Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, К. Д. Драч, Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 656–665

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:16:10

Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной

А. А. Борисенко, К. Д. Драч

Для вложенных замкнутых кривых с кривизной, ограниченной снизу, мы доказываем изопериметрическое неравенство, оценивающее минимальную ограничиваемую такими кривыми площадь при фиксированном периметре.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm9678

1. Введение. Известно классическое изопериметрическое неравенство, равносильное тому, что среди всех замкнутых спрямляемых кривых постоянной длины L , ограничивающих область на плоскости, наибольшую площадь будет ограничивать окружность длины L и радиуса $L/(2\pi)$. При этом понятно, что наименьшая площадь будет равна 0.

Напомним, что локально выпуклая кривая $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ называется λ -выпуклой, $\lambda > 0$, если в каждой точке $P \in \gamma$ существует окружность радиуса $1/\lambda$ такая, что в окрестности P кривая γ лежит со стороны выпуклости этой окружности.

Для регулярной класса C^k , $k \geq 2$, кривой γ ее λ -выпуклость равносильна тому, что кривизна кривой $k \geq \lambda > 0$.

Будем теперь рассматривать не произвольные кривые постоянной длины, а класс замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых γ , длины которых равны $L \leq 2\pi/\lambda$. Неравенство с необходимостью следует из λ -выпуклости.

Очевидно (и это следует из изопериметрического неравенства), что среди таких кривых наибольшую площадь будет ограничивать все та же окружность длины L и кривизны $2\pi/L \geq \lambda$. Но оказывается, что для такого класса кривых существует минимум ограничиваемой площади.

Будем называть *правильным криволинейным двуугольником* или *луночкой* выпуклую кривую γ_0 длины $L \leq 2\pi/\lambda$, составленную из двух равных дуг окружности радиуса $1/\lambda$.

Тогда справедливо следующее изопериметрическое неравенство.

Работа второго автора выполнена при поддержке фонда им. Н. И. Ахиезера, 2011

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ – замкнутая вложенная λ -выпуклая кривая. Пусть L и S – длина кривой и площадь области, ею ограниченной. Тогда

$$S \geq \frac{L}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin\left(\frac{L\lambda}{2}\right), \quad (1.1)$$

равенство достигается только для луночки γ_0 .

2. Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности можем считать $\lambda = 1$. Если γ – локально выпуклая кусочно C^2 -гладкая кривая, то ее кривизна в гладких точках $k \geq 1$. В негладких точках $P_i \in \gamma$ существуют $\overline{\lim} k(P) \geq 1$ и $\underline{\lim} k(P) \geq 1$ при $P \rightarrow P_i$, в том числе и бесконечные.

Как известно, положительность кривизны вложенной кривой γ влечет ее строгую выпуклость. Значит, γ можно однозначно задать опорной функцией $x(t) = \langle \gamma(t), n(t) \rangle$, $t \in [0; 2\pi]$, равной расстоянию от начала (точки O) до опорной прямой к γ в точке с единичной внешней нормалью $n(t)$, где t – угол между $n(t)$ и положительным направлением оси Ox (тут $\gamma(t)$ – радиус-вектор кривой, проведенный в соответствующую этой нормали точку). Заметим, что при наших ограничениях на γ , ее опорная функция x является $C^{1,1}$ -гладкой 2π -периодической функцией.

Обозначим через $u(t) = 1/k(t)$ – радиус кривизны кривой в точке $\gamma(t)$. Тогда в силу того, что $k \geq 1$,

$$0 \leq u(t) \leq 1. \quad (2.1)$$

Заметим, что значение $u = 0$ соответствует точкам кривой, в которых кривизна равна бесконечности. Существование таких точек допускается условием теоремы.

