Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Хакимов, Единственность слабо периодической
гиббсовской меры для НС-модели, *Матем. заметки*,
2013, том 94, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 06:27:28

Единственность слабо периодической гиббсовской меры для НС-модели

Р. М. Хакимов

Пусть $\tau^k = (V, L)$ – дерево Кэли порядка $k \geq 1$, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер, где V, L – есть множество вершин и ребер дерева τ^k , соответственно.

Для любого фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

где $d(x, y)$ – расстояние между x, y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющего x и y .

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$. Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация, т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занята, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободная. Конфигурация σ называется *допустимой*, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из V (V_n или W_n , соответственно); обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}). Ясно, что $\Omega \subset \Phi^V$.

Гамильтониан НС (Hard Core)-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = \begin{cases} J \sum_{x \in V} \sigma(x), & \text{если } \sigma \in \Omega, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega, \end{cases}$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Основной задачей является изучение предельных гиббсовских мер. В общем случае существование предельных гиббсовских мер для достаточно широкого класса гамильтонианов доказана Добрушиным (см. например [1]). Известно [2], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставить совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \quad (1)$$

где $\lambda = e^J > 0$ – параметр, $S(x)$ – множество “прямых потомков” точки $x \in V$. Кроме того, для $x \in V$ показана следующая оценка (см. [2]):

$$(1 + \lambda)^{-k} < z_x < 1. \quad (2)$$

Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор группа, где $\widehat{G}_k$ – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Если гиббсовская мера инвариантна относительно некоторой подгруппы конечного индекса $\widehat{G}_k \subset G_k$, то она называется $\widehat{G}_k$ -периодической. G_k -периодические совокупности называются *трансляционно-инвариантными* [1], [3].

В многочисленных работах (см. например [2], [4], [5]) на дереве Кэли изучены периодические меры Гиббса для различных моделей статистической механики. Эти меры, в основном, были трансляционно-инвариантными либо периодическими с периодом два. В работе [6] введены более общие понятия периодической меры Гиббса, т.е. слабо периодические гиббсовские меры, и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли. В работе [2] изучены Гиббсовские меры для НС-модели на дереве Кэли и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса для этой модели единственна. Кроме того, при

некоторых условиях на параметры НС-модели доказана неединственность периодических мер Гиббса с периодом два.

Эта работа посвящена изучению слабо периодических мер Гиббса для НС-модели на дереве Кэли для любого нормального делителя индекса два и доказывается единственность таких мер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$ -периодической, если $z_{yx} = z_x$ для всех $x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$. G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ положим $x_\downarrow = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ (см. [6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$ -слабо периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$ для всех $x \in G_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мера μ называется $\widehat{G}_k$ -(слабо) периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$ -(слабо) периодической совокупности величин z .

Пусть $\emptyset \neq A \subset N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$. Известно, что любая подгруппа индекса два группы G_k имеет вид

$$H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четное число} \right\},$$

где $w_x(a_i)$ – число букв a_i в слове $x \in G_k$ (см. [4]).

Заметим, что H_A -слабо периодическая совокупность z имеет вид

$$z_x = \begin{cases} z_1, & x \in H_A, x_\downarrow \in H_A, \\ z_2, & x \in H_A, x_\downarrow \in G_k \setminus H_A, \\ z_3, & x \in G_k \setminus H_A, x_\downarrow \in H_A, \\ z_4, & x \in G_k \setminus H_A, x_\downarrow \in G_k \setminus H_A. \end{cases}$$

Тогда в силу (1) $z_i, i = 1, \dots, 4$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_3} \right)^i \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, & z_2 &= \left(\frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_3} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, \\ z_3 &= \left(\frac{1 + \lambda z_4}{1 + \lambda z_2} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}, & z_4 &= \left(\frac{1 + \lambda z_4}{1 + \lambda z_2} \right)^i \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $|A| = i$; здесь $|A|$ обозначает число элементов множества A . Разделив в этой системе уравнений первое уравнение на второе, третье на четвертое, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_3}, \quad \frac{z_3}{z_4} = \frac{1 + \lambda z_2}{1 + \lambda z_4}. \quad (4)$$

