Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Жиров, Сколько различных каскадов на поверхности могут иметь одинаковые гиперболические аттракторы, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 109–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 02:51:52

Сколько различных каскадов на поверхности могут иметь одинаковые гиперболические аттракторы

А. Ю. Жиров

Показано, что число существенно не сопряженных (т.е. не являющихся итерациями топологически сопряженных) диффеоморфизмов поверхности, имеющих гомеоморфные одномерные гиперболические аттракторы, может быть большим любого наперед заданного, если род поверхности достаточно велик. Дается оценка снизу этого числа в зависимости от рода поверхности. Приводится соответствующий результат для псевдоаносовских гомеоморфизмов.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9682

1. Постановка вопроса и формулировка результатов

Вопрос о гомеоморфизме гиперболических аттракторов естественным образом возник сразу после того, как в конце 60-х–начале 70-х годов прошлого века были построены первые их примеры с нетривиальными топологическими свойствами, что привело к появлению термина “странный аттрактор”. Впрочем, в дальнейшем большее внимание привлекла задача о классификации динамических систем, в частности, гладких каскадов, обладающих такими аттракторами, а не самих аттракторов как геометрических объектов безотносительно к динамике, которая их порождает.

В ряде работ был достигнут значительный прогресс в решении задачи о топологической сопряженности диффеоморфизмов, задающих каскады с гиперболическими аттракторами различных классов (см., например, [1], [2]). В частности, были получены необходимые и достаточные условия (в известном смысле эффективно проверяемые) топологической сопряженности диффеоморфизмов, порождающих аттракторы коразмерности один на многообразиях размерности большей двух [3], а также диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами [4].

Необходимые и достаточные условия гомеоморфности аттракторов были установлены в [5] для аттракторов первого из указанных выше классов. Здесь и ниже *под гомеоморфностью аттракторов понимается существование гомеоморфизма многообразия, переводящего один из них в другой*. Оказалось, что эти условия “не на много слабее” условий сопряженности. Имеется в виду следующее. Ясно, что

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5998.2012.1).

если диффеоморфизмы топологически сопряжены, то их аттракторы гомеоморфны; но могут ли не сопряженные диффеоморфизмы иметь гомеоморфные аттракторы? Поскольку любая итерация диффеоморфизма имеет тот же самый аттрактор, ставя этот вопрос не следует различать итерации сопряженных диффеоморфизмов, как не следует различать диффеоморфизмы сопряженные на некоторых окрестностях аттракторов, а не обязательно на всем многообразии (окрестностная сопряженность). Результат работы [5] легко переносится на диффеоморфизмы поверхностей, но только в случае, когда степени так называемых связок достижимой границы аттрактора не превышают двух. Так вот оказывается, что если степени связок аттракторов равны 1, то они могут быть гомеоморфными только в случае сопряженности порождающих их диффеоморфизмов в указанном выше смысле. В случае, когда все связки аттрактора имеют степень два, существует ровно два существенно не сопряженных диффеоморфизма, порождающих такой аттрактор. Эти случаи относятся к аттракторам диффеоморфизмов сферы и тора.

В настоящей заметке это утверждение частично переносится на случай аттракторов диффеоморфизмов поверхностей большего рода.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M есть замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \neq 2 \pmod{3}$. Существует $[(g+1)/2] + 1$ диффеоморфизмов $M \rightarrow M$, удовлетворяющих аксиоме А, неблуждающее множество каждого из которых состоит из одномерного гиперболического аттрактора и отталкивающих периодических точек, причем аттракторы этих диффеоморфизмов гомеоморфны, а сами диффеоморфизмы не являются итерациями топологически сопряженных диффеоморфизмов.

Доказательство сводится к построению примеров. При этом мы построим примеры псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхности, из которых требуемые диффеоморфизмы с гиперболическими аттракторами получаются обобщенной хирургической операцией в окрестностях особых точек инвариантных слоений. Прежде чем напомнить соответствующие факты, заметим, что во-первых построение псевдоаносовского гомеоморфизма в значительной степени аналогично построению диффеоморфизма с аттрактором (общий метод такого построения описан в [4]), но в меньшей степени отягощено техническими деталями, а во-вторых получающиеся примеры доказывают утверждение о псевдоаносовских гомеоморфизмах, аналогичное теореме 1 и, возможно, представляющее самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M есть замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \neq 2 \pmod{3}$. Существует $[(g+1)/2] + 1$ псевдоаносовских гомеоморфизмов $M \rightarrow M$, сжимающиеся и растягивающиеся инвариантные слоения которых топологически эквивалентны, а сами эти гомеоморфизмы не являются итерациями топологически сопряженных.

Гомеоморфизм f поверхности M называется псевдоаносовским, если существует пара инвариантных относительно f трансверсальных слоений с конечным числом общих особенностей, причем f растягивает слои одного с коэффициентом $\lambda > 1$, называемым дилатацией, и сжимает слои другого с коэффициентом λ^{-1} . Особенности каждого из инвариантных слоений таковы, что в их окрестности слои ведут себя как траектории комплексного квадратичного дифференциала $z^{d-1} dz$, где число $d \geq 2$ называется валентностью особенности (см. рис. 1а). Если допускаются особенности валентности 1 (рис. 1б), то гомеоморфизм называется обобщенным

псевдоаносовским. Последовательность $\{b_d : d \in \mathbb{N}\}$, где b_d есть число особенностей валентности d называется *сингулярным типом* (обобщенного) псевдоаносовского гомеоморфизма. Отметим, что особенность валентности 2, это конечно “не настоящая” особенность, но иногда имеет смысл считать таковыми некоторые не особые периодические точки (см. конец следующего абзаца). Наконец, напомним, что два слоения называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $M \rightarrow M$, переводящий слои одного в слои другого. Можно считать, что псевдоаносовский гомеоморфизм есть локальный диффеоморфизм в окрестности любой точки, кроме особых точек.