Для опорной функции известно, что почти для всех $t \in [0; 2\pi]$

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t). \quad (2.2)$$

Используя опорную функцию и радиус кривизны, выпишем выражения для длины L кривой и площади S , которую она ограничивает:

$$L = \int_0^{2\pi} ds(t) = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt} dt = \int_0^{2\pi} u(t) dt \quad (2.3)$$

(где под ds понимается элемент длины дуги кривой),

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) ds(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) u(t) dt. \quad (2.4)$$

Для доказательства неравенства (1.1) заметим, что площадь, ограничиваемая криволинейным двуугольником γ_0 длины L_{γ_0} , как раз равна

$$S_{\gamma_0} = \frac{L_{\gamma_0}}{2} - \sin\left(\frac{L_{\gamma_0}}{2}\right), \quad (2.5)$$

а значит, в силу (2.5), утверждение теоремы равносильно тому, что наименьшую ограничиваемую площадь среди всех кривых γ кривизны $k \geq 1$ некоторой фиксированной длины L_0 имеет криволинейный двуугольник γ_0 той же длины. Будем доказывать теорему в этой равносильной формулировке. Для этого найдем минимум функционала площади S .

Используя условия (2.1)–(2.4), приходим к следующей формализованной постановке задачи:

$$\begin{cases} S_\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t)u(t) dt \rightarrow \min, \\ L_\gamma = \int_0^{2\pi} u(t) dt = L_0, \\ \ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \\ 0 \leq u(t) \leq 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Интерпретируем задачу (2.6) как задачу оптимального управления, где радиус кривизны $u(t)$ будет выступать в роли управления, а опорная функция $x(t)$ – в роли фазовой траектории. Исходя из того, что кривая γ вложена и выпукла, будем решать эту задачу по u в классе 2π -периодических ограниченных и измеримых функций, а по x в классе 2π -периодических $C^{1,1}$ -гладких функций.

Добавим к задаче (2.6) начальные и граничные значения для опорной функции

$$x(0) = x(2\pi) = h_1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) = h_2.$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. [1], [2]). Сделаем замену

$$x(t) =: x_1(t), \quad \dot{x}(t) =: x_2(t). \quad (2.7)$$

Тогда приходим к классической задаче оптимального управления

$$\begin{cases} S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} x_1(t)u(t) dt \rightarrow \min, \\ \int_0^{2\pi} \left(u(t) - \frac{L_0}{2\pi} \right) dt = 0, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - x_1(t), \\ 0 \leq u(t) \leq 1, \\ x_1(0) = x_1(2\pi) = h_1, \quad x_2(0) = x_2(2\pi) = h_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Для (2.8) запишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1) dt + l(x_1(0), x_2(0), x_1(2\pi), x_2(2\pi)),$$

где

$$\begin{aligned} & L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_0 x_1 u + \lambda_1 \left(u - \frac{L_0}{2\pi} \right) + p_1 (\dot{x}_1 - x_2) + p_2 (\dot{x}_2 + x_1 - u), \\ & l(x_1(0), x_2(0), x_1(2\pi), x_2(2\pi)) \\ &= \lambda_3 (x_1(0) - h_1) + \lambda_4 (x_1(2\pi) - h_1) + \lambda_5 (x_2(0) - h_2) + \lambda_6 (x_2(2\pi) - h_2). \end{aligned}$$

Тогда для интегранта L на оптимальной фазовой траектории и оптимальном управлении (которые мы все так же будем обозначать $x(t)$ и $u(t)$) должны выполняться:

- 1) уравнение Эйлера по фазовым переменным x_i , $i = 1, 2$: $-(d/dt)L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0$, которое дает

$$\begin{aligned} i = 1: & \quad -\dot{p}_1 + \frac{1}{2}\lambda_0 u + p_2 = 0, \\ i = 2: & \quad -\dot{p}_2 - p_1 = 0; \end{aligned} \quad (2.9)$$

- 2) условие трансверсальности в точках 0 и 2π : $L_{\dot{x}_i}(0) = l'_{x_i(0)}(0)$, $L_{\dot{x}_i}(2\pi) = l'_{x_i(2\pi)}(2\pi)$, которое дает

$$\begin{aligned} i = 1: & \quad p_1(0) = \lambda_3, \quad p_1(2\pi) = \lambda_4, \\ i = 2: & \quad p_2(0) = \lambda_5, \quad p_2(2\pi) = \lambda_6; \end{aligned} \quad (2.10)$$

- 3) условие минимума по переменной u

$$\min_{0 \leq u \leq 1} L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, v, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1) = L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1).$$

Для задачи (2.8), заметим, что мы можем отбросить ту часть интегранта L , в которую не входит управление, а значит, условие минимума запишется как

$$\min_{0 \leq v \leq 1} \left(\frac{1}{2} \lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 \right) v = \left(\frac{1}{2} \lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 \right) u. \quad (2.11)$$

