Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Тюленев, Задача о следах для пространств Соболева с весами типа Макенхаупта, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 720–732

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:44:08

Задача о следах для пространств Соболева с весами типа Макенхаупта

А. И. Тюленев

Дается точное описание следов функций из весового пространства Соболева $W_p^l(Q, \gamma)$ на квадрате. Весовая функция $\gamma \in A_p((0, 1))$ зависит от одной “продольной” координаты x . След характеризуется в терминах построенных в работе весовых пространств типа Бесова $\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)$. Характеризация следа получена также в случае $p = 1$.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9686

1. Введение. Задаче о следах для пространств Соболева с весом посвящено много работ. Краткий обзор полученных результатов можно найти в [1]. Однако все они относятся к случаю, когда весовая функция зависит от одной “поперечной” координаты y и поэтому влияет на гладкость граничной функции. Случай же, когда вес зависит от одной “продольной” координаты x , был впервые рассмотрен в [1] и независимо автором в [2]. Отметим, что в [1] рассматривалось пространство Соболева $W_p^1(\mathbb{R}_+^n, \gamma)$, $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^{n-1})$, $1 < p < \infty$. Задача о следах была решена методами фурье-анализа и теории интерполяции банаховых пространств, что затрудняет перенесение этих результатов на случай ограниченной области. В [2] для пространства Соболева $W_p^1(Q, \gamma)$, $1 < p < \infty$, $Q = (0, 1)^2$, методами теории функций дано полное описание следов в терминах весовых аналогов пространств Бесова $B_p^{1-1/p}((0, 1), \gamma)$. Однако на вес γ накладывались ограничения типа монотонности.

В этой заметке мы даем необходимые и достаточные условия на следы функций из пространства

$$W_p^l(Q, \gamma), \quad \gamma \in A_p((0, 1)), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Здесь, в отличие от [2], в качестве пространства следов рассматривается весовое пространство типа Бесова $\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)$, норма в котором задается при помощи не обычных, а усредненных разностей. Кроме того, методы, используемые нами, позволяют решить задачу в случае $p = 1$, который не рассматривался в работах [1] и [2]. Также приводится пример веса $\gamma \notin A_p((0, 1))$ ни при каком $1 \leq p < \infty$ такого, что след пространства $W_p^l(Q, \gamma)$ не совпадает с $\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00744, 10-01-91331) и гранта АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/1662).

Для простоты мы рассматриваем случай $Q = (0, 1)^2$, но все результаты могут быть легко обобщены на случай $Q = (0, 1)^n$, $n \geq 2$.

2. Определения и вспомогательные утверждения. На протяжении всей работы, если не оговорено обратное, считаем $1 \leq p < \infty$ (случай, когда $p \neq 1$, будут отмечаться), $Q := (0, 1)^2$, $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, $l, n \in \mathbb{N}$, $k, i, j, m \in \mathbb{N}_0$,

$$\Pi := (a, b) \times (0, c), \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty, \quad 0 < c \leq +\infty.$$

Функции $\gamma \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ такие, что $\gamma(x) > 0$ почти всюду на (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, будем называть *весовыми* или просто *весами*.

Далее нам понадобятся определения весового класса Макенхаупта $A_p(\mathbb{R})$ при $1 \leq p < \infty$ и класса весов со свойством удвоения (см. [3; гл. 5]). Модификации этих определений в случае, когда вес задан на конечном интервале, очевидны.

ЛЕММА А [4]. *Для любого веса $\gamma \in A_p((a, b))$ при $1 < p < \infty$ существует функция $\tilde{\gamma} \in A_p(\mathbb{R})$ такая, что $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$, $x \in (a, b)$.*

Для функции $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ положим

$$M[f](x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy.$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА В (см., например, в [3; с. 201]). *Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma \in A_p(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}} (M[f](x))^p \gamma(x) dx \leq A(p, \gamma) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \gamma(x) dx, \quad (2.1)$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{R}, \gamma)$.

ТЕОРЕМА С (Неравенство Харди, см., например, в [5; с. 205]). *Для любой функции $f \in L_1^{\text{loc}}((0, +\infty))$ при $1 \leq p < \infty$, $r > 1/p$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty x^{-rp} \left| \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \leq \left(\frac{p}{pr-1} \right)^p \int_0^\infty x^{(1-r)p} |f(x)|^p dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что функция $f \in L_1^{\text{loc}}(\Pi)$ имеет на Π *несмешанную обобщенную частную производную порядка l по переменной x* и обозначать ее $D_x^l f$, если f можно видоизменить на множестве меры нуль так, что она будет почти всюду на Π иметь обычные частные производные $\partial f / \partial x, \dots, \partial^{l-1} f / \partial x^{l-1}$ и при этом для почти всех $y \in (0, c)$ функции $(\partial^i f / \partial x^i)(\cdot, y)$ ($i = 0, \dots, l-1$) абсолютно непрерывны по x на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Аналогично определяется $D_y^l f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Определение 2.1 эквивалентно определению обобщенной несмешанной производной по Соболеву, см., например, [6; гл. 4]. Мы будем пользоваться этим в дальнейшем, не оговаривая этого.