Рис. 1. Слоения в окрестностях особых точек валентности 3 и 1 (а, б), хирургическая операция в их окрестностях (в, г) и ламинация Λ (д, е).

Обобщенная хирургическая операция это C^0 -малое изменение f' псевдоаносовского гомеоморфизма f в окрестностях особых точек, при котором каждая особая точка превращается в отталкивающую периодическую точку того же периода, а на каждом исходящем из нее сжимающемся особом слое вблизи нее появляется седловая периодическая точка периода, равного периоду этого слоя относительно f (рис. 1 в, г). Это изменение может быть сделано так, что f' будет диффеоморфизмом, сжимающееся слоение f останется таковым и для f' (только сжатие перестанет быть равномерным), а слои растягивающегося слоения “раздвинутся” и само оно преобразуется в “ламинацию” Λ (рис. 1 д, е), т.е. нигде не плотное подмножество поверхности, локально устроенное как произведение канторова множества на отрезок. В результате оказывается, что диффеоморфизм f' удовлетворяет аксиоме А Смейла с неблуждающим множеством, состоящим из конечного набора отталкивающих периодических точек (на месте особых точек инвариантных слоений f) и одномерного гиперболического аттрактора, которым является ламинация Λ . Такое построение в случае оригинальной хирургической операции Смейла можно найти в [6; § 17.2]. Разница состоит в том, что там она описана для гиперболического авто-

морфизма тора (дiffeоморфизма Аносова), т.е. в окрестности особенности валентности 2 в нашей терминологии, а изменения, которые нужно внести очевидны.

Непосредственно из этой конструкции следует, что диффеоморфизмы с аттракторами, получающиеся из двух псевдоаносовских гомеоморфизмов f и g топологически сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены исходные гомеоморфизмы, а их аттракторы гомеоморфны тогда и только тогда, когда инвариантные слоения f и g топологически эквивалентны. Это и означает, что теорема 1 вытекает из теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждения теорем 1 и 2 тривиальны при $g = 0$. При $g = 1$, как уже отмечалось, оно следует из [5], хотя соответствующий пример построить совсем легко. Именно, рассмотрим гиперболические автоморфизмы тора, задаваемые матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad -A.$$

Определяемые ими диффеоморфизмы Аносова имеют общие инвариантные слоения, но не сопряжены. Нетрудно проверить, что именно эти два диффеоморфизма получаются в приводимой ниже конструкции при $m = 2$. Кроме того, при $m = 3$ эта конструкция приводит к паре не сопряженных обобщенных псевдоаносовских гомеоморфизмов с общими инвариантными слоениями. Последние имеют по три особенности валентности 3 и три особенности валентности 1, т.е. сингулярный тип этих гомеоморфизмов есть $\{b_1 = b_3 = 3\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения теорем 1 и 2 справедливы и при $g = 2$, хотя в настоящей заметке доказательство не приводится, поскольку оно требует построения другого примера, а это заметно увеличило бы объем текста. В действительности примеры двух нужных псевдоаносовских гомеоморфизмов кренделя известны: они приведены в разных местах и по другому поводу. Один пример приведен в [8], другой – в [9], где указано, что полученный гомеоморфизм не сопряжен с гомеоморфизмом из [8]. То обстоятельство, что эти гомеоморфизмы имеют топологически эквивалентные слоения можно увидеть, если построить их с помощью единой конструкции, подобной той, что применена в настоящей работе. Автор планирует привести ее в другой работе, посвященной вопросам, которые обсуждаются в упомянутых работах [8] и [9].

2. Конструкция

Для каждого $g \neq 2 \pmod{3}$ мы построим $g + 1$ псевдоаносовских гомеоморфизмов $f_0, f_1, \dots, f_g$ замкнутой ориентируемой поверхности рода g с общими инвариантными слоениями и одной и той же дилатацией. При этом ни один из них, кроме f_0 , не является итерацией никакого гомеоморфизма (лемма 4), а f_k и f_l топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $k + l = 0 \pmod{g + 1}$ (лемма 3). Такие свойства этого набора диффеоморфизмов доказывают теорему 2.

В действительности приводимая конструкция дает несколько больше. Именно, для каждого натурального m мы построим замкнутую ориентируемую поверхность $M^{(m)}$ и m ее псевдоаносовских гомеоморфизмов $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$ с теми же свойствами, что и выше (правда, при $m = 1$ и $m = 3$ это будут обобщенные псевдоаносовские гомеоморфизмы). Далее будет выяснено (лемма 1), что при $m \neq$

$0 \pmod{3}$ род поверхности $M^{(m)}$ есть $g = m - 1$. В противном случае он равен $m - 2$ и рассмотрение этих гомеоморфизмов "не интересно" с точки зрения рассматриваемой задачи, разве что кроме случая $m = 3$ ($g = 1$, см. замечание 1).