Но тогда из (2.11) следует, что

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{2} \lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 < 0, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{2} \lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Проанализируем полученные условия. А) Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 0$. Тогда из уравнений (2.9) и условий (2.10) легко следует, что

$$\begin{aligned} p_2(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, & p_1(t) &= C_1 \sin t - C_2 \cos t, \\ \lambda_5 &= \lambda_6 = C_1, & \lambda_4 &= \lambda_3 = -C_2 \end{aligned}$$

для некоторых констант C_1 и C_2 . Но тогда для фиксированного множителя Лагранжа λ_1 функция u запишется

$$u(t) = \begin{cases} 1, & C_1 \cos t + C_2 \sin t > \lambda_1, \\ 0, & C_1 \cos t + C_2 \sin t \leq \lambda_1. \end{cases}$$

Представим выражение

$$C_1 \cos t + C_2 \sin t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(t + \varphi),$$

где угол φ такой, что $\sin \varphi = C_1 / \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\cos \varphi = C_2 / \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Тогда видно, что оптимальное управление u , в силу периодичности, кусочно-постоянная функция на отрезке $[0, 2\pi]$, принимающая значения 0 и 1 с не более, чем двумя точками разрыва. Покажем, что такого быть не может, если $L_0 \neq 0$ или $L_0 \neq 2\pi$.

Действительно, заметим, что геометрический смысл функции $u(t)$ – радиус кривизны замкнутой строго выпуклой кривой γ в точке с внешней нормалью $n(t) = (\cos t, \sin t)$.

Предположим, что u не имеет разрывов на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда радиус кривизны кривой постоянен и равен либо 0, либо 1. Это отвечает случаям точки (когда $L_0 = 0$) и окружности радиуса 1 ($L_0 = 2\pi$). Если же длина кривой не равна этим крайним значениям, то $u(t)$ не может быть непрерывной функцией.

Пусть функция u на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет ровно две точки разрыва $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$, $t_1 < t_2$. При этом, в силу 2π -периодичности u можно считать, что на $[t_1, t_2]$ $u(t) \equiv 0$, а на $[0, 2\pi] \setminus [t_1, t_2]$ $u(t) \equiv 1$. Тогда опорные прямые, соответствующие точкам $t \in [0, 2\pi] \setminus [t_1, t_2]$, будут огибающими замкнутой окружности радиуса 1, имеющей угловую точку с нормалью $n(t_1 - 0)$ к левой полукасательной и нормалью $n(t_2 + 0)$ к правой полукасательной, угол между которыми равен $t_2 - t_1$ (см. рис. 1), чего быть не может. Значит, $\lambda_0 \neq 0$.

Рис. 1

Значит, можно считать, что $\lambda_0 = 2$.

Тогда из (2.9), (2.10), (2.12) и условия задачи, возвращаясь к исходной функции $x(t) = x_1(t)$ и обозначая $p(t) := p_2(t)$, получим, что для оптимального процесса с необходимостью должны выполняться следующие уравнения:

$$\ddot{p} + p = -u, \tag{2.13}$$

$$\ddot{x} + x = u \tag{2.14}$$

с соответствующими начальными и краевыми значениями, где управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x - p + \lambda_1 < 0, \\ 0, & \text{при } x - p + \lambda_1 \geq 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Сложим уравнения (2.13) и (2.14). Тогда новая функция $y := x + p$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2, \end{cases}$$

где начальные значения соответствующим образом зависят от множителей Лагранжа λ_i и начального положения кривой, задаваемого h_i . Решая его, получаем

$$y(t) = x(t) + p(t) = c_2 \sin t + c_1 \cos t. \quad (2.16)$$

Пусть $h(t)$ – опорная функция некоторой кривой $\delta(t)$. Сделаем замену системы координат путем переноса начала системы координат из точки O в точку $O_1(a_1, a_2)$ с сохранением направления и параллельности осей. Тогда опорная функция кривой $\delta(t)$ изменится следующим образом:

$$h_1(t) = h(t) - (a_1 \cos t + a_2 \sin t),$$

где $h_1(t)$ – опорная функция $\delta(t)$ в новой системе координат.