Для функции $f \in L_1^{\text{loc}}(\Pi)$ и веса γ положим

$$\|f\|_{L_p(\Pi, \gamma)} = \left(\iint_{\Pi} \gamma(x) |f(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p}.$$

Символом $W_p^l(\Pi, \gamma)$ обозначим функциональное пространство Соболева на Π с весом γ и нормой

$$\|f|W_p^l(\Pi, \gamma)\| := \|f|L_p(\Pi, \gamma)\| + \|D_x^l f|L_p(\Pi, \gamma)\| + \|D_y^l f|L_p(\Pi, \gamma)\|. \quad (2.2)$$

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$ – произвольное измеримое множество, $x \in E$, $h > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Для $\varphi \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ положим

$$\Delta^l(t, E)\varphi(x) := \begin{cases} \sum_{i=0}^l (-1)^{l+i} C_l^i \varphi(x + ti), & \text{если } [x, x + tl] \subset E, \\ 0, & \text{если } [x, x + tl] \not\subset E, \end{cases}$$

$$\delta^l(h, E)\varphi(x) := \frac{1}{h} \int_0^h |\Delta^l(t, E)\varphi(x)| dt, \quad \delta^l(-h, E)\varphi(x) := \frac{1}{h} \int_0^h |\Delta^l(-t, E)\varphi(x)| dt.$$

При $l - 1 < s < l$ символом $\tilde{B}_p^s((a, b), \gamma)$ обозначим пространство типа Бесова на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) с весом γ и нормой

$$\begin{aligned} \|\varphi|\tilde{B}_p^s((a, b), \gamma)\| &:= \|\varphi|L_p((a, b), \gamma)\| + \left(\int_0^{b-a} \frac{1}{z^{ps}} \|\delta^l(z, (a, b))\varphi|L_p((a, b), \gamma)\|^p \frac{dz}{z} \right)^{1/p} \\ &+ \left(\int_0^{b-a} \frac{1}{z^{ps}} \|\delta^l(-z, (a, b))\varphi|L_p((a, b), \gamma)\|^p \frac{dz}{z} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функцию $g \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ будем называть *следом* функции $f \in L_1^{\text{loc}}(\Pi)$ на интервале (a, b) ($g = \text{tr}|_{y=0} f$), если на Π существует функция h , эквивалентная f на Π , такая, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$$\int_\alpha^\beta |h(x, y) - g(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0.$$

ЛЕММА D [5; с. 87]. Пусть $-\infty < c < \alpha < \beta < d < +\infty$, $m \in N_0$, $m < l$. Кроме того, предположим, что $g: [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ имеет на отрезке $[c, d]$ абсолютно непрерывную производную порядка $l - 1$. Тогда для любого $x \in [c, d]$

$$\left| \frac{\partial^m g}{\partial x^m}(x) \right| \leq C_1 \left(\int_\alpha^\beta |g(t)| dt + \int_c^d \left| \frac{\partial^l g}{\partial x^l}(t) \right| dt \right).$$

Константа C_1 зависит от $l, \beta - \alpha, d - c$, но не зависит от g .

Рассмотрим “срезающие” функции $\Theta_i \in C^\infty((0, 1))$, $i = 1, 2$, такие, что $\Theta_1(x) + \Theta_2(x) = 1$ при $x \in (0, 1)$ и

$$\Theta_1(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0, 3/8), \\ 0, & x \in (5/8, 1). \end{cases}$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\gamma \in A_p((0, 1))$, $f \in W_p^l(Q, \gamma)$. Тогда $f_i := \Theta_i f \in W_p^l(Q, \gamma)$ и

$$\|\Theta_i f|W_p^l(Q, \gamma)\| \leq C_3 \|f|W_p^l(Q, \gamma)\|, \quad i = 1, 2.$$

Константа C_3 не зависит от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 2.1 следует, что $D^l f(x, y) = \partial^l f / \partial x^l(x, y)$ для почти всех $(x, y) \in Q$. Используя неравенство Гёльдера с показателями p и p' , получим для почти всех $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(\cdot, y) |L_1((0, 1)) \right\| &\leq \|\gamma^{-1/p} |L_{p'}((0, 1))\| \left\| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(\cdot, y) |L_p((0, 1), \gamma) \right\|, \\ \|f(\cdot, y) |L_1((0, 1))\| &\leq \|\gamma^{-1/p} |L_{p'}((0, 1))\| \|f(\cdot, y) |L_p((0, 1), \gamma)\|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Следовательно, функция $\partial^{l-1} f / \partial x^{l-1}(\cdot, y)$ может быть доопределена в точках $x = 0$ и $x = 1$ так, что она станет абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$ (как функция x) для почти всех $y \in (0, 1)$. Применив лемму D к функции $f(\cdot, y)$, и, учитывая (2.3), для $m \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$, $m < l$ имеем

$$\left\| \frac{\partial^m f}{\partial x^m} |L_p(Q, \gamma) \right\| \leq C_2 \|f |W_p^l(Q, \gamma)\|.$$

По правилу Лейбница для $f_i(x, y) := \Theta_i(x) f(x, y)$, $i = 1, 2$, при почти всех $(x, y) \in Q$ имеем

$$\frac{\partial^l f_i}{\partial x^l}(x, y) = \sum_{j=0}^l C_l^j \frac{\partial^{l-j} \Theta_i}{\partial x^{l-j}}(x) \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, y).$$

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что производные любого порядка функций Θ_i , $i = 1, 2$, ограничены на $(0, 1)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in W_p^l(Q, \gamma)$, $\gamma \in A_p((0, 1))$. Тогда для почти всех $x \in (0, 1)$ существует $\lim_{y \rightarrow +0} f(x, y) := \varphi(x)$. Кроме того, $\text{tr}|_{y=0} f = \varphi$ на интервале $(0, 1)$, $\varphi \in L_p((0, 1), \gamma)$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi |L_p((0, 1), \gamma)\| \leq C_5 \|f |W_p^l(Q, \gamma)\|. \quad (2.4)$$