2.1. Построение замкнутой ориентируемой поверхности и пары трансверсальных слоений с особенностями. Начинаем с построения некоторой некомпактной поверхности с краем $\tilde{\Pi}$. Каждому $k \in \mathbb{Z}$ сопоставим отрезок $\tilde{I}_k$ длины 1. Эти отрезки будем называть *базисными*. Каждый из них снабдим ориентацией, о которой будем говорить "слева направо", и трансверсальным направлением, о котором будем говорить "снизу вверх". Определим два разбиения каждого такого отрезка. Одно – будем называть его *верхним* – состоит из двух отрезков $\tilde{\Delta}_{1,k}, \tilde{\Delta}_{2,k}$, а другое, назовем его *нижним*, – из четырех отрезков $\tilde{\Delta}_{3,k}, \tilde{\Delta}_{4,k}, \tilde{\Delta}_{5,k}, \tilde{\Delta}_{6,k}$. Будем считать, что те и другие занумерованы в соответствии с направлением, выбранным на $\tilde{I}_k$, слева направо. Длины этих отрезков зададим следующим образом. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ есть правый собственный вектор матрицы

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

отвечающий ее собственному числу $\lambda > 1$, нормированному условием $X_1 = 1/2$. Заметим, что ее характеристический полином есть $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$ так, что такое собственное число имеется, причем соответствующий собственный вектор положителен и, кроме того, $X_1 = X_2 + X_3$ (это вытекает из того, что $(1, -1, -1)$ есть левый собственный вектор матрицы G , отвечающий собственному числу 1). Пользуясь этим и определим длины элементов разбиений отрезков $\tilde{I}_k$, полагая

$$|\tilde{\Delta}_{1,k}| = |\tilde{\Delta}_{2,k}| := X_1; \quad |\tilde{\Delta}_{3,k}| = |\tilde{\Delta}_{4,k}| := X_2; \quad |\tilde{\Delta}_{5,k}| = |\tilde{\Delta}_{6,k}| := X_3.$$

Каждой паре отрезков $\tilde{I}_k, \tilde{I}_{k+1}$ приклеим ленту $\tilde{\Pi}_{1,k}$ вдоль отрезков $\tilde{\Delta}_{1,k}, \tilde{\Delta}_{1,k+1}$, которые будем называть *концами* ленты. По определению лента $\tilde{\Pi}_{1,k}$ есть гомеоморфный образ прямоугольника $[0, X_1] \times [0, Y_1]$ при его отображении в поверхность $\tilde{\Pi}$, которую мы строим. Здесь Y_1 есть компонента левого собственного вектора $\mathbf{Y}$ матрицы G , отвечающего тому же собственному числу λ , что и $\mathbf{X}$ (условие нормировки для него не существенно). Будем считать, что указанный гомеоморфизм определяет на $\tilde{\Pi}_{1,k}$ плоскую риманову метрику и говорить, что X_1 и Y_1 суть *ширина* и *длина* ленты $\tilde{\Pi}_{1,k}$. Аналогично приклеим по две ленты $\tilde{\Pi}_{2,k}, \tilde{\Pi}_{3,k}$ к каждой паре отрезков $\tilde{I}_k, \tilde{I}_{k-1}$ вдоль отрезков $\tilde{\Delta}_{3,k}, \tilde{\Delta}_{4,k-1}$ и $\tilde{\Delta}_{5,k}, \tilde{\Delta}_{6,k-1}$ соответственно. Ширина и длина ленты $\tilde{\Pi}_{2,k}$ равны X_2 и Y_2 , а ленты $\tilde{\Pi}_{3,k}$ равны X_3 и Y_3 . Получаем поверхность $\tilde{\Pi} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\Pi}_k$, где $\tilde{\Pi}_k := \tilde{\Pi}_{1,k} \cup \tilde{\Pi}_{2,k} \cup \tilde{\Pi}_{3,k}$. Это гладкая некомпактная поверхность с кусочно-гладким краем, изображенная на рис. 2а.

Плоские метрики на лентах определяют плоскую метрику на этой поверхности. Кроме того, мы определим два ее разбиения. Одно – назовем его *вертикальным* – состоит из дуг вида $\phi_{i,k}(\{x\} \times [0, Y_i]) \subset \tilde{\Pi}_{i,k}$, где $\phi_{i,k}: [0, X_i] \times [0, Y_i] \rightarrow \tilde{\Pi}_{i,k}$ – "координатные отображения". Другое, назовем его *горизонтальным*, состоит из базисных отрезков и дуг вида $\phi_{i,k}([0, X_i] \times \{y\}) \subset \tilde{\Pi}_{i,k}$, $y \notin \{0, Y_i\}$. Вертикальные дуги пересекаются с горизонтальными под прямыми углами. Поэтому края лент, имеющие

Рис. 2. а) Поверхность $\tilde{\Pi}$ из конструкции п. 2.1; б) образы лент под действием отображения $\tilde{f}$ из конструкции п. 2.2; в) образы лент под действием отображения $\tilde{h}$ из доказательства леммы 3.

общие точки внутри базисных отрезков (таковых четыре на каждом из них), пересекаются под нулевыми углами, а объединение двух краев лент, имеющих общий конец базисного отрезка, есть гладкая кривая.

Фиксируем натуральное m и определим гомеоморфизм $\tilde{s}_m: \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}$, переводящий ленты в ленты. Именно, положим

$$\tilde{s}_m|_{\tilde{\Pi}_{i,k}} := \phi_{i,k+m} \circ \phi_{i,k}^{-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В частности, имеем $\tilde{s}_m(\tilde{I}_k) = \tilde{I}_{k+m}$ и $\tilde{s}_m(\tilde{\Pi}_k) = \tilde{\Pi}_{k+m}$. Итерации гомеоморфизма $\tilde{s}_m$ определяют вполне разрывное действие группы $\mathbb{Z}$ на поверхности $\tilde{\Pi}$. Обозначим через $\Pi = \Pi^{(m)}$ факторпространство по этому действию¹. Оно представляет

¹В дальнейшем, когда рассмотрение будет вестись при фиксированном m и не смогут возникнуть недоразумения, мы для краткости будем опускать индекс m здесь, а также в обозначении вводимых ниже подмножеств Π таких, как I_k , $\Pi_{i,k}$ и т.п., и замкнутой поверхности $M = M^{(m)}$, которая будет построена исходя из Π .