Запишем (2.16) в виде

$$x(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t \right) = - \left(p(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t \right) \right). \quad (2.17)$$

Если обозначить

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &:= x(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t \right), \\ \tilde{p}(t) &:= p(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t \right), \end{aligned}$$

то из сказанного выше будет следовать, что $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{p}(t)$ будут опорными функциями тех же кривых, что и $x(t)$ и $p(t)$, но взятые относительно системы координат с центром $O_1(c_1/2, c_2/2)$. При чем, в силу (2.17) для них будет верно $\tilde{x}(t) = -\tilde{p}(t)$. И так как вид условий (2.13)–(2.18) не зависит от выбора системы координат, не ограничивая общности можно изначально считать, что $x(t) = -p(t)$. Тогда получаем окончательную связь радиуса кривизны кривой γ с ее опорной функцией:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x(t) < \lambda, \\ 0, & \text{при } x(t) \geq \lambda, \end{cases} \quad (2.18)$$

где $\lambda = -\lambda_1/2$ некоторая константа.

Так как опорная функция непрерывна, из полученного условия следует, что γ состоит из дуг окружностей радиуса 1, состыковывающихся друг с другом в угловых точках. Причем, в силу выпуклости γ в этих угловых точках угол между полукасательными, взятый с учетом направления нормалей кривой, меньше π .

Предположим, что $\lambda \leq 0$. Обозначим $x_{\max} := \max_{t \in [0, 2\pi)} x(t)$ – максимальное значение опорной функции, а через $A_{\max}$ – точку на кривой γ , соответствующей этому значению опорной функции. Из максимальной следует, что $x_{\max} \geq 0$ и равно 0 только если кривая – точка. Можем считать $x_{\max} > 0$.

Но тогда из (2.18) следует, что в точке $A_{\max}$ радиус кривизны равен нулю, т.е. $A_{\max}$ – угловая точка кривой. Рассмотрим полукасательные к кривой γ в этой точке. Соответствующее им значение опорной функции равно λ . И так как $\lambda \leq 0$, обе полукасательные проходят через начало координат O_1 . Следовательно, γ есть дважды покрытый отрезок. В силу ограничений на кривизну γ может быть только точкой $A_{\max}$, что возможно только при $L = 0$. Значит, $\lambda > 0$. Допустим, что начало координат O_1 лежит вне области, ограниченной кривой, или на границе кривой. Если $x_{\max} < \lambda$, то кривая является окружностью радиуса 1, что возможно лишь при $L_0 = 2\pi$. Поэтому, будем считать, что $x_{\max} \geq \lambda$.

Рассмотрим аналогичное значение $x_{\min} := \min_{t \in [0, 2\pi)} x(t)$ и соответствующую ему точку $A_{\min}$ на γ . В силу минимальности и того, что начало координат лежит вне или на границе кривой, $x_{\min} \leq 0 < \lambda$. Это означает в силу (2.18), что точка $A_{\min}$ будет лежать на некоторой дуге $\widehat{A_1 A_2}$ окружности радиуса 1. Будем считать $\widehat{A_1 A_2}$ максимальной дугой, лежащей на γ и содержащей точку $A_{\min}$.

В силу выбора точки $A_{\min}$ касательная в ней к кривой γ параллельна оси $O_1 x$. Тогда из (2.18) следует, что дуга $\widehat{A_1 A_2}$ будет симметрична относительно прямой $O_1 A_{\min}$, а обе пары полукасательных к γ в точках A_1 и A_2 будут находиться на расстоянии λ от начала координат.

Рис. 2

Пусть ω – окружность радиуса 1, содержащая дугу $\widehat{A_1 A_2}$ (см. рис. 2). Пусть a_1 и a_2 – две полукасательные к кривой γ в точке A_1 . Будем также считать, что a_1 – касательная к окружности ω в точке A_1 . Пусть Q_1 и Q_2 – точки на кривой γ , в которых существуют опорные прямые, проходящие через начало координат. Очевидно, что для таких прямых значение опорной функции $x(t)$ равно 0. Но в силу того, что в точке $A_{\min}$ опорная функция $x(t) \leq 0$, а в точках A_1 и A_2 ее значения $x(t) \geq \lambda > 0$, из непрерывности получаем, что Q_1 и Q_2 лежат на дуге $\widehat{A_1 A_2}$. Заметим, что если точка O_1 не лежит на кривой γ , то $Q_1 \neq Q_2 \neq A_{\min}$. Если же начало координат

лежит на кривой, то $Q_1 \equiv Q_2 \equiv O_1 \equiv A_{\min}$. Для определенности считаем, что $Q_1 \in \widehat{A_1 A_{\min}}$.