Константа C_5 в (2.4) не зависит от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как и в лемме 2.1, заключаем, что для почти всех $x \in (0, 1)$ функция $f(x, \cdot)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $l - 1$ на интервале $(0, 1)$ (как функция от y). Но тогда для почти всех $x \in (0, 1)$ существует $\varphi(x) := \lim_{y \rightarrow +0} f(x, y)$. Далее, применяя лемму D к функции $f(x, \cdot)$, используя неравенство Гёльдера и определение класса $A_p((0, 1))$, получим

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y} |L_p(Q, \gamma) \right\| \leq C_4 \|f |W_p^l(Q, \gamma)\|. \quad (2.5)$$

Теперь воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница и неравенством Гёльдера. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x, y) - \varphi(x)| dx &\leq \int_0^1 \int_0^y \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right| dt dx \\ &\leq y^{1/p'} \|\gamma^{-1/p} |L_{p'}((0, 1), \gamma)\| \left(\int_0^1 \int_0^y \gamma(x) \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из оценки (2.6), очевидно, следует равенство $\text{tr}|_{y=0} f = \varphi$ на множестве $(0, 1) \times 0$.

Снова пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, неравенством Гёльдера, и учитывая (2.5), имеем

$$\begin{aligned} & \|\varphi|_{L_p((0, 1), \gamma)}\|^p \\ & \leq 2^{p-1} \left(\int_0^1 \|\varphi - f(\cdot, y)|_{L_p((0, 1), \gamma)}\|^p dy + \int_0^1 \|f(\cdot, y)|_{L_p((0, 1), \gamma)}\|^p dy \right) \\ & \leq 2^{p-1} \left(\int_0^1 \gamma(x) \left(\int_0^y \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right| dt \right)^p dx + \|f|_{L_p(Q, \gamma)}\|^p \right) \leq C_5 \|f|_{W_p^l(Q, \gamma)}\|^p, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и лемма доказана.

3. Теоремы о следах для пространств $W_p^l(Q, \gamma)$, $1 < p < \infty$. В этом пункте зафиксируем параметр $p \in (1, \infty)$. Далее для простоты обозначений полагаем

$$\Delta^l(t, (0, 1))\varphi(x) := \Delta_t^l\varphi(x), \quad \delta^l(t, (0, 1))\varphi(x) := \delta_t^l\varphi(x).$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $f \in W_p^l(Q, \gamma)$, $\gamma \in A_p((0, 1))$. Тогда для почти всех $x \in (0, 1)$ существует $\lim_{y \rightarrow +0} f(x, y) := \varphi(x)$. Более того, $\text{tr}|_{y=0} f = \varphi \in \tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)$ и

$$\|\varphi|_{\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)}\| \leq M_1 \|f|_{W_p^l(Q, \gamma)}\|. \quad (3.1)$$

Константа M_1 не зависит от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование следа доказано в лемме 2.2 (далее будем считать $f(x, 0) := \varphi(x)$ для п.в. $x \in (0, 1)$). Установим оценку (3.1). Докажем неравенство

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{z^{p(l+1)}} \|\delta_z^l \varphi|_{L_p((0, 1), \gamma)}\|^p dz \right)^{1/p} \leq C_{12} \|f|_{W_p^l(Q, \gamma)}\|, \quad (3.2)$$

где константа C_{12} не зависит от f . Пусть $G := \{(x, t) \in Q, [x, x + tl] \subset (0, 1)\}$, а χ_G – характеристическая функция этого множества. Для $(x, t) \in G$ обозначим

$$\Delta_{y,t}^l f(x + t\lambda, 0) := \Delta_t^l f(x + t\lambda, \cdot)(0), \quad \Delta_{x,t}^l f(x, t\lambda) := \Delta_t^l f(\cdot, t\lambda)(x).$$

Тогда ([5; с. 217]) для почти всех $(x, t) \in G$

$$\Delta_t^l \varphi(x) = \Delta_{x,t}^l f(x, 0) = \sum_{\lambda=0}^l (-1)^\lambda C_l^\lambda \Delta_{y,t}^l f(x + t\lambda, 0) - \sum_{\lambda=1}^l (-1)^\lambda C_l^\lambda \Delta_{x,t}^l f(x, t\lambda). \quad (3.3)$$

Далее, для почти всех $(x, t) \in G$ справедливы оценки (подробное доказательство можно найти в [5; с. 214])

$$\begin{aligned} |\Delta_{y,t}^l f(x + t\lambda, 0)| & \leq t^{l-1} \int_0^{lt} \left| \frac{\partial^l f}{\partial y^l}(x + t\lambda, \tau) \right| d\tau, \\ |\Delta_{x,t}^l f(x, t\lambda)| & \leq t^{l-1} \int_0^{lt} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x + \tau, t\lambda) \right| d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) и неравенства Минковского заключаем, что для доказательства (3.2) нам остается провести оценки следующих интегралов:

$$I_m^1 := \left(\int_0^1 \frac{1}{z^{p(l+1)}} \int_0^1 \gamma(x) \left(\int_0^z \chi_G(x, t) t^{l-1} \int_0^{lt} \left| \frac{\partial^l f}{\partial y^l}(x + tm, \tau) \right| d\tau dt \right)^p dx dz \right)^{1/p},$$

$m = 0, \dots, l$, и

$$I_n^2 := \left(\int_0^1 \frac{1}{z^{p(l+1)}} \int_0^1 \gamma(x) \left(\int_0^z \chi_G(x, t) t^{l-1} \int_0^{lt} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x + \tau, tn) \right| d\tau dt \right)^p dx dz \right)^{1/p},$$

$n = 1, \dots, l$.

