Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, И. Купш, Преобразования Боголюбова
в пространстве Винера–Сигала–Фока, *Матем. заметки*,
2000, том 68, выпуск 3, 474–479

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm966>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 07:47:13

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОГОЛЮБОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ВИНЕРА–СИГАЛА–ФОКА

И. Купш, О. Г. Смолянов

Преобразованиями Боголюбова обычно называются (линейные) симплектические преобразования наделенного естественной симплектической структурой овеществления комплексного гильбертова пространства H^1 , а также порождаемые ими преобразования операторов, возникающих при представлении канонических коммутационных соотношений (т.е. при представлениях подходящих алгебры и группы Гейзенберга), и соответствующие унитарные преобразования того пространства, в котором эти операторы действуют (см. [1]–[3]).

Пространством Винера–Сигала–Фока называется пространство $\mathcal{L}_2(Q, \nu)$, где Q – вещественная часть пространства $Q \times P$ и ν – стандартная гауссова мера; далее мы будем рассматривать также случай “произвольной” гладкой [4], [5] меры; если Q конечномерно, то будет использоваться обычная мера Лебега.

Целью предлагаемой заметки является получение явных формул для унитарных преобразований Боголюбова в пространстве $\mathcal{L}_2(Q, \nu)$. Когда пространство H конечномерно, частными случаями основного результата заметки являются формулы, полученные в работе [6], где рассматривалась только конечномерная ситуация, причем даже в этой ситуации явные формулы были получены лишь для простых частных случаев унитарных преобразований (Боголюбова). В заметке описываются два метода получения формул для (общих) унитарных преобразований Боголюбова; оба они даже в случае конечномерного H совершенно отличны от метода, использованного в [7], [6], и, по-видимому, являются новыми.

¹В книге [12] они называются каноническими преобразованиями.

1. Предварительные сведения. Пусть H – комплексное гильбертово пространство. Тогда $H = H_R \oplus iH_R$, где H_R – (некоторое) максимальное собственно вещественное [8, гл. 1, упр. 16] подпространство H . Ядро и образ линейного оператора ниже обозначаются символами $\ker$ и ran . Пусть $Q = H_R$, $P = iH_R$ и пусть вещественное гильбертово пространство $E = Q \times P$ надделено симплектической структурой, определяемой отображением $I: P \times Q \rightarrow Q \times P$, $(p, q) \mapsto (q, -p)$, которое порождается умножением на $i = \sqrt{-1}$ в комплексном пространстве H . Пусть $P(E)$ – алгебра Пуассона бесконечно дифференцируемых (по Фреше) функций на E (скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ определяется равенством $\{f, g\}(q, p) = (f'(q, p), Ig'(q, p))_H$) и пусть $P_0(E)$ – подалгебра в $P(E)$, порожденная подпространством E_0 в $P(E)$, состоящим из всех линейных непрерывных функционалов на E . Если отождествить (с помощью вещественной гильбертовой структуры) пространство E с подпространством E_0 , то $P_0(E)$ можно будет считать (= отождествить с) центральным расширением коммутативной алгебры Ли $E_0 (= E)$ с помощью одномерной (коммутативной) вещественной алгебры Ли $\mathbb{R}^1$. Это означает, что следующая последовательность алгебр Ли точна: $0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \rightarrow P_0(E) \rightarrow E_0 \rightarrow 0$. Обычно центральное расширение алгебры Ли E_0 с помощью одномерной алгебры Ли $\mathbb{R}^1$ называется *алгеброй Гейзенбарга*, порождаемой $E = Q \times P$. Аналогично можно было бы определить и *группу Гейзенберга*, порожденную E , как центральное расширение коммутативной группы E с помощью одномерной компактной связной коммутативной группы – окружности (ниже мы не будем рассматривать группу Гейзенберга). Всякий гомоморфизм алгебры Гейзенберга в алгебру самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве называется *представлением канонических коммутационных соотношений* (ККС); всякое точное (т.е. с нулевым ядром) унитарное представление группы Гейзенберга называется *представлением ККС* в форме Германа Вейля (ср. [3], [6], [9]). В случае, когда $\dim Q (= \dim P) < \infty$, мы рассматриваем стандартное “представление Шрёдингера” ККС в $\mathcal{L}_2(Q)$:

$$\begin{aligned} Q \ni q_0 &\mapsto \hat{q}_0 = [L_2(Q) \ni \varphi \mapsto [q \mapsto (q_0, q)Q\varphi(q)]], \\ P \ni p_0 &\mapsto \hat{p}_0 = [L_2(Q) \ni \varphi \mapsto -i(\varphi'(\cdot), p_0)_P], \end{aligned}$$