собой компактную гладкую поверхность с кусочно гладким краем, которая имеет структуру ленточной поверхности, т.е. состоит из m базисных отрезков $I_0, \dots, I_{m-1}$, $I_k := \text{pr}_m(\tilde{I}_k)$, где $\text{pr}_m: \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi$ – накрытие, и $3m$ лент $\Pi_{i,k} := \text{pr}_m(\tilde{\Pi}_{i,k})$, $i = 1, 2, 3$, $0 \leq k \leq m-1$. Проекция на Π элементов горизонтального и вертикального разбиений $\tilde{\Pi}$ будем называть горизонтальными и вертикальными дугами в Π .

Построим исходя из поверхности $\Pi^{(m)}$ замкнутую поверхность $M = M^{(m)}$, а исходя из ее горизонтального и вертикального разбиений – пару трансверсальных слоев на M с общими особенностями.

Для этого сначала рассмотрим край поверхности $\tilde{\Pi}$. Он состоит из шести компонент (каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{R}$): $\tilde{\delta}_0^0, \tilde{\delta}_0^1, \tilde{\delta}_0^2, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3$ (см. рис. 2 а, на котором видно, как они обозначены). Скольжение $\tilde{s}_m$ циклически переводит друг в друга компоненты $\tilde{\delta}_0^j$ и оставляет инвариантной каждую из компонент $\tilde{\delta}_i$. Поэтому три последние проектируются в три различные компоненты края поверхности Π , а три первые проектируются в одну и ту же компоненту края Π , если m не кратно трем, и в три различные компоненты в противном случае.

Пусть сперва $m \neq 0 \pmod{3}$. Тогда край Π состоит из четырех компонент $\delta_0 := \text{pr}_m(\tilde{\delta}_0^j)$, $\delta_i := \text{pr}_m(\tilde{\delta}_i)$. Каждая из них представляет собой m -угольник с вершинами на базисных отрезках, нулевыми углами и сторонами, являющимися объединениями краев лент (рис. 3), причем длины сторон одного и того же m -угольника равны в смысле введенной на Π плоской метрики. Отметим середины сторон каждого m -угольника и склеим отрезки смежных сторон, соединяющие их середины с соответствующей вершиной. При этом середины сторон m -угольника δ_i склеятся в одну точку, которую обозначим p_i . В результате получится замкнутая поверхность M с множеством отмеченных точек $\mathcal{P} := \{p_i : i = 0, \dots, 3\}$.

Рис. 3. m -Угольная компонента края поверхности Π и окрестности особых точек слоев поверхности M после склейки. Показана компонента δ_0 с нумерацией базисных отрезков по модулю $m (= 5)$.

Из горизонтального и вертикального разбиений поверхности Π в результате этих склеек получаются слои M , устроенные следующим образом. Элементы горизонтального разбиения Π назовем горизонтальными дугами в M . Вертикальными дугами в M будем считать вертикальные дуги в Π , не являющиеся краями лент, а также те дуги, которые получились при склеивании частей смежных сторон m -угольников. Горизонтальный W_x^s (вертикальный W_x^u) слой, проходящий через точку x , не являющуюся отмеченной, определим как максимальное линейно

связное подмножество M , содержащее эту точку, являющееся объединением горизонтальных (вертикальных) дуг и такое, что никакие две из этих дуг не имеют общим концом отмеченную точку. Очевидно, что каждое из множеств $\mathcal{W}^s := \{W_x^s : x \in M \setminus \mathcal{P}\}$ и $\mathcal{W}^u := \{W_x^u : x \in M \setminus \mathcal{P}\}$ представляет собой слоение с особенностями валентности m в точках множества $\mathcal{P}$ и эти слоения трансверсальны во всех точках $M \setminus \mathcal{P}$, назовем их *горизонтальным и вертикальным слоениями* соответственно. Так как индекс особенности валентности m есть $(2 - m)/2$, а согласно формуле Эйлера–Пуанкаре сумма индексов равна эйлеровой характеристике поверхности, получаем, что $\chi(M) = 4 - 2m$, т.е. M есть замкнутая ориентируемая поверхность рода² $g = m - 1$.

В случае $m \equiv 0 \pmod{3}$ поверхность M и слоения $\mathcal{W}^s$ и $\mathcal{W}^u$ строятся совершенно аналогично³. Разница состоит в том, что теперь край поверхности Π состоит из трех m -угольников $\delta_i = \text{pr}_m(\tilde{\delta}_i)$, $i = 1, 2, 3$, и трех $m/3$ -угольников $\delta_0^j = \text{pr}_m(\tilde{\delta}_0^j)$, $j = 0, 1, 2$. Склеивая отрезки на их краях так же, как и в рассмотренном выше случае, получаем замкнутую поверхность и пару трансверсальных слоений с шестью общими особенностями, три из которых имеют валентность m и три – валентность $m/3$, откуда по формуле Эйлера–Пуанкаре находим $\chi(M) = 6 - 2m$, т.е. это поверхность рода $m - 2$. Итак, доказана

