Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Малютин, И. И. Козлова, Н. Садык, Канонические функции допустимых мер в полуплоскости, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 418–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:52:31

Канонические функции допустимых мер в полуплоскости

К. Г. Малютин, И. И. Козлова, Н. М. Садык

Для γ -допустимой меры λ в верхней полуплоскости вводится понятие канонической функции, которое является обобщением канонического произведения Неванлинны для аналитических в полуплоскости функций конечного порядка. Показано, что для функции роста γ , определяемой уточненным порядком в смысле Бутру, введенное определение и каноническое произведение Неванлинны совпадают.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9685

1. Постановка задачи. Многие важные результаты в теории субгармонических функций получаются с использованием формул представления этих функций. Наиболее известная из них формула Пуассона–Иенсена, которая дает представление субгармонической функции в круге. Отметим также формулы Неванлинны, Симидзу–Альфorsa, Карлемана, Левина, которые приведены в [1]. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$, созданная Гришиным [2], в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Аналогичные формулы при различных ограничениях получали другие авторы [3]–[5].

В теории субгармонических функций часто возникает обратная задача: по заданной мере построить субгармоническую функцию, мера которой в точности совпадает с заданной мерой. Классические формулы Вейерштрасса, Адамара дают представление целых функций конечного порядка, нули которых совпадают с заданной последовательностью. Эти формулы были обобщены в работах Рубела [6], Хабибуллина [7], [8], Малютина и Герасименко [9], Малютина и Садыка [10], Денга [11] и др. Целью настоящей статьи является получить аналогичные формулы для мер конечного γ -типа, распределенных в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Основным инструментом работы является метод рядов Фурье, развитый в работах Рубела и Тейлора для мероморфных функций, и распространенный Малютиным на дельта-субгармонические функции в полуплоскости [12].

Мы вводим понятие канонической функции меры конечного γ -типа, распределенной в верхней полуплоскости, которая в случае дискретной меры совпадает с определением канонического произведения Неванлинны, построенного по нулям функции, аналитической в верхней полуплоскости [3].

В дальнейшем будем пользоваться терминологией работы [12]. Кроме того, следуя Титчмаршу [13], будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A , B . Может встретиться утверждение вроде “ $|f(z)| < A\gamma(Br)$; следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$ ”, которое не должно вызывать недоразумений.

2. Функции роста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, называется *функцией роста*.

Далее через $\gamma(r)$ всегда будет обозначаться некоторая (как правило, фиксированная) функция роста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины

$$\rho[\gamma] = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma(r)}{\ln r}, \quad \beta[\gamma] = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma(r)}{\ln r}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, называется *уточненным порядком в смысле Бутру*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$-\infty < \beta = \liminf_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \leq \rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \rho(r) < +\infty, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r)r \ln r = 0.$$

Если $\beta = \rho$, то функция $\rho(r)$ называется *уточненным порядком в смысле Валирона* (часто – просто *уточненным порядком*).

Функцию $r^{\rho(r)}$ мы будем обозначать через $V(r)$. Так как

$$V'(r) = \frac{1}{r} V(r)(\rho(r) + \rho'(r)r \ln r),$$

то из определения уточненного порядка следует, что функция $V(r)$ при $\beta > 0$ (а именно этот случай нас будет интересовать в дальнейшем) есть строго возрастающая функция в некоторой окрестности бесконечности. Ограничения, которые накладываются на функцию $\rho(r)$, касаются ее поведения в окрестности бесконечности. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы функция $V(r)$ при $\beta > 0$ была монотонной (например, $\rho'(r)r \ln r \geq -\rho(r)$), т.е. была функцией роста, причем $\lim_{r \rightarrow +0} V(r) = 1$.

Следующее полезное утверждение легко доказывается и хорошо известно [14] для уточненного порядка в смысле Валирона.

ЛЕММА 1. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Бутру. Если сегмент $[a, b]$ таков, что $a > 1$, то при любом $\varepsilon > 0$ асимптотически, равномерно относительно $l \in [a, b]$ выполняется соотношение

$$l^{\beta-\varepsilon} \leq \frac{V(lr)}{V(r)} \leq l^{\rho+\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{V(lr)}{V(r)} = l^{\rho(lr)} r^{\rho(lr) - \rho(r)}.$$

Пусть $\varepsilon(r) = \sup_{u \geq r} u \rho'(u) \ln u$. Заметим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0. \quad (2.1)$$

Тогда

$$|\rho(lr) - \rho(r)| = \left| \int_r^{lr} \rho'(u) du \right| \leq |\varepsilon(r)| \frac{(l-1)r}{r \ln r}.$$

Теперь из определения уточненного порядка и (2.1) легко следует утверждение леммы.