Будем считать весовую функцию $\gamma \in A_p((0, 1))$ продолженной на всю ось так, что новая весовая функция (мы обозначим ее тем же символом) $\gamma \in A_p(\mathbb{R})$ (такое продолжение возможно в силу леммы А). Положим $\partial^l f / \partial x^l(x, t) = 0$, $(x, t) \notin Q$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} (I_n^2)^p &\leq \int_0^1 \frac{1}{z^{2p}} \int_0^1 \gamma(x) \left(\int_0^z \int_0^{lz} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x + \tau, tn) \right| d\tau dt \right)^p dx dz \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{z^{2p}} \int_0^1 \gamma(x) \left(\int_x^{x+lz} \int_0^z \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(\tau', tn) \right| dt d\tau' \right)^p dx dz \\ &\leq C_6 \int_0^\infty \frac{1}{z^p} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) \left(\sup_{\eta>0} \frac{1}{2\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} \int_0^z \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(\tau', tn) \right| dt d\tau' \right)^p dx dz \\ &\leq C_7 \int_0^\infty \frac{1}{z^p} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) \left(\int_0^{zn} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, t) \right| dt \right)^p dx dz \\ &= C_8 \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) \int_0^\infty \frac{1}{z^p} \left(\int_0^z \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, t) \right| dt \right)^p dz dx \\ &\leq C_9 \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) \int_0^\infty \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, t) \right|^p dt dx \\ &= C_9 \int_0^1 \gamma(x) \int_0^1 \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, t) \right|^p dt dx \leq C_9 \|f\| W_p^l(Q, \gamma)^p. \end{aligned}$$

В первом неравенстве мы расширили пределы интегрирования и воспользовались очевидным неравенством $t^{l-1} \leq z^{l-1}$. Во втором поменяли порядок интегрирования по теореме Фубини и сделали замену $\tau' = x + \tau$. В четвертом воспользовались теоремой В. В пятом использована очевидная замена переменной и изменен порядок интегрирования. В шестом соотношении использовано неравенство Харди. Предпоследнее равенство верно, поскольку $\partial^l f / \partial x^l(x, t) = 0$, $(x, t) \notin Q$.

Рассуждая аналогично, получим $I_m^1 \leq C_8 \|f\| W_p^l(Q, \gamma)$ при $m > 0$. Если $m = 0$, то оценка значительно упрощается. Меняя порядок интегрирования, и, пользуясь неравенством Харди (теорема С), получим

$$\begin{aligned} (I_0^1)^p &\leq C_{10} \int_0^1 \frac{1}{z^p} \int_0^1 \gamma(x) \left(\int_0^{lz} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, \tau) \right| d\tau \right)^p dx dz \\ &= C_{10} \int_0^1 \gamma(x) \int_0^1 \frac{1}{z^p} \left(\int_0^{lz} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, \tau) \right| d\tau \right)^p dz dx \leq C_{11} \|f\| W_p^l(Q, \gamma)^p. \end{aligned}$$

Заметим, что во всех вышеприведенных оценках константы C_r , $r = 1, \dots, 11$, не зависели от функции f . Собирая все вышеприведенные оценки, получаем неравенство (3.2). Аналогично (3.2) устанавливается оценка

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{z^{p(l+1)}} \left\| \delta_{-z}^l \varphi |L_p((0, 1), \gamma) \right\|^p dz \right)^{1/p} \leq C_{12} \|f|W_p^l(Q, \gamma)\|. \quad (3.5)$$

Из оценок (3.2), (3.5) и (2.4) следует оценка (3.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\gamma \in A_p((0, 1))$, $\varphi \in \tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)$. Тогда существует функция $f \in W_p^l(Q, \gamma)$ такая, что $\text{tr}|_{y=0} f = \varphi$. Более того,

$$\|f|W_p^l(Q, \gamma)\| \leq M_2 \|\varphi|\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)\|. \quad (3.6)$$

Константа M_2 не зависит от функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Θ_i , $i = 1, 2$, те же, что и в пункте 2 настоящей статьи. При $i = 1$ для $x \in (0, 3/4)$, $y \in (0, 1)$, а при $i = 2$ для $x \in (1/4, 1)$, $y \in (0, 1)$ положим

$$\tilde{f}_i(x, y) := \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(y) V_{(-1)^{i+1} \rho_m}^l[\varphi](x), \quad f_i(x, y) := \Theta_i(x) \tilde{f}_i(x, y). \quad (3.7)$$

В формуле (3.7) $\rho_m := (1/2^m)(1/8l^2)$, $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$ – разбиение единицы, т.е. $\psi_m \in C^\infty((0, 1))$ и $\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(y) = 1$ для любого $y \in (0, 1)$. Кроме того, как доказано, например, в [5; гл. 5], функции ψ_m можно выбрать так, что

$$\text{supp } \psi_m \subset \left\{ y \in (0, 1) : \frac{7}{8} \frac{1}{2^{m+1}} \leq y \leq \frac{9}{8} \frac{1}{2^m} \right\}, \quad m > 0,$$

а также

$$\left| \frac{\partial^r \psi_m}{\partial y^r}(y) \right| \leq \frac{c}{\rho_m^r} \quad \text{при } y \in (0, 1), \quad r \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

с константой c , не зависящей от ψ_m . Символом $V_\varepsilon^l[\varphi]$ в (3.7) обозначен оператор усреднения функции φ . Мы заимствуем конструкцию этого оператора из [7].