ЛЕММА 1. *Если $m \not\equiv 0 \pmod{3}$, то $M^{(m)}$ есть замкнутая ориентируемая поверхность рода $g = m - 1$ и рода $m - 2$ в противном случае. В первом случае на ней задана пара трансверсальных слоений $\mathcal{W}^s, \mathcal{W}^u$ сингулярного типа $\{b_m = 4\}$, во втором их сингулярный тип есть $\{b_m = b_{m/3} = 3\}$.*

2.2. Построение псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхности $M^{(m)}$, для которых горизонтальное и вертикальное слоения являются сжимающимся и растягивающимся. Начнем с построения гомеоморфизма $\tilde{f}$ поверхности $\tilde{\Pi}$, накрывающего гомеоморфизм поверхности $\Pi = \text{pr}_m(\tilde{\Pi})$. Сначала определим подмножества $\tilde{\Pi}$, которые будут образами множеств $\tilde{\Pi}_k := \bigcup_{i=1}^3 \tilde{\Pi}_{i,k}$. Для этого каждую из лент $\tilde{\Pi}_{1,k}$ и $\tilde{\Pi}_{2,k}$ разобьем вертикальными дугами на три *полосы* (ленту $\tilde{\Pi}_{3,k}$ будем считать состоящей из одной полосы). Ширины полос зададим равными $\lambda^{-1}X_i$ в соответствии с рис. 2б, где на полосе указан номер i , соответствующий ее ширине. Корректность определения, т.е. то, что ширина ленты равна сумме ширин, составляющих ее полос, вытекает из того, что X_i суть компоненты правого собственного вектора матрицы G (2.1), отвечающего собственному числу λ .

Зададим отображение $\tilde{f}$ на базисных отрезках $\tilde{I}_k$ так, что оно оставляет неподвижным левый конец каждого из них, сжимая его с коэффициентом λ^{-1} . Образы выделены жирными линиями на рис. 2б. Далее, продолжим $\tilde{f}$ на ленту $\tilde{\Pi}_{1,0}$ таким образом, чтобы ее образ был объединением трех полос, лежащих в лентах $\tilde{\Pi}_{1,0}$, $\tilde{\Pi}_{3,2}$ и $\tilde{\Pi}_{1,1}$ как показано на рис. 2б. Эти полосы имеют одинаковую ширину $\lambda^{-1}X_1$, а суммарная их длина есть $2Y_1 + Y_3 = \lambda Y_1$, поскольку $\mathbf{Y}$ есть левый собственный вектор матрицы G . Поэтому отображение $\tilde{f}|_{\tilde{\Pi}_{1,0}}$ можно определить как линейное, сжимающее горизонтальные дуги с коэффициентом λ^{-1} и растягивающее вертикальные с коэффициентом λ . Аналогично продолжим $\tilde{f}$ на ленты $\tilde{\Pi}_{2,0}$ и $\tilde{\Pi}_{3,0}$. Первая переходит в три полосы, лежащие в лентах $\tilde{\Pi}_{2,0}$, $\tilde{\Pi}_{1,-2}$ и $\tilde{\Pi}_{2,-1}$ (их ширины равны $\lambda^{-1}X_2$,

²Для замкнутой ориентируемой поверхности $\chi(M) = 2 - 2g$.

³В сущности для доказательства теоремы 2 этот случай рассматривать не нужно.

а сумма длин $Y_1 + 2Y_2 = \lambda Y_2$), а вторая – в полосу, лежащую в ленте $\tilde{\Pi}_{2,0}$ (ее ширина есть $\lambda^{-1}X_3$, а длина $Y_2 = \lambda Y_3$). Таким образом, отображение $\tilde{f}$ определено на множестве $\tilde{\Pi}_0$. При этом на концах лент оно совпадает с данным выше определением $\tilde{f}$ на отрезках $\tilde{I}_{-1}$, $\tilde{I}_0$, $\tilde{I}_1$. Это вытекает из линейности отображения и того, что, как видно на рис. 2б, образ конца ленты $\tilde{\Pi}_{1,0}$, лежащего на отрезке $\tilde{I}_1$, переходит в отрезок, содержащийся в $\tilde{I}_1$, а образы концов лент $\tilde{\Pi}_{2,0}$ и $\tilde{\Pi}_{3,0}$, лежащие на $\tilde{I}_{-1}$, переходят в отрезки, содержащиеся в $\tilde{I}_{-1}$.

Это делает корректным продолжение отображения $\tilde{f}$ на оставшуюся часть поверхности $\tilde{\Pi}$, т.е. на каждое из множеств $\tilde{\Pi}_k$, $k \neq 0$, по следующей формуле:

$$\tilde{f}|_{\tilde{\Pi}_k} := \tilde{s}_k \circ \tilde{f}|_{\tilde{\Pi}_0} \circ \tilde{s}_{-k}. \quad (2.2)$$

Из этого определения следует, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\Pi}_k & \xrightarrow{\tilde{s}_{-k}} & \tilde{\Pi}_0 & \xrightarrow{\tilde{f}|_{\tilde{\Pi}_0}} & \tilde{\Pi} & \xrightarrow{\tilde{s}_k} & \tilde{\Pi} \\ \tilde{s}_m \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \tilde{s}_m \downarrow \\ \tilde{\Pi}_{k+m} & \xrightarrow{\tilde{s}_{-k-m}} & \tilde{\Pi}_0 & \xrightarrow{\tilde{f}|_{\tilde{\Pi}_0}} & \tilde{\Pi} & \xrightarrow{\tilde{s}_{k+m}} & \tilde{\Pi} \end{array}$$

и, следовательно, отображение $\tilde{f}$ коммутирует со скольжениями. Поэтому при фиксированном m оно накрывает единственное отображение $f: \Pi \rightarrow \Pi$.