В дальнейшем будет полезна еще одна лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Бутру, δ – фиксированное положительное число. При $\lambda < \beta + 1$

$$\int_{\delta}^r \frac{V(t)}{t^{\lambda}} dt \leq \frac{V(r)r}{(\beta + 1 - \lambda)r^{\lambda}} + o\left(\frac{V(r)r}{r^{\lambda}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

а при $\lambda > \rho + 1$

$$\int_r^{\infty} \frac{V(t)}{t^{\lambda}} dt \leq \frac{V(r)r}{(\lambda - \rho - 1)r^{\lambda}} + o\left(\frac{V(r)r}{r^{\lambda}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (2.2). Обозначим через

$$\tilde{\varepsilon}(r) = \inf_{u \geq r} u \rho'(u) \ln u, \quad \varepsilon_1(r) = \inf_{u \geq r} (\rho(u) - \beta).$$

Ясно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\varepsilon}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_1(r) = 0. \quad (2.4)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^r \frac{t^{\beta}}{t^{\lambda}} \frac{V(t)}{t^{\beta}} dt &= \frac{V(t)t}{(\beta + 1 - \lambda)t^{\lambda}} \Big|_{\delta}^r - \frac{1}{\beta + 1 - \lambda} \int_{\delta}^r \left[\frac{V(t)}{t^{\lambda}} (\rho(t) - \beta) + \frac{V(t)t}{t^{\lambda}} \rho'(t) \ln t \right] dt \\ &\leq \frac{V(r)r}{(\beta + 1 - \lambda)r^{\lambda}} - \frac{1}{\beta + 1 - \lambda} \int_{\delta}^{r_1} \left[\frac{V(t)}{t^{\lambda}} (\rho(t) - \beta) + \frac{V(t)t}{t^{\lambda}} \rho'(t) \ln t \right] dt \\ &\quad - \frac{\varepsilon_1(r_1) + \tilde{\varepsilon}(r_1)}{\beta + 1 - \lambda} \int_{r_1}^r \frac{V(t)}{t^{\lambda}} dt + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$, воспользовавшись соотношением (2.4), выберем (и зафиксируем) число $r_1 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_1(r_1) + \tilde{\varepsilon}(r_1) \geq -\varepsilon(\beta + 1 - \lambda).$$

Тогда из (2.6) мы получим, что

$$\int_{\delta}^r \frac{V(t)}{t^{\lambda}} dt \leq \frac{V(r)r}{(\beta + 1 - \lambda)r^{\lambda}} + \varepsilon \int_{\delta}^r \frac{V(t)}{t^{\lambda}} dt + o\left(\frac{V(r)r}{r^{\lambda}}\right) + O(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует неравенство (2.2).

Для доказательства неравенства (2.3) положим

$$\varepsilon_2(r) = \sup_{u \geq r} (\rho(u) - \rho).$$

Ясно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_2(r) = 0. \quad (2.6)$$

Как и выше, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{t^\rho}{t^\lambda} \frac{V(t)}{t^\rho} dt &= \frac{V(t)t}{(\rho+1-\lambda)t^\lambda} \Big|_r^\infty + \frac{1}{\lambda-\rho-1} \int_r^\infty \left[\frac{V(t)}{t^\lambda} (\rho(t) - \rho) + \frac{V(t)t}{t^\lambda} \rho'(t) \ln t \right] dt \\ &\leq \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda} + \frac{\varepsilon_2(r) + \varepsilon(r)}{\lambda-\rho-1} \int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda} dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (2.1) и (2.6), получим, что

$$(1 + o(1)) \int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda} dt \leq \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda}, \quad r \rightarrow \infty,$$

и, наконец,

$$\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda} dt \leq \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda} + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Лемма полностью доказана.

3. Классы функций в верхней полуплоскости. Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a ; через Ω_+ – пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$; $\overline{G}$ означает замыкание множества G . Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1, r_2) = \overline{C_+(0, r_2)} \setminus C_+(0, r_1)$ означает замкнутое кольцо.