Пусть $(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ таковы, что $[x, x + \varepsilon l^2] \subset (0, 1)$. Положим

$$V_\varepsilon^l[\varphi](x) := \frac{1}{|\varepsilon|} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \mu_i \nu_j \int \omega\left(\frac{z-x}{ij\varepsilon}\right) \varphi(z) dz. \quad (3.8)$$

В (3.8) $\omega \in C_0^\infty((0, 1))$ и $\int \omega(x) dx = 1$, числа μ_i и ν_j определяются следующими формулами:

$$\mu_i := (-1)^{i+l} \frac{1}{l!} C_l^i i^{l-1}, \quad i \in \{1, \dots, l\}, \quad \nu_j := (-1)^{j+1} C_l^j j^{-1}, \quad j \in \{1, \dots, l\}. \quad (3.9)$$

Будем считать, что f_1 доопределена нулем для всех $x \geq 3/4$, а f_2 для всех $x \leq 1/4$. Наконец, положим $f(x, y) := f_1(x, y) + f_2(x, y)$ для $(x, y) \in Q$. Мы хотим показать, что функция f дает искомое продолжение функции φ .

Используя лемму 2 работы [7], получим при $\varepsilon > 0$ (аналогичные оценки справедливы при $\varepsilon < 0$)

$$\left| \frac{\partial^l V_\varepsilon^l[\varphi]}{\partial x^l}(x) \right| \leq \frac{C_{13}}{\varepsilon^{l+1}} \int_0^{l\varepsilon} |\Delta_h^l \varphi(x)| dh, \quad |V_\varepsilon^l[\varphi](x) - \varphi(x)| \leq \frac{C_{14}}{\varepsilon} \int_0^{l\varepsilon} |\Delta_h^l \varphi(x)| dh. \quad (3.10)$$

Поскольку из вышеприведенных свойств функций ψ_m вытекает, что для любого $y \in (0, 1)$ лишь конечное число (не более трех) слагаемых в сумме (3.7) отлично от нуля, имеем

$$\frac{\partial^l \tilde{f}_1}{\partial y^l}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^l \psi_m}{\partial y^l}(y) V_\varepsilon^l[\varphi](x), \quad \frac{\partial^l \tilde{f}_1}{\partial x^l}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(y) \frac{\partial^l V_\varepsilon^l[\varphi]}{\partial x^l}(x). \quad (3.11)$$

Но тогда из (3.10), (3.11), учитывая, что $\sum_{m=0}^{\infty} (\partial^l \psi_m / \partial y^l)(y) = 0$ при $y \in (0, 1)$, и свойства функций ψ_m , получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^l \tilde{f}_1}{\partial y^l} \right\|_{L_p(Q, \gamma)}^p &\leq C \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial^l \psi_m}{\partial y^l} \right\|_{L_p((0, 1))}^p \right)^p \left\| \delta_{l\rho_m}^l \varphi \right\|_{L_p\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)}^p, \\ \left\| \frac{\partial^l \tilde{f}_1}{\partial x^l} \right\|_{L_p(Q, \gamma)}^p &\leq C \left(\sum_{m=0}^{\infty} \|\psi_m\|_{L_p((0, 1))}^p \frac{1}{(\rho_m)^{pl}} \right)^p \left\| \delta_{l\rho_m}^l \varphi \right\|_{L_p\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)}^p, \\ \|\tilde{f}_1\|_{L_p(Q, \gamma)}^p &\leq C \left(\sum_{m=0}^{\infty} \|\psi_m\|_{L_p((0, 1))}^p \right)^p \left\| V_{\rho_m}^l[\varphi] \right\|_{L_p\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)}^p. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Константа C в (3.12) не зависит ни от m , ни от φ .

Из свойств функций ψ_m следует

$$\|\psi_m\|_{L_p((0, 1))}^p \leq \rho_m, \quad \left\| \frac{\partial^l \psi_m}{\partial y^l} \right\|_{L_p((0, 1))}^p \leq \frac{C_{15}}{(\rho_m)^{lp-1}}. \quad (3.13)$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\rho_m)^{pl+p-1}} \int_0^{3/4} \gamma(x) \left(\int_0^{l\rho_m} |\Delta_h^l \varphi(x)| dh \right)^p dx \\ &\leq C_{16} \int_0^{1/4} \frac{1}{z^{p(l+1)}} \int_0^{3/4} \gamma(x) \left(\int_0^z |(\Delta_t^l \varphi)(x)| dt \right)^p dx dz \\ &\leq C_{16} \|\varphi\|_{\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)}^p. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Пользуясь леммой А, продолжим вес $\gamma \in A_p((0, 1))$ на всю ось так, что новая весовая функция (мы обозначим ее тем же символом) $\gamma \in A_p(\mathbb{R})$. С помощью теоремы В получим

$$\begin{aligned} &\left\| V_{\rho_m}^l[\varphi] \right\|_{L_p\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)}^p \\ &\leq C_{17} \int_0^{3/4} \gamma(x) \frac{1}{(\rho_m)^p} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \int \left| \omega\left(\frac{z-x}{ij\rho_m}\right) \right| |\varphi(z)| dz \right)^p dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{18} \int_0^{3/4} \gamma(x) \frac{1}{(\rho_m)^p} \left(\int_x^{x+\rho_m l^2} |\varphi(h)| dh \right)^p dx \\
&\leq C_{18} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \left(\sup_{\eta>0} \frac{1}{2\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} \chi_{(0,1)}(h) |\varphi(h)| dh \right)^p dx \\
&\leq C_{19} \|\varphi\|_{L_p((0,1),\gamma)}^p.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Следовательно, из (3.12)–(3.15) легко следует

$$\|\tilde{f}_1|W_p^l(Q, \gamma)\| \leq C_{20} \|\varphi|\tilde{B}_p^{l-1/p}((0,1), \gamma)\|.$$