Это отображение взаимно однозначно на внутренности поверхности Π , но склеивает некоторые точки края. Однако это именно те точки, которые склеиваются при построении поверхности M . Это вытекает из того, что, во-первых, f растягивает стороны многоугольников на крае Π с одним и тем же коэффициентом λ , а во-вторых, переводит середину каждой стороны такого многоугольника в середину некоторой стороны одного из них же. Последнее нетрудно проверить с помощью рис. 2б. Из него видно, что сторона многоугольника δ_3 отображается на сторону δ_2 . Сторона δ_2 переходит в дугу, состоящую из трех вертикальных дуг, причем средняя из них есть сторона δ_1 , а две крайние имеют одинаковые длины, равные Y_2 , так что середина стороны δ_2 переходит в середину стороны δ_1 . Точно также получаем, что середина стороны δ_1 переходит в середину стороны δ_3 . Наконец заметим, что середина стороны δ_0 есть левый конец базисного отрезка: она состоит из двух дуг, имеющих эту точку общим концом. Первая дуга это край ленты $\Pi_{2,k}$ и ее длина есть Y_2 , а вторая – объединение краев лент $\Pi_{1,k}$ и $\Pi_{3,k}$ и ее длина есть $Y_1 + Y_3$. Осталось заметить, что длины этих дуг равны. Это вытекает из того, что $(1, -1, 1)^T$ есть правый собственный вектор матрицы G , отвечающий собственному числу 1. Так как левые концы базисных отрезков суть неподвижные точки по построению, требуемое утверждение доказано.

Таким образом, после склейки дуг на крае поверхности Π отображение f становится псевдоаносовским гомеоморфизмом поверхности M , сжимающееся и растягивающееся слоения которого суть горизонтальное и вертикальное слоения M .

По гомеоморфизму f определим m гомеоморфизмов $f_k: M \rightarrow M$, $k = 0, \dots, m-1$, следующим образом. Рассмотрим отображение $s_k: M \rightarrow M$, которое получается после склейки краев поверхности Π из проекции отображения $\tilde{s}_k: \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}$. Это отображение можно рассматривать как вращение поверхности Π . Положим $f_k :=$

$s_k \circ f$, в частности, $f_0 = f$. Очевидно, что все гомеоморфизмы f_k различны и обладают теми же свойствами, что f . В частности, они псевдоаносовские и их сжимающиеся и растягивающиеся слоения одни и те же. Из конструкции вытекают следующие свойства построенных гомеоморфизмов.

ЛЕММА 2. *Если $m \neq 0 \pmod{3}$, то f_k есть псевдоаносовский гомеоморфизм (обобщенный при $m = 1$) поверхности M рода $m-1$, с четырьмя особенностями валентности m инвариантных слоений, одна из которых p_0 есть неподвижная точка, а три других образуют периодическую орбиту. Если $m = 0 \pmod{3}$, то f_k есть псевдоаносовский гомеоморфизм (обобщенный при $m = 3$) поверхности M рода $m-2$ с тремя особенностями валентности m , образующими периодическую орбиту, и тремя особенностями валентности $m/3$, которые также образуют периодическую орбиту.*

3. Доказательство теоремы 2

Далее предполагаем, что $m \neq 0 \pmod{3}$. Кроме того, будем считать, что множество индексов k , нумерующих гомеоморфизмы f_k , есть группа $\mathbb{Z}_m$ и то же самое относится к индексам, нумерующим базисные отрезки I_k и ленты $\Pi_{i,k}$, $i = 1, 2, 3$. Соответственно, арифметические операции над этими индексами понимаются в смысле групповой операции в этой группе.

ЛЕММА 3. *Гомеоморфизмы f_k и f_l топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $k + l = 0 \pmod{m}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что условие $k + l = 0 \pmod{m}$ необходимо для топологической сопряженности гомеоморфизмов f_k и f_l . Все гомеоморфизмы f_k по построению имеют одно и то же сжимающееся инвариантное слоение, имеющее единственную особую точку p_0 , которую каждый f_k оставляет неподвижной, а выходящие из нее особые слои переводит друг в друга. Поэтому гомеоморфизму f_k соответствует вполне определенный элемент φ_k группы Γ_m преобразований правильного m -угольника, а поскольку f_k сохраняет ориентацию, φ_k есть вращение. Гомеоморфизм h , сопрягающий f_k и f_l , также оставляет точку p_0 неподвижной и переводит исходящие из нее слои друг в друга. Поэтому ему также соответствует некоторый элемент группы Γ_m (это не обязательно вращение, поскольку не предполагается, что h сохраняет ориентацию) и он сопрягает φ_k и φ_l . Следовательно, либо $\varphi_k = \varphi_l$, либо $\varphi_k = \varphi_l^{-1}$ (в группе Γ_m два вращения сопряжены тогда и только тогда, когда они взаимно обратны).

Остается доказать, что все преобразования φ_k различны и $\varphi_k^{-1} = \varphi_{-k}$. Каждый особый слой, выходящий из точки p_0 , содержит один из базисных отрезков $I_0, \dots, I_{m-1}$. Обозначим эти слои через $W_0, W_1, \dots$, так, что $W_0 \subset I_0$ в соответствии с одним из направлений обхода вокруг p_0 . Его можно выбрать так, что следующим за $W_0 \subset I_0$ будет слой W_1 , содержащий отрезок I_3 (см. рис. 2а, точнее – его продолжение за правую кромку листа вдоль кривой γ_0^0). Тогда $W_j \supset I_{3j \pmod{m}}$ и

$$f_k(W_j) \supset f_k(I_{3j}) \subset I_{3j+k}.$$

Следовательно, $f_k(W_j) = W_{j'}$, где $3j' = 3j + k \pmod{m}$. Иными словами φ_k есть поворот на угол $2\pi/t_k$, где t_k решение сравнения $3t_k = k \pmod{m}$. Поскольку

$m \neq 0 \pmod{3}$ решение этого сравнения единственно при фиксированном k , решения при различных k различны и $t_{-k} = -k \pmod{m}$. Следовательно, все вращения φ_k различны, а φ_k и φ_{-k} взаимно обратны, что и требовалось.