Пусть мера λ обладает следующими свойствами:

- 1) λ – конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$;
- 2) λ – положительная мера вне $\mathbb{R}$;
- 3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z : \Im z < 0\}$.

Совокупность условий 1)–3) обозначим через $\{G\}$. Если, кроме того,

- 4) мер λ неотрицательная и на $\mathbb{R}$,

то через $\{G^+\}$.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется *истинно субгармонической*, если $\limsup_{z \rightarrow t} v(z) \leq 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций обозначим через JS . Полная мера λ функции класса JS удовлетворяет условиям $\{G^+\}$. Класс дельта-субгармонических функций $J\delta$ определяется как разность $J\delta = JS - JS$.

Для заданной меры λ обозначим через $\lambda(t) = \lambda(\overline{C(0, t)})$. Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ – полная мера функции v , $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение меры λ . Введем следующие характеристики функции v :

$$m(r, v) := \frac{1}{r} \int_0^\pi v_+(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi, \quad N(r, v, r_0) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt,$$

$$T(r, v, r_0) := m(r, v) + N(r, v, r_0) + m(r_0, -v), \quad r > r_0,$$

где r_0 – произвольное, как правило фиксированное, положительное число (при желании можно считать $r_0 = 1$), которое в обозначениях (если это не вызывает недоразумений) мы будем опускать (например, вместо $T(r, v, r_0)$ писать $T(r, v)$ и т.д.).

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция роста γ удовлетворяет условию

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{r} > 0. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что $\beta \geq 1$. Условие (3.1) выполняется для функции $\gamma(r) = r^\rho$ при $\rho \geq 1$. Однако оно не выполняется для r^ρ при $0 < \rho < 1$. Если (3.1) не выполняется, то мы определяем $N(r, v) := N(r, v, r/2)$, $T(r, v) := T(r, v, r/2)$, и все дальнейшие утверждения при этом имеют место.

Функция $v \in J\delta$ называется функцией *конечного γ -типа*, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что

$$T(r, v) \leq A\gamma \frac{(Br)}{r}$$

для всех $r > r_0$.

Класс данных δ -субгармонических функций конечного γ -типа обозначим через $J\delta(\gamma(r))$. Через $JS(\gamma(r))$ обозначим класс истинно субгармонических функций конечного γ -типа.

Положительная мера λ имеет *конечную γ -плотность*, если при некоторых положительных A и B выполняется неравенство

$$N(r, \lambda) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \leq \frac{A}{r} \gamma(Br) \quad (3.2)$$

для всех $r > r_0$ (если условие (3.1) не выполняется, то полагаем $r_0 = r/2$). Из (3.2) следует (см. [12; лемма 2]), что

$$\lambda(r) \leq rA\gamma(Br), \quad r \geq r_0, \quad (3.3)$$

т.е. λ является мерой *конечного γ -типа*.

Коэффициенты Фурье функции $v \in J\delta$ определяются формулой [12]

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть λ – полная мера функции $v \in J\delta$,

$$d\lambda_k(\tau e^{i\varphi}) = \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi} \tau^{k-1} d\lambda(\tau e^{i\varphi})$$

(функция $\sin k\varphi / \sin \varphi$ при $\varphi = 0, \pi$, определяется по непрерывности). Положим $\lambda_k(r) = \lambda_k(\overline{C}(0, r))$; тогда [12]

$$c_k(r, v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

где $\alpha_k = r_0^{-k} c_k(r_0, v)$, а также

$$\begin{aligned} c_k(r, v) = & \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C}_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) + \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \Im \zeta} d\lambda(\zeta) \\ & - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{\overline{C}_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следующая формула – это формула Карлемана в обозначениях Гришина [2]:

$$\frac{1}{r^k} \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt + \frac{1}{r_0^k} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi. \quad (3.6)$$

Заметим также [12; теорема 1], что если $v \in J\delta(\gamma(r))$, то

$$|c_k(r, v)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

при некоторых $A, B > 0$ и всех $r > 0$, а мера $|\lambda|$ имеет конечную γ -плотность.

4. Меры в верхней полуплоскости. Пусть λ – мера, удовлетворяющая условиям $\{G^+\}$, γ – некоторая функция роста. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \Im \zeta} d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta),$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, $r_0 > 0$ – фиксированное число,

$$S_+(r_1, r_2; k, \lambda) = S_+(r_2; k, \lambda) - S_+(r_1; k, \lambda), \quad r_1 \leq r_2,$$

$$S'_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k r^k} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta),$$

при этом символ λ , если это не вызывает недоразумений, будем опускать.