Отсюда и из леммы 2.1 имеем

$$\|f_1|W_p^l(Q, \gamma)\| \leq C_{21} \|\varphi|\tilde{B}_p^{l-1/p}((0,1), \gamma)\|. \tag{3.16}$$

Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что

$$\|f_2|W_p^l(Q, \gamma)\| \leq C_{22} \|\varphi|\tilde{B}_p^{l-1/p}((0,1), \gamma)\|. \tag{3.17}$$

Отметим, что константы $C_{13}, \dots, C_{22}$ не зависели от функции φ .

Покажем теперь, что $\text{tr}|_{y=0} f_1 = \Theta_1 \varphi$. Как отмечалось выше, для любого $y \in (0, 1)$, в силу свойств функций ψ_m , сумма в (3.7) содержит не более трех ненулевых слагаемых (обозначим их номера через $\pi(y) - 1, \pi(y), \pi(y) + 1$). Пользуясь неравенствами Гёльдера, Минковского, оценкой (3.10), и, учитывая, что $\varphi \in \tilde{B}_p^{l-1/p}((0,1), \gamma)$, получим

$$\begin{aligned}
&\|\{f_1(\cdot, y) - \Theta_1 \varphi\}|L_1((0,1))\| \leq \|\gamma^{-1/p}|L_{p'}((0,1))\| \|\{f_1(\cdot, y) - \Theta_1 \varphi\}|L_p((0,1), \gamma)\| \\
&\leq C_{23} \sum_{m=\pi(y)-1}^{\pi(y)+1} \frac{1}{\rho_m} \left(\int_0^{3/4} \gamma(x) \left(\int_0^{l\rho_m} |(\Delta_h^l \varphi)(x)| dh \right)^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Аналогично доказывается, что $\text{tr}|_{y=0} f_2 = \Theta_2 \varphi$. Но тогда из построения функции f заключаем, что $\text{tr}|_{y=0} f = \varphi$. Для окончания доказательства остается заметить, что из оценок (3.16) и (3.17) следует оценка (3.6).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma \in A_p((0,1))$. Тогда

$$\text{Tr}|_{y=0} W_p^l(Q, \gamma) = \tilde{B}_p^{l-1/p}((0,1), \gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении лемм 3.1 и 3.2.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma \in A_p(\mathbb{R})$. Тогда

$$\text{Tr}|_{y=0} W_p^l(\mathbb{R}_+^2, \gamma) = \tilde{B}_p^{l-1/p}(\mathbb{R}, \gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы дословно повторяет доказательство предыдущей, если провести соответствующие изменения технического характера. Например, не нужно использовать срезы Θ_i и продолжать вес на всю ось.

4. Теоремы о следах для пространств $W_1^1(Q, \gamma)$, $\gamma \in A_1$. В этом пункте мы докажем теорему, которая обобщает соответствующий результат Гальярдо (при $p = 1$) (см. [8]), полученный им в безвесовом случае. Отметим, что обобщения теоремы Гальярдо на случай, когда вес зависит от “продольной” координаты, ранее не рассматривались. Далее $G := \{(x, t) \in Q, [x, x+t] \subset (0, 1)\}$, а χ_G – характеристическая функция множества G .

ЛЕММА 4.1. Пусть $\varphi \in L_1((0, 1), \gamma)$, $\gamma \in A_1((0, 1))$. Тогда

$$\|\delta_{(-1)^{i+1}h}^1 \varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для $i = 1$, поскольку для $i = 2$ доказательство аналогично. Положим $g(x, h) := \chi_G(x, h)\gamma(x)\delta_h^1[\varphi](x)$. Нетрудно видеть, что $L_1((0, 1), \gamma) \subset L_1((0, 1))$, поскольку $\gamma \in A_1((0, 1))$. Следовательно, почти каждая точка $(0, 1)$ является точкой Лебега функции φ . Отсюда заключаем, что выполнено $\lim_{h \rightarrow +0} g(x, h) = 0$ для почти всех $x \in (0, 1)$. Далее, учитывая, что $\gamma \in A_1((0, 1))$, при $h > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \|\delta_h^1 \varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\| \\ & \leq \frac{1}{h} \int_0^1 \chi_G(x, h)\gamma(x) \int_0^h |\varphi(x+t)| dt dx + \int_0^1 \gamma(x)|\varphi(x)| dx \\ & = \|\varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\| + \frac{1}{h} \int_0^1 \gamma(x) \int_x^{\min\{x+h, 1\}} |\varphi(t)| dt dx \\ & = \|\varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\| + \int_0^h |\varphi(t)| \frac{1}{h} \int_0^t \gamma(x) dx dt + \int_h^1 |\varphi(t)| \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \gamma(x) dx dt \\ & \leq C_{24} \|\varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\|. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для окончания доказательства остается воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\gamma \in A_1((0, 1))$, $\varphi \in L_1((0, 1), \gamma)$. Тогда существует функция $f \in W_1^1(Q, \gamma)$ такая, что $\text{tr}|_{y=0} f = \varphi$. Более того

$$\|f|_{W_1^1(Q, \gamma)}\| \leq M_3 \|\varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\|. \quad (4.3)$$

Константа M_3 не зависит от функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения во многом опирается на соответствующие рассуждения в безвесовом случае, поэтому мы укажем лишь схему доказательства. Опущенные детали можно найти в [5; с. 230].