Обозначим угол между лучами a_1 и $A_1 O_1$ через α . Так как $Q_1 \in \widehat{A_1 A_{\min}}$, то луч $A_1 O_1$ пересекает дугу $\widehat{A_1 A_{\min}}$. Поэтому

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \widehat{A_1 A_{\min}}, \quad (2.19)$$

где под $\widehat{A_1 A_{\min}}$ мы понимаем градусную меру этой дуги. Из (2.19) и симметричности дуги $\widehat{A_1 A_2}$ относительно $A_{\min} O_1$ следует, что

$$2\alpha \leq \widehat{A_1 A_{\min}} = \frac{1}{2} \widehat{A_1 A_2}.$$

В силу того, что полукасательные a_1 и a_2 находятся на одинаковых расстояниях от начала координат, угол между ними равен 2α . Тогда из последнего неравенства следует, что полукасательная a_2 , лежащая в тоже время и на опорной прямой, пересекает дугу $\widehat{A_1 A_2}$ во внутренней точке или в точке A_2 . Получили противоречие со строгой выпуклостью вложенной кривой γ . Значит, начало координат O_1 лежит внутри кривой.

Если начало координат лежит внутри кривой, то из ее выпуклости следует, что $x(t) > 0$. Причем, кривая не есть точка.

Аналогично, рассмотрим минимальное значение опорной функции $x_{\min} > 0$ и одну из точек $A_{\min}$, в которой оно достигается. Так как кривая в данном случае не может быть точкой, то $x_{\min} < \lambda$. Поэтому, как и выше, построим максимальную дугу $\widehat{A_1 A_2}$ окружности радиуса 1, содержащую точку $A_{\min}$. Эта дуга будет симметричной относительно прямой $O_1 A_{\min}$, а точка $A_{\min}$ будет ее серединой. В силу максимальной дуги из (2.18), точки A_1 и A_2 будут угловыми точками кривой γ , обе пары полукасательных в которых находятся на расстоянии λ от начала координат.

Обозначим через φ угол между лучом $A_1 O_1$ и дугой $\widehat{A_1 A_2}$ в точке A_1 (т.е., угол между лучом и соответствующей полукасательной к дуге). В силу симметрии, угол между $A_2 O_1$ и дугой $\widehat{A_1 A_2}$ в точке A_2 также равен φ .

Заметим, что по углу φ , зная λ и положение точки O_1 , дуга $\widehat{A_1 A_2}$ восстанавливается однозначно с точностью до поворота вокруг точки O_1 .

Как мы отмечали, из условия (2.18) следует, что кривая состоит из дуг единичной окружности, сходящихся в угловых точках. Рассмотрим дугу $\widehat{A_2 A_3}$ окружности радиуса 1 между двумя угловыми точками A_2 и A_3 , которая состыковывается с дугой $\widehat{A_1 A_2}$ в точке A_2 . Так как обе полукасательные в точке A_2 равноудалены от начала координат на расстояние λ , эти дуги образуют одинаковые углы (равные φ) с лучом $A_2 O_1$. Так как A_3 – угловая точка, полукасательная в ней к дуге $\widehat{A_2 A_3}$ удалена от O_1 на расстояние λ .

Наконец, так как по углу φ дуга $\widehat{A_2 A_3}$ единичной окружности восстанавливается однозначно с точностью до поворота, длины дуг $\widehat{A_1 A_2}$ и $\widehat{A_2 A_3}$ равны и эти дуги симметричны относительно прямой $O_1 A_2$.

Рассматривая следующую дугу $\widehat{A_3A_4}$ между двумя угловыми точками A_3 и A_4 , и применяя аналогичные рассуждения, получим, что длины $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, $\widehat{A_3A_4}$ и углы в вершинах A_2 , A_3 – равны. И так далее. Так как каждая следующая дуга имеет одну и ту же длину, то таких дуг будет конечное число. Более того, если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – соответствующие угловые точки, то углы между полукасательными в вершинах $A_2, \dots, A_n$ одинаковы и равны 2φ . Так как кривая γ замкнута и вложена, то и угол в вершине A_1 тоже равен 2φ .