Для доказательства леммы остается проверить, что гомеоморфизмы f_k и f_{-k} топологически сопряжены и мы просто предъявим сопрягающий гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, причем это будет псевдоаносовский гомеоморфизм M с теми же инвариантными слоениями, что и у гомеоморфизмов f_k . Для его построения рассмотрим ту же самую поверхность $\tilde{\Pi}$ (рис. 2а), составленную из лент $\tilde{\Pi}_{i,j}$, приклеенных к базисным отрезкам $\tilde{I}_j$, и снабженную всеми атрибутами, введенными выше. Построение гомеоморфизма h аналогично построению гомеоморфизма f , по которому были построены гомеоморфизмы f_k ; поэтому укажем главным образом отличия конструкции (рис. 2в).

Начинаем с ленточного отображения $\tilde{h}: \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}$. Оно переводит базисный отрезок $\tilde{I}_0$ в себя, а остальные друг в друга так, что $\tilde{h}(\tilde{I}_k) \subset \tilde{I}_{-k}$. При этом все они сжимаются к левым концам с коэффициентом λ_h , являющимся максимальным собственным числом матрицы

$$G_h = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $G_h^2 = G$, где G матрица, определенная формулой (2.1). В частности у нее те же собственные векторы и $\lambda_h = \sqrt{\lambda_f}$, где λ_f – дилатация гомеоморфизмов f_k . Для продолжения $\tilde{h}$ на ленты рассмотрим то же, что и выше разбиение каждой ленты $\tilde{\Pi}_{1,j}$ на три полосы, а ленты $\tilde{\Pi}_{2,j}$ и $\tilde{\Pi}_{3,j}$ будем считать, состоящими из одной полосы каждую. Отобразим ленты $\tilde{\Pi}_{1,0}$ на ленту $\tilde{\Pi}_{2,0}$, $\tilde{\Pi}_{2,0}$ на объединение трех полос, лежащих в лентах $\tilde{\Pi}_{1,0}$, $\tilde{\Pi}_{3,2}$ и $\tilde{\Pi}_{1,1}$, $\tilde{\Pi}_{3,0}$ на полосу, лежащую в ленте $\tilde{\Pi}_{1,0}$, как показано на рис. 2в. Точно так же, как при построении отображения $\tilde{f}$, убеждаемся в том, что эти отображения можно задать как линейные, сжимающие горизонтальные и растягивающие вертикальные дуги с коэффициентами λ_h^{-1} и λ_h соответственно. Заметим, что образ конца ленты $\tilde{\Pi}_{1,0}$, лежащий на $\tilde{I}_1$, перешел в отрезок лежащий в $\tilde{I}_{-1}$, а концы двух других лент, лежащие на $\tilde{I}_{-1}$, – в отрезки, лежащие в $\tilde{I}_1$. Именно поэтому мы так определили $\tilde{h}$ на базисных отрезках. Соответственно зададим $\tilde{h}$ на множествах $\tilde{\Pi}_k$ следующей формулой (сравните с (2.2)):

$$\tilde{h}|_{\tilde{\Pi}_k} := \tilde{s}_{-k} \circ \tilde{h}|_{\tilde{\Pi}_0} \circ \tilde{s}_{-k}.$$

Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\Pi}_k & \xrightarrow{\tilde{s}_{-k}} & \tilde{\Pi}_0 & \xrightarrow{\tilde{h}|_{\tilde{\Pi}_0}} & \tilde{\Pi} & \xrightarrow{\tilde{s}_{-k}} & \tilde{\Pi} \\ \tilde{s}_m \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \tilde{s}_{-m} \downarrow \\ \tilde{\Pi}_{-k-m} & \xrightarrow{\tilde{s}_{-k-m}} & \tilde{\Pi}_0 & \xrightarrow{\tilde{h}|_{\tilde{\Pi}_0}} & \tilde{\Pi} & \xrightarrow{\tilde{s}_{-k-m}} & \tilde{\Pi} \end{array}$$

откуда следует, что $\tilde{s}_{-m} \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ \tilde{s}_m$ для каждого m . Поэтому при фиксированном m отображение $\tilde{h}$ накрывает отображение $h: \Pi^{(m)} \rightarrow \Pi^{(m)}$, причем такое, что

$$s_{-k} \circ h = h \circ s_k, \quad (3.1)$$

для каждого k .

Далее заметим, что $h^2 = f$. Действительно, во-первых образы лент под действием h^2 и f совпадают, что видно из сравнения рис. 2б и 2в, а во-вторых ограничения этих отображений на ленты линейны.

Собственно, для нас существенно, что f и h коммутируют, откуда и из (3.1) следует

$$h \circ f_k = h \circ s_k \circ f = s_{-k} \circ h \circ f = s_{-k} \circ f \circ h = f_{-k} \circ h,$$

что и требовалось.

ЛЕММА 4. Ни один из гомеоморфизмов f_k при $k \neq 0$ не является итерацией гомеоморфизма M .