здесь $(\cdot, \cdot)_Q$ и $(\cdot, \cdot)_P$ – скалярные произведения в соответствующих пространствах и $\varphi'(\cdot)$ отождествляется с элементом пространства P ; переход к общему случаю произвольной меры ν (и бесконечномерного Q) можно осуществить с помощью методов [4].

Пусть $\operatorname{Sp} E$ – группа (линейных) симплектических преобразований симплектического пространства E ; элементы этой группы называются также *линейными каноническими преобразованиями* (выше мы называли их преобразованиями Боголюбова). Всякое линейное непрерывное преобразование A пространства E может быть представлено в виде (блок-) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in L(Q, Q)$, $\beta \in L(P, Q)$, $\gamma \in L(Q, P)$, $\delta \in L(P, P)$. Далее мы отождествляем Q и P , что позволяет считать α, β, γ и δ элементами любого из этих пространств. При этом $A \in \operatorname{Sp} E$ в точности тогда, когда $\alpha\delta^* - \beta\gamma^* = \operatorname{Id}$, $\gamma^*\alpha = \alpha^*\gamma$, $\delta^*\beta = \beta^*\delta$ (ср. [6], [10]). Всюду далее предполагается, что $A \in \operatorname{Sp} E$ и определяется приведенной выше матрицей.

Действие преобразования A_{Op} в образе представления ККС определяется так:

$$A_{\operatorname{Op}}: \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix};$$

отображение A_{Op} также называется преобразованием Боголюбова.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Всякое унитарное преобразование V , удовлетворяющее соотношению

$$\begin{pmatrix} V^{-1}\hat{q}V \\ V^{-1}\hat{p}V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix},$$

называется (унитарным) *преобразованием Боголюбова, соответствующим оператору A* (или, что то же, A_{Op}).

Наша цель – найти для “произвольного” A явный вид (некоторого) соответствующего ему V_A – унитарного преобразования Боголюбова. Соответствие $A \mapsto V_A$ фактически определяет проективное унитарное представление группы $\mathrm{Sp} E$, если E конечномерно, и некоторой ее подгруппы, если E бесконечномерно. В этой заметке вопрос о построении “настоящего” унитарного представления группы $\mathrm{Sp} E$ не рассматривается; связь этого вопроса с индексом Маслова обсуждается – для конечномерного E – в [6].

2. Два частных случая. В этом пункте предполагается, что $\dim E < \infty$. Пусть для каждого $b \in L(Q)$ такого, что $b^* = b$, и для каждого обратимого $d \in L(Q)$ унитарные отображения D_b и W_d определяются равенствами

$$(D_b f)(q) = e^{i(bq, q)/2} f(q), \quad (W_d f)(q) = |\det d|^{1/2} f(dq);$$

и пусть φ – преобразование Фурье в $\mathcal{L}_2(Q)$, определяемое для $f \in \mathcal{S}(Q)$ равенством

$$(\varphi f)(q) = (2\pi)^{-n/2} \int_Q e^{-i(q, q_1)} f(q_1) dq_1.$$

Тогда W_d порождается симплектическим отображением

$$A_d = \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

и D_b – симплектическим отображением

$$A_b = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ b & \mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

Пусть еще A_φ – симплектическое отображение, порождающее преобразование Фурье φ .