Таким образом, оптимальная кривая γ есть правильный криволинейный выпуклый n -угольник, составленный из равных дуг единичной окружности, вписанный в некоторую окружность σ радиуса $r < 1$. Будем считать, что его периметр $L \neq 0$, иначе кривая-точка, и $L \neq 2\pi$, иначе кривая – единичная окружность.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – вершины многоугольника γ . Так как его периметр равен L , в силу правильности получаем, что длина любой стороны A_iA_{i+1} , $i = 1, \dots, n$, равна L/n .

Из построения γ следует, что O_1 – центр окружности σ . В силу правильности $\angle A_iOA_{i+1} = 2\pi/n$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда площадь S_i части γ , ограниченной углом $\angle A_iOA_{i+1}$ и дугой A_iA_{i+1} , для любого $i = 1, \dots, n$ равна

$$S' := S_i = \frac{L}{2n} - r \sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{L}{2n}\right), \quad (2.20)$$

где для радиуса r справедливо

$$\sin \frac{L}{2n} = r \sin \frac{\pi}{n}. \quad (2.21)$$

Учитывая (2.20) и (2.21), для площади S многоугольника γ получаем

$$S = S(n) = nS' = \frac{L}{2} - n \frac{\sin(L/(2n)) \sin(\pi/n - L/(2n))}{\sin(\pi/n)}. \quad (2.22)$$

Так как n – число сторон криволинейного многоугольника, в (2.22) $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

Покажем, что площадь $S(n)$ будет достигать своего минимального значения при $n = 2$, т.е. когда γ – луночка. Для этого рассмотрим функцию

$$F(t) := \frac{L}{2} - \frac{\sin(Lt/2) \sin(\pi t - Lt/2)}{t \sin(\pi t)},$$

принимаящую при $t = 1/n$ значения $S(n)$.

Для доказательства того, что $S(n)$ принимает наименьшее значение при $n = 2$, достаточно показать, что $F(t)$ строго монотонно убывает при $0 < t \leq 1/2$.

Перепишем $F(t)$ в виде

$$F(t) = \frac{L}{2} - \frac{1}{t(\cot(Lt/2) + \cot(\pi t - Lt/2))}. \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует, что строгое монотонное убывание $F(t)$ при $0 < t \leq 1/2$ равносильно строгому монотонному убыванию функции $f(t) := t \cot(Lt/2) + t \cot((\pi - L/2)t)$ на том же промежутке. Заметим, что

$$0 < \frac{L}{2} < \pi \quad \text{и} \quad 0 < \pi - \frac{L}{2} < \pi. \quad (2.24)$$

На промежутке $0 < t \leq 1/2$ рассмотрим функцию $g(t) = t \cot(bt)$, где $0 < b < \pi$. Имеем

$$g' = \frac{\sin(2bt) - 2bt}{2 \sin^2(bt)} < 0,$$

так как $0 < 2bt \leq \pi$, а на $(0; \pi]$ мы знаем, что $\sin x < x$. Значит, на указанном промежутке $g(t)$ строго монотонно убывает. Из этого, с учетом замечания (2.24), следует, что тем же свойством и на том же промежутке обладает и $f(t)$ (как сумма монотонных). А значит, площадь $S(n)$ достигает своего минимума при $n = 2$.

Таким образом, с необходимостью, решением задачи (2.8) является правильный криволинейный двугульник, составленный из двух равных дуг единичной окружности длины $L/2$. При этом решение задачи (2.8) существует в силу теоремы выбора Бляшке (см. [3]). А значит, правильный криволинейный двугульник и есть решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения*, Факториал Пресс, М., 2006.
- [2] А. А. Милютин, А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский, *Принцип максимума в оптимальном управлении*, Изд-во Центра прикл. иссл. при мех.-мат. фак-те МГУ, М., 2004.
- [3] В. Бляшке, *Круг и шар*, Наука, М., 1967.

А. А. Борисенко

Сумский государственный университет, Украина
E-mail: aborisenk@gmail.com

Поступило

24.05.2012

К. Д. Драч

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина, Украина
Сумский государственный университет, Украина
E-mail: kostya.drach@gmail.com