Используя эту систему уравнений, (3) можно переписать как

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^i \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, & z_2 &= \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, \\ z_3 &= \left(\frac{z_4}{z_3} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}, & z_4 &= \left(\frac{z_4}{z_3} \right)^i \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из первого уравнения системы (5) найдем z_2 , из четвертого z_3 и, подставив их в четвертое и первое уравнения системы (3), соответственно, получим

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1 + \lambda z_4)^k}{((1 + \lambda z_4)^{k/i} + \lambda z_4^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_4 &= \frac{(1 + \lambda z_1)^k}{((1 + \lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^{k-i}} \end{aligned}$$

или

$$z_1 = \varphi(z_4) \cdot \psi(z_1), \quad z_4 = \varphi(z_1) \cdot \psi(z_4), \quad (6)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{(1 + \lambda z)^k}{((1 + \lambda z)^{k/i} + \lambda z^{1-1/i})^i}, \quad \psi(z) = \frac{1}{(1 + \lambda z)^{k-i}}.$$

Следующая лемма полезна для наших исследований.

ЛЕММА. 1) Если в системе уравнений (3) выполнены равенства $z_1 = z_4$, $z_2 = z_3$, то $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

2) Тогда и только тогда $z_1 = z_4$, когда $z_2 = z_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $z_2 = z_3$; тогда из первого уравнения (4) имеем $z_1/z_2 = (1 + \lambda z_1)/(1 + \lambda z_2)$, откуда $z_1 = z_2$. Кроме того, по условию леммы $z_1 = z_4$; следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

2) Пусть $z_1 = z_4$; тогда из (4) имеем $z_3/z_2 = (1 + \lambda z_2)/(1 + \lambda z_3)$, откуда $z_2 = z_3$. Пусть $z_2 = z_3$; тогда из (4) имеем $z_1/z_4 = (1 + \lambda z_1)/(1 + \lambda z_4)$, откуда получим $z_1 = z_4$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Для любых $k \geq 1$, $i \leq k$, где $i = |A|$, и при любом $\lambda > 0$ для НС-модели H_A -слабо периодическая мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что система функциональных уравнений (6) имеет корни только вида $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$. Для этого в (6) вычтем из первого уравнения второе и в правую часть полученного уравнения прибавим и вычтем $\varphi(z_1) \cdot \psi(z_1)$, затем используя теорему Лагранжа о среднем для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на (z_1, z_4) , получим

$$z_1 - z_4 = \psi(z_1) \cdot \varphi'(\xi) \cdot (z_4 - z_1) + \varphi(z_1) \cdot \psi'(\eta) \cdot (z_1 - z_4),$$

где $\xi \in (z_1, z_4)$, $\eta \in (z_1, z_4)$. Отсюда

$$(z_1 - z_4) \cdot [1 + \psi(z_1) \cdot \varphi'(\xi) - \varphi(z_1) \cdot \psi'(\eta)] = 0. \quad (7)$$

Из этого уравнения получим, что $z_1 = z_4$ или

$$1 + F(z_1, \xi, \eta) = 0, \quad (8)$$

где

$$F(z_1, \xi, \eta) = \psi(z_1) \cdot \varphi'(\xi) - \varphi(z_1) \cdot \psi'(\eta).$$

Здесь $\psi'(\eta) = -\lambda(k-i)/(1+\lambda\eta)^{k-i+1} \leq 0$, т.е. функция $\psi(\eta)$ убывает, так как $i \leq k$, $\lambda > 0$, $\eta > 0$, а производная функции $\varphi(z)$ в точке $\xi \in (z_1, z_4)$ имеет вид

$$\varphi'(\xi) = \frac{\lambda(1+\lambda\xi)^{k-1}[\lambda\xi(k-i+1) - i + 1]}{\xi^{1/i}[(1+\lambda\xi)^{k/i} + \lambda\xi^{1-1/i}]^{i+1}}.$$

Всевозможные значения (i, k) разделим на два случая.