Мера λ называется γ -сбалансированной, если существуют положительные постоянные A, B , при которых

$$|S_+(r_1, r_2; k, \lambda)| \leq \frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^k} \quad (4.1)$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$ и $k = 2, 3, \dots$.

Мера λ называется γ -допустимой, если она γ -сбалансированна и имеет конечную γ -плотность.

Мера λ называется γ -взвешенной, если существуют последовательность вещественных чисел $\alpha = \{\alpha_k\}$ и положительные постоянные A, B , при которых для всех $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|\alpha_k + S_+(r; k, \lambda)| \leq \frac{A\gamma(Br)}{r^k}. \quad (4.2)$$

В работе [12] было введено следующее определение. Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}$ – некоторая последовательность вещественных чисел. Функции

$$c_k(r; \lambda, \alpha) = r^k(\alpha_k + S_+(r; k)) - S'_+(r; k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

называются *коэффициентами Фурье пары* (λ, α) .

Пара (λ, α) называется γ -допустимой, если мера λ имеет конечную γ -плотность и существуют положительные постоянные A, B , при которых

$$|c_k(r; \lambda, \alpha)| \leq A\gamma(Br), \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Мы введем понятие коэффициентов Фурье меры, которое не зависит от выбора последовательности чисел α , а зависит только от самой меры.

Пусть γ – функция роста, а мера λ является γ -допустимой. Положим $p[\gamma] = \infty$, если для всех $p \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \gamma(r)r^{-p} > 0,$$

и

$$p[\gamma] = \min \left\{ p : p \in \mathbb{N}, \liminf_{r \rightarrow \infty} \gamma(r)r^{-p} = 0 \right\},$$

в противном случае.

Для $1 \leq k < p[\gamma]$ обозначим через $r'_k = \inf r_k$, где нижняя грань берется по всем r_k , для которых неравенство

$$\frac{\gamma(Br_k)}{r_k^k} \leq 2 \frac{\gamma(Br)}{r^k} \quad (4.5)$$

выполняется для всех $r > 0$, а число B удовлетворяет неравенствам (3.2) и (4.1). Для этих k определим

$$\alpha_k = -S_+(r'_k; k). \quad (4.6)$$

Если $p[\gamma] < \infty$, то по определению $p[\gamma]$ существует последовательность $\{r_j\}$, $r_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma(Br_j)r_j^{-p[\gamma]} = 0. \quad (4.7)$$

Тогда для $k \geq p[\gamma]$ положим

$$\alpha_k = -\lim_{j \rightarrow \infty} S(r_j; k). \quad (4.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть в определении (4.3) в качестве последовательности α взяты числа, определяемые формулой (4.6), с заменой r_k на r'_k , и формулой (4.8). Тогда коэффициенты Фурье пары (λ, α) называются *коэффициентами Фурье меры* λ (соответствующими функции роста $\gamma(r)$).

Покажем корректность этого определения в случае, когда мера λ γ -допустима. По предположению имеем

$$|S_+(r_m, r_j; k)| \leq \frac{A\gamma(Br_m)}{r_m^k} + \frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k}.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{S_+(r_j; k)\}$ для $k \geq p[\gamma]$. Докажем, что предел в (4.8) не зависит от выбора последовательности $\{r_j\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющей условию (4.7). Действительно, пусть $\{r_j^1\}_{j=1}^\infty$ и $\{r_j^2\}_{j=1}^\infty$ две такие последовательности, а α_k^1 и α_k^2 – соответствующие им пределы в (4.8). При заданном $\varepsilon > 0$ выберем номер j_0 так, чтобы при $j \geq j_0$ выполнялись неравенства

$$|\alpha_k^1 + S(r_j^1; k)| \leq \varepsilon, \quad |\alpha_k^2 + S(r_j^2; k)| \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\alpha_k^1 - \alpha_k^2| &\leq |\alpha_k^1 + S(r_j^1; k)| + |\alpha_k^2 + S(r_j^2; k)| + |S(r_j^1, r_j^2; k)| \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{A\gamma(Br_j^1)}{(r_j^1)^k} + \frac{A\gamma(Br_j^2)}{(r_j^2)^k}. \end{aligned}$$

И эта разность может быть сделана как угодно малой в силу условия (4.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Коэффициенты Фурье меры λ называются γ -допустимыми, если они удовлетворяют неравенству (4.4).