Пользуясь леммой 4.1, можно построить последовательность положительных чисел $\{\sigma_m\}_{m=0}^\infty$ такую, что $\sigma_{m+1} \leq (1/2)\sigma_m$, $\sum_{m=0}^\infty \sigma_m = 1$ и

$$\|\delta_{\sigma_m}^1 \varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\| \leq \frac{C_{25}}{2^m} \|\varphi|_{L_1((0, 1), \gamma)}\|, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (4.4)$$

Положим $\lambda_k := \sum_{s=k}^\infty \sigma_s$, $G_k := \{y \in (0, 1) : \lambda_{k+1} < y < \lambda_k\}$. Можно показать [5], что существует последовательность функций $\{\psi_m\}_{m=0}^\infty$ такая, что $0 \leq \psi_m(y) \leq 1$, $\sum_{m=0}^\infty \psi_m(y) = 1$, $y \in (0, 1)$. Более того,

$$\text{supp } \psi_m \subset \left\{ y \in (0, 1) : \lambda_{m+1} - \frac{\sigma_{m+1}}{4} \leq y \leq \lambda_m + \frac{\sigma_m}{4} \right\},$$

$$\left\| \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right|_{L_1(0,1)} \leq C_{26}$$

для $m \in \mathbb{N}$ с константой C_{26} , не зависящей от m .

При $i = 1$ для $x \in (0, 3/4)$, $y \in (0, 1)$, а при $i = 2$ для $x \in (1/4, 1)$, $y \in (0, 1)$ положим

$$\tilde{f}_i(x, y) := \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(y) V_{(-1)^{i+1}\sigma_m/4}^1[\varphi](x), \quad f_i(x, y) := \Theta_i(x) \tilde{f}_i(x, y). \quad (4.5)$$

Будем считать, что f_1 доопределена нулем для всех $x \geq 3/4$, а f_2 для всех $x \leq 1/4$.

Наконец, положим $f(x, y) := f_1(x, y) + f_2(x, y)$ для $(x, y) \in Q$. Рассуждая как при выводе оценки (3.18), используя лемму 4.1, нетрудно установить, что $\text{tr}|_{y=0} f = \varphi$.

Аналогично оценке (3.12) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} \right|_{L_1(Q, \gamma)} &\leq C_{27} \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right|_{L_1((0,1))} \left\| \delta_{\sigma_m}^1 \varphi \right|_{L_1\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)} \\ &\leq \tilde{C}_{27} \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \delta_{\sigma_m}^1 \varphi \right|_{L_1\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)}, \\ \left\| \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} \right|_{L_1(Q, \gamma)} &\leq C_{28} \sum_{m=0}^{\infty} \|\psi_m\|_{L_1((0,1))} \left\| \frac{1}{\sigma_m} \delta_{\sigma_m}^1 \varphi \right|_{L_1\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)} \\ &\leq \tilde{C}_{28} \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \delta_{\sigma_m}^1 \varphi \right|_{L_1\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)}, \\ \|\tilde{f}_1\|_{L_1(Q, \gamma)} &\leq C_{29} \sum_{m=0}^{\infty} \|\psi_m\|_{L_1((0,1))} \left\| V_{\sigma_m}^1[\varphi] \right|_{L_1\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Рассуждая как при выводе оценки (3.15) (вместо теоремы о максимальной функции следует учесть, что $\gamma \in A_1((0, 1))$), нетрудно установить оценку

$$\left\| V_{\sigma_m}^1[\varphi] \right|_{L_1\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \gamma\right)} \leq C_{30} \|\varphi\|_{L_1((0,1), \gamma)}. \quad (4.7)$$

Из (4.4), (4.6), (4.7) свойств функции σ_m и леммы 2.1 вытекает оценка

$$\|f_1\|_{W_1^1(Q, \gamma)} \leq C_{31} \|\varphi\|_{L_1((0,1), \gamma)}.$$

Проведя аналогичные рассуждения для f_2 , и собирая все оценки, устанавливаем (4.3).

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\gamma \in A_1((0, 1))$. Тогда

$$\text{Tr}|_{y=0} W_1^1(Q, \gamma) = L_1((0, 1), \gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении лемм 2.2, 4.2.

Справедлива также

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\gamma \in A_1(\mathbb{R})$. Тогда $\text{Tr}|_{y=0} W_1^1(\mathbb{R}_+^2, \gamma) = L_1(\mathbb{R}, \gamma)$.

5. Один результат отрицательного характера. Выше мы описали следы весовых пространств Соболева $W_p^l(Q, \gamma)$ в терминах весовых пространств Бесова $\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)$ в случае, когда $1 < p < \infty$, $\gamma \in A_p((0, 1))$. Естественно возникает вопрос, возможно ли описать след $W_p^l(Q, \gamma)$ в терминах весовых пространств $\tilde{B}_p^{l-1/p}((0, 1), \gamma)$, если вес принадлежит существенно более широкому классу чем $A_p((0, 1))$? Мы покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный. Для этого мы докажем более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для любых $0 < s < 1$ и $1 < p < \infty$ существует весовая функция $\gamma_{s,p}$, не обладающая свойством удвоения, и существует функция $f \in W_p^1((0, 1), \gamma_{s,p})$ такая, что $f \notin \tilde{B}_p^s((0, 1), \gamma_{s,p})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символом χ_E обозначим характеристическую функцию измеримого множества $E \subseteq (0, 1)$. Пусть

$$P := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{2k-1}} \right), \quad G := (0, 1) \setminus P.$$

Положим

$$\gamma_{s,p}(x) := \frac{1}{x^{\beta_1}} \chi_P(x) + x^{\beta_2} \chi_G(x);$$

числа $0 < \beta_1 < 1$, $\beta_2 > 0$ будут выбраны в дальнейшем. Заметим, что $\gamma_{s,p}$ не обладает свойством удвоения.