Заметим, что $f_0 = h^2$, что было установлено в конце доказательства предыдущей леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: M^{(m)} \rightarrow M^{(m)}$ есть один из гомеоморфизмов f_k . Предположим, что $f = g^N$ для некоторого гомеоморфизма g . Прежде всего заметим, что тогда можно считать, что g псевдоаносовский. Действительно, согласно классификационной теореме Нильсена–Терстона g как и любой гомеоморфизм изотопен либо периодическому, либо приводимому, либо псевдоаносовскому. Если бы имел место один из первых двух случаев, то очевидно, что f также был изотопен либо периодическому, либо приводимому. Следовательно, g изотопен некоторому псевдоаносовскому гомеоморфизму g' , а f изотопен псевдоаносовскому гомеоморфизму $f' := g'^2$. Поскольку изотопные псевдоаносовские гомеоморфизмы топологически сопряжены (см. [7; Exposé 12]), в последующих рассуждениях при необходимости можно рассматривать пару гомеоморфизмов g', f' вместо g, f . При этом можно считать, что гомеоморфизм f' получен в результате той же самой конструкции, что f . Именно, имеет место разбиение поверхности M на ленты, обладающее теми же свойствами, поскольку сопрягающий гомеоморфизм переводит сжимающиеся и растягивающиеся слоения, их особые точки и т.д. для одного гомеоморфизма, в таковые для другого. Итак, пусть $f = g^N$, где g псевдоаносовский гомеоморфизм с дилатацией λ_g . Тогда

$$\lambda_g^N = \lambda_f \quad (= \lambda). \quad (3.2)$$

Так как сжимающиеся и растягивающиеся слоения для g те же самые, что для f , каждый базисный отрезок переходит под действием g в собственное подмножество некоторого базисного отрезка, а образ каждой вертикальной дуги γ_i ленты $\Pi_{i,j}$, $i = 1, 2, 3$, содержит некоторую вертикальную дугу одной из лент. При этом дуга $g(\gamma_i)$ не может совпадать с вертикальной дугой ленты $\Pi_{i,j'}$ (с тем же самым i) поскольку g растягивает вертикальные дуги. Рассмотрим какую-нибудь вертикальную дугу $\gamma_3 \subset \Pi_{3,0}$; ее длина есть Y_3 и это самая короткая из вертикальных дуг. Действительно, так как $\mathbf{Y}$ есть левый собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$ матрицы G , имеем

$$Y_1 = (\lambda - 2)Y_2 < Y_2, \quad Y_3 = (\lambda - 2)Y_1 < Y_1,$$

откуда вытекает, что $Y_2 > Y_1 > Y_3$. Поэтому $\lambda_g Y_3 = |g(\gamma_3)| \geq Y_1$, откуда

$$\lambda_g \geq \frac{Y_1}{Y_3} = \frac{1}{\lambda - 2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{\lambda_f}.$$

Отсюда и из (3.2) следует, что $N = 2$ и $\lambda_g = (\sqrt{5} - 1)/2$. При этом g переводит каждую вертикальную дугу γ_3 ленты $\Pi_{3,0}$ в вертикальную дугу некоторой ленты $\Pi_{1,j}$.

Снабдим дугу γ_3 ориентацией, считая, что ее начало лежит на базисном отрезке I_0 . Тогда ее конец лежит на I_{-1} (см. рис. 2а). Предположим, что $g(I_0) \subset I_j$ для некоторого j . Тогда образ γ_3 есть ориентированная вертикальная дуга, начало которой лежит на базисном отрезке I_j , то конец – на I_{j+1} . Отсюда следует, что $g(I_{-1}) \subset I_{j+1}$. Рассмотрим вертикальную ориентированную дугу с началом на отрезке I_{-1} , лежащую в ленте $\Pi_{3,-1}$; тогда ее конец лежит на I_{-2} , а образ есть дуга с началом на отрезке I_{j+1} и концом на I_{j+2} , откуда $g(I_{-2}) \subset I_{j+2}$. Рассуждая таким образом заключаем, что $g(I_{-i}) \subset I_{j+i}$ для каждого i , или, что то же самое, $g(I_i) \subset I_{j-i}$. Но тогда $f(I_i) = g^2(I_i) \subset I_i$ для каждого i , а из всех гомеоморфизмов f_k такие включения имеют место только для f_0 . Это завершает доказательство леммы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1(271) (1990), 3–32.
- [2] V. Grines, E. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:2 (2005), 617–667.
- [3] Р. В. Плыкин, “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 75–113.
- [4] А. Ю. Жиров, “Комбинаторика одномерных гиперболических аттракторов диффеоморфизмов поверхностей”, *Динамические системы и смежные вопросы геометрии*, Сборник статей. Посвящается памяти академика Андрея Андреевича Болибруха, Тр. МИАН, **244**, Наука, М., 2004, 143–215.
- [5] Р. В. Плыкин, “К проблеме топологической классификации странных аттракторов динамических систем”, *УМН*, **57**:6(348) (2002), 123–166.
- [6] А. Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [7] *Travaux de Thurston sur les surfaces. Séminaire Orsay*, Astérisque, **66–67**, Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [8] А. Ю. Жиров, “О минимуме дилатации псевдоаносовских диффеоморфизмов кренделя”, *УМН*, **50**:1(301) (1995), 197–198.
- [9] H. Minakawa, “Examples of pseudo-Anosov homeomorphisms with small dilatations”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **13** (2006), 95–111.

А. Ю. Жиров

Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского, г. Москва
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: alexei_zhirov@mail.ru

Поступило

02.05.2012

Исправленный вариант

25.10.2012