ЛЕММА 3. Коэффициенты Фурье $c_n(r, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, меры λ являются γ -допустимыми тогда и только тогда, когда мера λ является γ -допустимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть коэффициенты Фурье меры λ являются γ -допустимыми. Отметим неравенство [12; лемма 4]

$$|S'_+(r, k)| \leq \frac{\lambda(r)}{\pi r} \leq \frac{N(er, \lambda)re^2}{\pi}. \quad (4.9)$$

Из неравенства

$$|c_1(r, \lambda)| < A\gamma(Br)$$

и формулы (4.3) при $k = 1$ получаем

$$\left| r \left(\alpha_1 + \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{d\lambda(t)}{t^2} + \frac{\lambda(r_0)}{\pi r_0^2} - \frac{\lambda(r)}{\pi r^2} \right) \right| \leq A\gamma(Br).$$

Отсюда интегрированием по частям в левой части неравенства легко получить конечную γ -плотность меры λ .

Из неравенств (4.4) и (4.9) при $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$r^k |\alpha_k + S_+(r; k)| = |c_k(r; \lambda, \alpha) + S'_+(r; k)| \leq A\gamma(Br) + \frac{N(r, \lambda)r}{\pi \ln 2} \leq A_1\gamma(Br).$$

Таким образом, мера λ является γ -взвешенной. По теореме 3 из [12] она является γ -допустимой.

Наоборот, пусть мера λ является γ -допустимой. Тогда

$$|c_k(r; \lambda)| \leq r^k |\alpha_k + S_+(r; k)| + |S'_+(r; k)|. \quad (4.10)$$

Если $1 \leq k < p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r; k)| = S_+(r'_k, r; k) \leq \frac{A\gamma(Br_k)}{r'^k_k} + \frac{A\gamma(Br)}{r^k} \leq 3 \frac{A\gamma(Br)}{r^k}. \quad (4.11)$$

Если же $k \geq p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r; k)| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} S_+(r, r_j; k) \leq \frac{A\gamma(Br)}{r^k} + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A\gamma(Br_j)}{r^k_j} = \frac{A\gamma(Br)}{r^k}. \quad (4.12)$$

Из неравенств (4.10)–(4.12) следует, что $c_k(r; \lambda)$ удовлетворяют условию (4.4). Лемма доказана.

Введем теперь понятие канонической функции γ -допустимой меры λ . Пусть $c_k(r) = c_k(r; \lambda)$ – коэффициенты Фурье меры λ . Положим

$$\Phi(se^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(s) \sin k\varphi.$$

Для $s > 0$ полагаем

$$P_s(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0,s)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta), \quad a_s(z) = \frac{s}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, se^{i\varphi})}{\partial n} \Phi(se^{i\varphi}) d\varphi,$$

$$v_s(z) = a_s(z) + P_s(z),$$

где $G(z, \zeta)$ – функция Грина полукруга $C_+(0, s)$, $\partial G(z, se^{i\varphi})/\partial n$ – ее производная по внутренней нормали, и функция $K(z, \zeta) = G(z, \zeta)/(\Im \zeta)$ продолжается по непрерывности в точки вещественной оси $|t| \leq R$.

Положим теперь $v(z) = v_s(z)$ при $|z| < s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $v(z)$ называется *канонической функцией меры* λ .

ТЕОРЕМА 1. Каноническая функция γ -допустимой меры λ принадлежит классу JS , ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье меры λ , а ее полная мера совпадает с мерой λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 4. Пусть v_1, v_2 – субгармонические функции в полукруге $C_+(0, R)$, имеющие при всех $k \in \mathbb{Z}$ одинаковые коэффициенты Фурье. Тогда $v_1 \equiv v_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при любом r , $0 < r < R$, коэффициенты Фурье функций v_1 и v_2 равны, почти для всех $\theta \in [0, \pi]$ при любом фиксированном r $v_1(re^{i\theta}) = v_2(re^{i\theta})$ [15; Т. 1, с. 54]. Утверждение леммы тогда следует из равенства [16]

$$v(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint_{|\zeta - z| \leq \varepsilon} v(\zeta) ds(\zeta),$$

где $ds(\zeta)$ – элемент площади. Это можно получить переходом к повторному интегралу

$$v(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint v(z + se^{i\theta}) s ds d\theta$$

по области $|z| - \varepsilon \leq s \leq |z| + \varepsilon$, $\theta_1(s) \leq \theta \leq \theta_2(s)$.

