(\theta_0)$ окрестности $V(\theta_0)$ резольвентные множества матриц $AQ(\theta)Q^*(\theta)$ содержат 2ε -окрестность точки 1 и $\nu(1 - AQ(\theta)Q^*(\theta)) = \nu(1 - K(\theta_0))$ независимо от $\theta \in U(\theta_0)$. Это означает, что 2ε -окрестность точки 1 входит при $\theta \in U(\theta_0)$ в резольвентное множество оператора $Q^*(\theta)AQ(\theta)$ и что $\nu(1 - Q^*(\theta)AQ(\theta))$ постоянна на $U(\theta_0)$. Наконец, используя неравенство $\|Q^*(\theta)AQ(\theta) - K(\theta)\| < \varepsilon$, получаем, что при $\theta \in U(\theta_0)$ резольвентные множества операторов $K(\theta)$ содержат ε -окрестность точки 1 и число превосходящих 1 СЗ операторов $K(\theta)$ постоянно на $U(\theta_0)$, т.е. получаем в точности утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 2 основано на сведении ее к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 2 для любых $\theta' < \theta''$ из Ω принадлежность точки 1 спектру оператора $K(\theta')$ означает, что $\nu(1 - K(\theta')) < \nu(1 - K(\theta''))$.

Для доказательства теоремы 4 при всяких $\theta' < \theta''$ из Ω вводятся отображения $\Upsilon(\theta', \theta'')$, действующие по правилу

$$\Upsilon(\theta', \theta'') \begin{pmatrix} \varphi(\zeta) \\ z_0 \\ \dots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_0(\theta', \zeta)}{p_0(\theta'', \zeta)} \varphi(\zeta) \\ z_0 \\ \dots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}.$$

В условиях теоремы 2 оператор $\Upsilon(\theta', \theta'')$ инъективно отображает все пространство $\mathbb{H}(\theta')$ в пространство $\mathbb{H}(\theta'')$, причем образ подпространства $\mathbb{G}(\theta')$ является подмножеством подпространства $\mathbb{G}(\theta'')$. Кроме того, для всякого ненулевого $w \in \mathbb{G}(\theta')$ оказывается справедливым неравенство

$$((1 - K(\theta''))\Upsilon(\theta', \theta'')w, \Upsilon(\theta', \theta'')w) < ((1 - K(\theta'))w, w).$$

Отсюда, применяя вариационный принцип, выводим утверждение теоремы 4.

Автор благодарит профессора А. А. Шкаликова за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A. // Math. Nachr. 1998. V. 189. P. 157–170.