Если теперь оператор β в матрице, определяющей A , обратим, то существуют обратимый d и симметричные b, c такие, что $V_A = W_d D_c \varphi D_b$. Это равенство означает, что $d^{-1}b = \alpha$, $d^{-1} = \beta$, $d^*cb - d^* = \gamma$, $d^*c = \delta$ и, следовательно (так как β обратим), $d = \beta^{-1}$, $b = \beta^{-1}\alpha$, $c = \beta^*\delta$, так что надо только проверить, что $b = b^*$, $c = c^*$ и $d^*cb - d^* = \gamma$. Так как симплектические преобразования образуют группу, то из равенства $b = b^*$ вытекает, что $D_c \in \mathrm{Sp} E$ и, следовательно, $c = c^*$.

Далее, так как в силу симплектичности A $\alpha\beta^* = \beta\alpha^*$ и, кроме того, $\beta\alpha^* = \alpha\beta^* \iff \alpha l = \beta\alpha^*\beta^{*-1} \iff \beta^{-1}\alpha = \alpha^*\beta^{*-1}$, то $b = \beta^{-1}\alpha = b^*$. Далее, так как ввиду $A \in \mathrm{Sp} E$ $-\delta\alpha^* + \gamma\beta^* = \mathrm{Id}$, то $\gamma = \delta\alpha^*\beta^{*-1} - \beta^{*-1} = \delta\beta^{*-1}\alpha - \beta^{*-1} = \beta^{*-1}\beta^*\delta\beta^{-1}\alpha - \beta^{*-1} = d^*cb - d^*$. Таким образом, доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если β – обратимое отображение, то

$$(V_A f)(q) = |\det \beta|^{-1/2} (2\pi)^{-n/2} \int_Q e^{i(\delta\beta^{-1}q_1, q)/2} e^{i(\beta^{-1}q_1, q_1)} e^{i(\beta^{-1}\alpha q_1, q_1)/2} f(q_1) dq_1.$$

Пусть теперь $\beta = 0$. Тогда можно положить $V_A = W_d D_c$ (или $V_A = D_c W_d$). Первое равенство равносильно соотношениям $d = \alpha^{-1}$ и $c = \alpha^*\gamma$, так что справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\beta = 0$, то

$$(V_A f)(q) = |\det \alpha|^{-1/2} e^{i(\gamma\alpha^{-1}q_1, q)/2} f(\alpha^{-1}q).$$

3. Общие унитарные преобразования Боголюбова в конечномерных пространствах. Если β необратимо, но $\beta \neq 0$, то разложение V_A на множители содержит “частичное преобразование Фурье”, определяемое так. Пусть для каждого ортогонального разложения $Q = K \oplus J$ Z_K – это (унитарное) отображение $\mathcal{L}_2(Q)$ в себя, определяемое равенством

$$(Z_K f)(q) = (2\pi)^{-\dim K/2} \int_K e^{-i(q, q_1)} f(\text{Pr}_J q + q_1) dq_1,$$

где для всякого замкнутого векторного подпространства G пространства Q Pr_G – ортогональная проекция Q на G (отображение Z_K естественно назвать частичным преобразованием Фурье). Непосредственно проверяется, что

$$(Z_K^{-1} \tilde{f})(q_1) = (2\pi)^{-\dim K/2} \int_K e^{i(q_1, q)} \tilde{f}(\text{Pr}_J q_1 + q) dq.$$

Отметим, что если $K = Q$, то Z_K – это обычное преобразование Фурье; если $K = \{0\}$, то $Z_K = \text{Id}$.

Непосредственно проверяется, что $Z_K = V_C$, где

$$C = \begin{pmatrix} \text{Pr}_J & \text{Pr}_K \\ -\text{Pr}_K & \text{Pr}_J \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $K = \ker(\beta^*)$, $J = \text{ran } \beta$. Тогда $A = C^{-1}(CA)$, причем

$$CA = \begin{pmatrix} \text{Pr}_J \alpha + \text{Pr}_K \gamma & \beta + \text{Pr}_K \delta \\ \text{Pr}_K \alpha + \text{Pr}_J \gamma & \text{Pr}_J \delta \end{pmatrix},$$