Докажем теперь теорему. Согласно (4.4) для каждого $s > 0$ функция $\Phi(se^{i\varphi})$ принадлежит классу $\mathbf{D}^2$ [15; Т. 2], где $\mathbf{D}^2$ – множество распределений порядка не выше 2.

Функция $v_s(z)$, очевидно, субгармонична в полукруге $C_+(0, s)$. Покажем, что $c_k(r; v_s) = c_k(r)$ при $r \leq s$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$P_s(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) \sin k\theta.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда, используя разложение [3]

$$\frac{\partial G(re^{i\theta}, se^{i\varphi})}{\partial n} = \frac{4}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{s^m} \sin m\theta \sin m\varphi$$

и находя коэффициенты Фурье функции $a_s(re^{i\theta})$, получаем

$$c_k(r, v_s) = \left(\frac{r}{s}\right)^k c_k(s) + d_k(r). \quad (4.13)$$

Коэффициенты Фурье функции $P_s(re^{i\theta})$ находятся из формулы (3.5):

$$d_k(r) = \alpha_k(P_s) + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C_+(0, r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \\ + \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{\overline{C_+(0, r)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta).$$

Из формулы (3.6), интегрируя по частям и учитывая, что $P_s(se^{i\theta}) = 0$, $\theta \in [0, \pi]$, находим

$$\alpha_k(P_s) = -\frac{2}{\pi} \int_{r_0}^s \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt \\ = -\frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C_+(0, r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \\ - \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, s)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\rho^{2k} \pi k} \iint_{\overline{C_+(0, s)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta).$$

Подставляя это представление в выражение для $d_k(r)$, получим

$$d_k(r) = -\frac{1}{r^k \pi k} \iint_{\overline{C_+(0, r)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \\ - \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, s)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) + \frac{r^k}{\pi k \rho^{2k}} \iint_{\overline{C_+(0, r)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta).$$

Кроме того, по определению коэффициентов меры имеем

$$\left(\frac{r}{s}\right)^k c_k(s) = r^k \left[\alpha_k + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C_+(0, r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, s)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) \right] - \frac{r^k}{\pi k s^{2k}} \iint_{\overline{C_+(0, s)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta),$$

где α_k определены равенствами (4.6) и (4.8).

Подставляя это выражение и выражение для $d_k(r)$ в (4.13), получаем требуемое равенство для $k \in \mathbb{N}$.

Если $s' > s$, то функция $v_{s'}$ является продолжением функции v_s . Действительно, при $0 \leq r < s$ имеем $c_k(r, v_s) = c_k(r) = c_k(r, v_{s'})$, и по лемме 4 $v_s(z) \equiv v_{s'}(z)$, если $z \in C_+(0, s)$.

Положим теперь $v(z) = v_s(z)$ при $|z| < s$. Очевидно, функция $v(z)$ субгармоническая и удовлетворяет требованиям теоремы. Единственность ее следует из леммы 4. Теорема доказана.

5. Случай уточненного порядка в смысле Бутру. В теории субгармонических функций в полуплоскости известно следующее утверждение, которое является аналогом условия Линделефа для целых функций конечного порядка. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 1$. Для того, чтобы мера λ , удовлетворяющая условиям $\{G^+\}$, была полной мерой субгармонической

функции $v(z)$ конечного $V(r) = r^{\rho(r)}$ -роста, необходимо и достаточно, чтобы при целом ρ выполнялось неравенство

$$\lambda(r) \leq KrV(r), \quad K > 0,$$

а при целом ρ , чтобы еще дополнительно функция

$$\frac{r^\rho}{V(r)}[c + S_+(r; \rho, \lambda)]$$

при некотором c была ограниченной функцией от r .

Следующая лемма является обобщением этого утверждения на случай, когда $\rho(r)$ является уточненным порядком в смысле Бутру.