Пусть

$$g(x) := \frac{1}{x^{\delta+1}} \chi_G(x);$$

число $0 < \delta < 1$ выберем в дальнейшем. Положим $f(x) := \int_x^1 g(t) dt$ для $x \in (0, 1)$. Покажем, что f – искомая функция.

С помощью теоремы Лебега о дифференцировании интеграла Лебега по нижнему пределу, непосредственным подсчетом устанавливаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L_p((0, 1), \gamma)} &\leq \int_0^1 \frac{x^{\beta_2}}{x^{p+p\delta}} dx, \\ \|f\|_{L_p((0, 1), \gamma)}^p &\leq C_{32} \left(\int_0^1 x^{\beta_2-p\delta} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta_1+p\delta}} dx \right). \end{aligned}$$

Теперь легко видеть, что $f \in W_p^1((0, 1), \gamma)$, когда $\beta_1 < 1 - p\delta$ и $\beta_2 > p + p\delta - 1$. Если, кроме того, $\beta_1 + p\delta + sp \geq 1$, то

$$\begin{aligned} &\|f\|_{\tilde{B}_p^s((0, 1), \gamma)}^p \\ &\geq \int_0^{1/8} \gamma(x) \int_0^{1-x} \frac{1}{h^{sp+p}} \left(\int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt \right)^p \frac{dh}{h} dx \\ &\geq \int_0^{1/8} \chi_P(x) \frac{1}{x^{\beta_1}} \int_0^{1-x} \frac{1}{h^{sp+p}} \left(\int_0^h \int_x^{x+t} \chi_G(\eta) \frac{1}{\eta^{1+\delta}} d\eta dt \right)^p \frac{dh}{h} dx \\ &\geq \sum_{k=3}^{\infty} \int_{1/2^{2k+2}}^{1/2^{2k+1}} \frac{1}{x^{\beta_1}} \int_{1/2^{2k-1}-x}^{1/2^{2k-2}-x} \frac{1}{h^{sp+p+1}} \left(\int_{1/2^{2k}-x}^{1/2^{2k-1}-x} C(\delta) 2^{2k\delta} dt \right)^p dh dx \\ &\geq C(\delta, \beta_1, p) \sum_{k=3}^{\infty} 2^{2k(\beta_1+p\delta+sp+1-2)} = +\infty. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Оценка (5.1) завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 5.1 легко следует основное утверждение данного пункта.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любого $1 < p < \infty$ существует не обладающая свойством удвоения весовая функция γ_p такая, что*

$$\mathrm{Tr}|_{y=0} W_p^1(Q, \gamma_p) \neq \tilde{B}_p^{1-1/p}((0, 1), \gamma_p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданного p положим $s = 1 - 1/p$ и построим, пользуясь предыдущей теоремой, вес γ_p , необладающий свойством удвоения, и функцию $f \in W_p^1((0, 1), \gamma_p)$, $f \notin \tilde{B}_p^{1-1/p}((0, 1), \gamma_p)$. Положив $F(x, y) := f(x)$ для $(x, y) \in Q$, заключаем, что $f = \mathrm{tr}|_{y=0} F$ и $F \in W_p^1(Q, \gamma_p)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Как доказано в [3], если вес $\gamma \in A_p((0, 1))$ при $1 \leq p < \infty$, то γ обладает свойством удвоения. Отсюда следует, что построенные в теоремах 5.1 и 5.2 весовые функции не могут принадлежать $\bigcup_{1 \leq p < \infty} A_p((0, 1))$.

После того, как работа была сдана в печать, автору стало известно о работе [9], в которой изучались следы функциональных пространств с “радиальными” весами.

Автор выражает глубокую признательность член-корреспонденту РАН О. В. Бесову за научное руководство и профессору Г. А. Калябину за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Abels, M. Krbeč, K. Schumacher, “On the trace space of a Sobolev space with a radial weight”, *J. Funct. Spaces Appl.*, **6**:3 (2008), 259–276.
- [2] А. И. Тюленев, “Характеризация следов весовых пространств Соболева”, *Тр. МФТИ*, **3**:1 (2011), 141–145.
- [3] E. M. Stein, *Harmonic Analysis. Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [4] V. S. Rychkov, “Littlewood–Paley theory and function spaces with A_p^{loc} -weights”, *Math. Nachr.*, **224**:1 (2001), 145–180.
- [5] V. I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, Teubner-Texte Math., **137**, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1998.
- [6] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.
- [7] Г. А. Калябин, С. И. Письменная, “Описание следов функций, производные которых ограничены с некоторыми весами”, *Матем. заметки*, **35**:3 (1984), 357–368.
- [8] E. Gagliardo, “Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **27** (1957), 284–305.
- [9] D. D. Haroske, H.-J. Schmeisser, “On trace spaces of function spaces with a radial weight: the atomic approach”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**:8-10 (2010), 875–896.

А. И. Тюленев

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: tyulenev-math@yandex.ru

Поступило

25.04.2012

Исправленный вариант

08.04.2013