и оператор $\beta + \text{Pr}_K \delta$ обратим. Действительно, так как $\dim Q < \infty$, то достаточно показать, что $\ker(\beta + \text{Pr}_K \delta) = 0$. Пусть $x \in \ker(\beta + \text{Pr}_K \delta)$. Тогда в силу ортогональности $\text{ran } \beta$ и $\ker \beta^*$ $\beta x = 0$ и $\text{Pr}_K \delta x = 0$. Если $x \neq 0$, то из равенства $\beta x = 0$ следует, что $\delta x \neq 0$ в силу равенства $\alpha^* \delta + \gamma^* \beta = \text{Id}$. Но $\delta x \in \ker \beta$ (ввиду соотношений $\beta^* \delta = \delta^* \beta$ и $\beta x = 0$) и, следовательно, $\delta x = \text{Pr}_K \delta x = 0$, что, в свою очередь, означает, что на самом деле $x = 0$. Следовательно, в силу предыдущего, используя обозначение $c_0 = |\det(\beta + \text{Pr}_K \delta)|^{-1/2} (2\pi)^{-n/2}$,

$$\begin{aligned} (V_C A f)(q) &= c_0 \int e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q)/2 - i((\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q_1)} \\ &\quad \times e^{i((\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} (\text{Pr}_J \alpha + \text{Pr}_K \gamma) q_1, q_1)/2} f(q_1) dq_1. \end{aligned}$$

После замены переменных $((\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1})^* q_1 = (\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K)^{-1} q_1 = q_2$ последнее равенство превращается в равенство

$$\begin{aligned} (V_C A f)(q) &= c_0 \int e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q)/2 - i(q, q_2)} \\ &\quad \times e^{i((\text{Pr}_J \alpha + \text{Pr}_K \gamma)(\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2, q_2)/2} f((\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2) dq_2; \end{aligned}$$

теперь можно переписать последнее равенство так:

$$\begin{aligned} (V_C A f)(q) &= c_0 \int_K \int_J e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q)/2} e^{-i(q, \text{Pr}_K q_2) - i(q, \text{Pr}_J q_2)} \\ &\quad \times e^{i((\text{Pr}_J \alpha + \text{Pr}_K \gamma)(\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K)(\text{Pr}_K q_2 + \text{Pr}_J q_2), \text{Pr}_K q_2 + \text{Pr}_J q_2)/2} \\ &\quad \times f((\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K)(\text{Pr}_K q_2 + \text{Pr}_J q_2)) d(\text{Pr}_K q_2 + \text{Pr}_J q_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(V_A f)(q) = (Z_K^{-1} V_C A f)(q) = (2\pi)^{-\dim K/2} \int_K e^{i(q, q_3)} V_C A f(\text{Pr}_J q + q_3) dq_3.$$

Из двух последних равенств, а также соотношений

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-\dim K} \int_K e^{i(q_4, q_3)} e^{-i(q_3, q)} dq_3 &= \delta(q - q_4) e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q)/2} \\ &= e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} \text{Pr}_J q, \text{Pr}_J q)/2} e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} \text{Pr}_K q, \text{Pr}_J q)/2} \end{aligned}$$

вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $f \in \mathcal{S}(Q)$

$$(V_A f)(q) = (2\pi)^{-\dim J/2} |\det(\beta + \text{Pr}_K \delta)|^{-1/2} \int_J e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q)/2} e^{-i(q, q_2)} \\ \times e^{i((\text{Pr}_J \alpha + \text{Pr}_K \gamma)(\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2, q_2)/2} f((\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2) dq_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичный результат можно получить также и совершенно другим методом, аппроксимируя оператор A с необратимым β последовательностью операторов A_n с обратимыми β_n . Именно, если для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{\alpha \cdot \gamma}{\gamma} & \beta + \frac{\alpha \cdot \delta}{\delta} \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

то $A_n \rightarrow A$ по (операторной) норме и $A_n \in \text{Sp}(Q \times P)$ для каждого n .

Отметим еще, что такой подход, хотя и приводит к громоздким вычислениям, позволяет установить связь с индексом Маслова (ср. [6]).

4. Бесконечномерные фазовые пространства. Те из введенных выше обозначений, которые не зависят от размерности, будут использоваться без объяснений.