ЛЕММА 5. Пусть $\gamma(r) = V(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Бутру, $1 < \beta = \liminf_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, $\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, λ – мера, удовлетворяющая условиям $\{G^+\}$. Справедливы такие утверждения:

1) мера λ имеет конечную γ -плотность тогда и только тогда, когда

$$\lambda(r) \leq KrV(r), \quad K > 0; \quad (5.1)$$

2) λ γ -допустима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет неравенству (5.1) и при всех целых k , удовлетворяющих неравенству $\beta \leq k \leq \rho$, существуют вещественные числа α_k такие, что функции

$$\frac{1}{L_k(r)}[\alpha_k + S_+(r; k, \lambda)]$$

являются ограниченными функциями от r , где $L_k(r) = V(r)/r^k$;

3) если $[\beta] < \beta \leq \rho < [\beta] + 1$, то каждая мера μ , удовлетворяющая неравенству (5.1), является γ -допустимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Тот факт, что каждая мера λ , имеющая конечную γ -плотность, является мерой конечного γ -типа, был отмечен выше. Неравенство (5.1) следует из (3.3) и леммы 1.

Наоборот, пусть выполнено условие (5.1). Тогда, используя неравенство (2.2) при $\lambda = 2$, получим

$$N(r, \lambda) \leq K \int_{r_0}^r \frac{V(r)}{r^2} dr \leq \frac{K_1 V(r)}{r(\beta - 1)}, \quad K_1 > 0.$$

2) Пусть $k < \beta$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, применяя неравенство (2.2) при $\lambda = k + 1$, получаем (считая, что $r_1 \leq r_2$)

$$\begin{aligned} |S_+(r_1, r_2, k, \lambda)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\lambda(t)}{t^{k+1}} = \frac{\lambda(t)}{\pi t^{k+1}} \Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{k+1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+2}} dt \\ &\leq \frac{KV(r_2)}{\pi r_2^k} + \frac{K(k+1)}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{V(t)}{t^{k+1}} dt \\ &\leq K \frac{V(r_2)}{\pi r_2^k} + \frac{K(k+1)}{\pi} \frac{V(r_2)}{(\beta - k)r_2^k} + o\left(\frac{V(r_2)}{r_2^k}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка получается с применением неравенства (2.3) и при $k > \rho$, $k \in \mathbb{N}$:

$$|S_+(r_1, r_2, k, \lambda)| \leq K \frac{V(r_1)}{r_1^k} + \frac{K(k+1)}{\pi} \frac{V(r_1)}{(k-\rho)r_1^k} + o\left(\frac{V(r_1)}{r_1^k}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Если k удовлетворяет неравенству $\beta \leq k \leq \rho$, то по предположению все функции $[\alpha_k + S_+(r; k, \lambda)]/L_k(r)$ ограничены сверху числом $K_2 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |S_+(r_1, r_2, k, \lambda)| &\leq |\alpha_k + S_+(r_1; k, \lambda)| + |\alpha_k + S_+(r_2; k, \lambda)| \\ &\leq K_2(L_k(r_1) + L_k(r_2)) = K_2\left(\frac{V(r_1)}{r_1^k} + \frac{V(r_2)}{r_2^k}\right), \end{aligned}$$

т.е. мера λ является γ -сбалансированной, а значит и γ -допустимой. Обратное следует из теоремы 3 работы [12].

3) Утверждение является следствием пп. 1) и 2).

Рассмотрим теперь вид канонической функции меры в случае функции роста, определяемой порядком Бутру. Это представление указывает на то, что понятие канонической функции меры в общем случае является обобщением классических понятий, в частности, представления аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции конечного порядка в виде произведения канонических множителей и интеграла по вещественной оси [3; теорема 3.2]. Нам понадобится следующая теорема 5 из работы [12].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $c_k(r) = c_k(r; \lambda, \alpha)$ – коэффициенты Фурье пары (λ, α) , удовлетворяющие условию

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} c_k(r) \leq C(r), \quad r > 0. \quad (5.2)$$

Тогда существует единственная субгармоническая функция v такая, что ее полная мера $\lambda(v) = \lambda$ и $c_k(r; v) = c_k(r)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $r > 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} K_p(z, \zeta) &= \frac{1}{\Im \zeta} \Re \left[\ln \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} + \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\bar{\zeta}^k} \right) \right], \quad p = 1, 2, \dots \\ K_0(z, \zeta) &= \frac{1}{\Im \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|. \end{aligned}$$

Здесь и ниже мы рассматриваем однозначную ветвь функции $\ln z$ в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси.

ТЕОРЕМА 3. Пусть λ – γ -допустимая мера в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, обладающая свойствами $\{G^+\}$, и не нагружает некоторую окрестность нуля. Пусть $\gamma(r) = V(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Бутру, $\beta = \liminf_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, $\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$. Тогда ее каноническая функция $v(z)$ имеет следующий вид:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K_0(z, \zeta) d\lambda_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint K_p(z, \zeta) d\lambda_2(\zeta), \quad (5.3)$$

где λ_1 – сужение меры λ на круг $C(0, 1)$, $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$, $p = [\rho]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $F(z)$ функцию, определяемую правой частью формулы (5.3). Ее полная мера равна λ [2]. Так как полные меры $v(z)$ и $F(z)$ совпадают, по теореме 2 достаточно показать, что их коэффициенты Фурье равны. Переопределив значения функции $V(r)$ на конечном отрезке, можно считать, что в неравенстве (4.5) числа r'_k выбраны так, что мера λ не нагружает круги $C(0, r'_k)$. Тогда в формуле (4.6) числа $\alpha_k = 0$, $k \leq p$. Для $k > p$ имеем $\alpha_k = -S(\infty; k)$.

Из формулы (3.5) получаем, что коэффициенты Фурье функции $F(z)$ определяются формулами

$$c_k(r; F) = r^k(\beta_k + S_+(r; k, \lambda_F)) - S'_+(r; k, \lambda_F), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.4)$$

где $\beta_k = c_k(r_0; F)$. Поэтому в силу определения 4 коэффициентов Фурье меры достаточно доказать, что $\beta_k = \alpha_k$ при $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $r_0 = \min_{k \leq p} r'_k$. Поскольку при $|z| < |\zeta|$

$$\ln K_p(z, \zeta) = -\Re \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\bar{\zeta}^k} \right) = -2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k}{k\tau^k} \sin k\theta \sin k\varphi,$$

где $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, то при $k \leq p$ $c_k(r_0, F) = 0$. Из (5.4) получаем тогда, что и $\beta_k = 0$ при $k \leq p$, а из неравенств (4.9) и (3.7), после деления обеих частей (5.4) на r^k и переходом к пределу при $r \rightarrow \infty$, получаем, что $\beta_k = -S(\infty; k, \lambda_F) = -S(\infty; k, \lambda)$ при $k > p$.

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970.
- [2] А. Ф. Гришин, “Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I”, *Математическая физика, анализ, геометрия*, **1:2** (1994), 193–215.
- [3] Н. В. Говоров, *Краевая задача Римана с бесконечным индексом*, Наука, М., 1986.
- [4] W. K. Hayman, “Questions of regularity connected with Phragmén–Lindelöf principle”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **35** (1956).
- [5] J.-I. Itô, “Subharmonic functions in the half-plane”, *Trans. Am. Math. Soc.*, **129:3** (1967).
- [6] L. A. Rubel, “A generalised canonical product”, *Современные проблемы теории аналитических функций*, Наука, М., 1966, 264–270.
- [7] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты”, *Матем. сб.*, **198:2** (2007), 121–160.
- [8] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции”, *Матем. сб.*, **200:2** (2009), 129–158.
- [9] К. Г. Малютин, В. А. Герасименко, “Обобщенные канонические произведения в комплексной плоскости”, *Вест. Харьковск. ун-та. Сер. Матем., прикл. матем. и мех.*, **790:57** (2007), 198–205.
- [10] К. Г. Малютин, Н. М. Садык, “Представление субгармонических функций в полуплоскости”, *Матем. сб.*, **198:12** (2007), 47–62.
- [11] G. Deng, *Growth Estimates and Integral Representations of Harmonic and Subharmonic Functions*, arXiv: math.FA/0906.1679v1.
- [12] К. Г. Малютин, “Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости”, *Матем. сб.*, **192:6** (2001), 51–70.

- [13] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [14] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [15] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, Т. 1, Мир, М., 1985; Т. 2, Мир, М., 1985.
- [16] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.

К. Г. Малютин

Сумский государственный университет

E-mail: malyutinkg@yahoo.com

Поступило

29.03.2012

Исправленный вариант

22.10.2013

И. И. Козлова

Сумский государственный университет

Н. М. Садык

Istanbul University, Turkey

E-mail: sadnaz@mail.ru