Пусть Q и P – два экземпляра (бесконечномерного) гильбертова пространства и ν – дифференцируемая по всем направлениям гладкая цилиндрическая мера на Q , обладающая всюду определенной непрерывной дифференцируемой (по Гато) строго положительной обобщенной плотностью g_ν (обобщенная плотность гладкой меры – это функция, производная логарифма которой вдоль каждого направления совпадает с логарифмической производной меры вдоль того же направления [4], [5]). Отметим, что из существования всюду определенной непрерывной обобщенной плотности вытекает, что мера ν не является счетно аддитивной.

Пусть существует такая цилиндрическая мера ν_J на гап β , обобщенная плотность которой определяется равенством $g_{\nu_J}(q_2) = g_\nu((\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2)$ (она может считаться поверхностной мерой на гап β , порожденной мерой, обобщенная плотность которой определяется последним равенством на всем Q).

Обозначим через $S_c(Q)$ векторное пространство всех цилиндрических функций f на Q , для которых существуют такие конечномерное подпространство Q_f пространства Q и функция $f_0 \in S(Q_f)$ такая, что $f(q) = f_0(\text{Pr}_{Q_f} q)$. Пусть оператор $\text{Id} - \beta - \text{Pr}_K \delta$ является ядерным.

ТЕОРЕМА 2. Для всякого $f \in S_c(Q)$

$$(V_A f)(q) = |\det \beta + \text{Pr}_K \delta|^{1/2} (g_\nu(q))^{-1/2} \int_J e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q)/2} e^{-i(q, q_2)} \\ \times e^{i((\text{Pr}_J \alpha + \text{Pr}_K \gamma)(\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2, q_2)/2} f((\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2) (g_{\nu_J}(q_2))^{-1/2} \nu_J(dq_2),$$

если функция под знаком интеграла ν_J -интегрируема.

Эта теорема выводится из теоремы 1 с помощью методов [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть ν – гауссова мера с нулевым средним и корреляционным оператором B , ее обобщенная плотность g_ν определяется равенством $g_\nu(q) = e^{-(B^{-1} q, q)/2}$ (из предположения, что функция g_ν всюду определена и непрерывна, вытекает, что оператор B обратим), так что

$$g_{\nu_J}(q) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\beta + \text{Pr}_K \delta) B^{-1}(\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q, q\right)$$

(ν_J – это гауссова мера с корреляционным оператором $B_J = (\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K)^{-1} B(\beta + \text{Pr}_K \delta)$).

Если $B = \text{Id}$, то, используя замену переменной интегрирования с помощью соотношения $(\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K) q_2 = q_3$, можно из теоремы 2 вывести следующее равенство:

$$(V_A f)(q) = |\det(\beta + \text{Pr}_K \delta)|^{1/2} e^{(q, q)/2} \int_J e^{i(\text{Pr}_J \delta(\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} q, q)/2} e^{-i(q, (\beta^* + \delta^* \text{Pr}_K)^{-1} q_2)} \\ \times e^{i((\beta + \text{Pr}_K \delta)^{-1} (\text{Pr}_J \alpha + \text{Pr}_K \gamma) q_2, q_2)/2} f(q_2) e^{(q_2, q_2)/2} \nu(dq_2);$$

здесь ν – стандартная гауссовская мера на J и предполагается, что функция под знаком интеграла ν -интегрируема.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичным образом можно рассмотреть и случай счетно аддитивной меры ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предположения об интегрируемости, содержащиеся в теореме 4 и замечании 2, фактически равносильны предположению о существовании соответствующих унитарных преобразований Боголюбова.

Отметим также, что можно получить супераналоги [11] приведенных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ruijsenaars S. N. M. // Ann. Physics (N. Y.). 1978. V. 116. P. 105–134.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
3. Baez J. C., Segal I. E., Zhou Z. Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.
4. Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V. // Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics. 1999. V. 2. №1. P. 51–79.
5. Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V. // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1995. V. 321. P. 103–108.
6. Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды. М.: Мир, 1983.
7. Vergne M. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1977. V. 285. P. 191–194.
8. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
9. Ottesen J. T. Infinite Dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics. New York: Springer, 1995.
10. Ленг С. $SL_2(\mathbb{R})$. М.: Мир, 1977.
11. Купш И., Смолянов О. Г. // Докл. РАН. 1998. Т. 363. №6. С. 741–745.
12. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.