1) Случай $i \leq (k+1)/2$. Покажем, что уравнение (8) не имеет решений, т.е.

$$F(z_1, \xi, \eta) > -1. \quad (9)$$

Для этого, используя (2), рассмотрим следующую оценку:

$$\begin{aligned} F(z_1, \xi, \eta) &> \frac{\lambda(1+\lambda/(1+\lambda)^k)^{k-1}[\lambda(k-i+1)/(1+\lambda)^k - i + 1]}{(1+\lambda)^{k-i}[(1+\lambda)^{k/i} + \lambda]^{i+1}} \\ &\quad + \frac{\lambda(k-i)(1+\lambda/(1+\lambda)^k)^k}{[(1+\lambda)^{k/i} + \lambda]^i(1+\lambda)^{k-i+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \frac{\lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^{k-1}[\lambda(k-i+1) + (1-i)(1+\lambda)^k]}{(1+\lambda)^{k^2+k-i+1}[(1+\lambda)^k + \lambda]^{i+1}} \\
 &\quad + \frac{\lambda(k-i)((1+\lambda)^k + \lambda)^k}{(1+\lambda)^{k^2+k-i+1}[(1+\lambda)^k + \lambda]^i} \\
 &> -1.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 &\lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^{k-i-2}[\lambda(k-i+1) + (1-i)(1+\lambda)^k] \\
 &\quad + \lambda(k-i)((1+\lambda)^k + \lambda)^{k-i} + (1+\lambda)^{k^2+k-i+1} > 0.
 \end{aligned}$$

Введя обозначение $a = 1 + \lambda$, перепишем последнее неравенство:

$$\lambda(a^k + \lambda)^{k-i-2}[\lambda(k-i+1) + (1-i)a^k] + \lambda(k-i)(a^k + \lambda)^{k-i} + a^{k^2+k-i+1} > 0$$

или

$$\lambda(a^k + \lambda)^{k-i}[\lambda(k-i+1) + (k-i)(a^k + \lambda)^2 - (i-1)a^k] + a^{k^2+k-i+1}(a^k + \lambda)^2 > 0.$$

Покажем, что разность $(k-i)(a^k + \lambda)^2 - (i-1)a^k$ положительна. Действительно,

$$(k-i)(a^k + \lambda)^2 - (i-1)a^k = a^k[(k-i)a^k - (i-1)] + 2(k-i)\lambda a^k + (k-i)\lambda^2.$$

Учитывая то, что $a = 1 + \lambda$, рассмотрим разность

$$(k-i)a^k - (i-1) = (k-i)(1+\lambda)^k - (i-1) = k-i + (k-i)k\lambda + \dots + (k-i)\lambda^k - (i-1).$$

Отсюда ясно, что последнее выражение положительно, если $k - 2i + 1 \geq 0$ или, что то же самое, $i \leq (k+1)/2$. Следовательно, $\varphi'(\xi) > -1$, а это значит, что уравнение (7) при $i \leq (k+1)/2$ имеет корни только вида $z_1 = z_4$; следовательно, по выше доказанной лемме система уравнений (3) при этом условии имеет единственное решение вида $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

2) Случай $(k+1)/2 < i \leq k$. При $i = k$ доказательство очевидно. Рассмотрим i , $(k+1)/2 < i \leq k-1$. В этом случае тоже достаточно доказать неравенство (9). Аналогично предыдущему, используя (2), можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 \psi(z_1) \cdot \varphi'(\xi) - \varphi(z_1) \cdot \psi'(\eta) &> \frac{\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1} \cdot [\lambda(k+1-i) - (i-1)(1+\lambda)^k]}{(1+\lambda)^{k^2+k-i}[(1+\lambda)^{k/i} + \lambda]^{i+1}} \\
 &\quad + \frac{\lambda(k-i)[(1+\lambda)^k + \lambda]^k}{(1+\lambda)^{k^2+k-i+1}[(1+\lambda)^{k/i} + \lambda]^i}.
 \end{aligned}$$

Используя условие 2) и при этом уменьшая числитель и увеличивая знаменатель каждой дроби, перепишем эту оценку:

$$\begin{aligned}
 &\psi(z_1) \cdot \varphi'(\xi) - \varphi(z_1) \cdot \psi'(\eta) \\
 &> \frac{\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1} \cdot [\lambda(k+1-(k-1)) - (k-1-1)(1+\lambda)^k]}{(1+\lambda)^{k^2+k-(k+1)/2} \cdot [(1+\lambda)^{k/((k+1)/2)} + \lambda]^{k-1+1}} \\
 &\quad + \frac{\lambda(k-(k-1)) \cdot [(1+\lambda)^k + \lambda]^k}{(1+\lambda)^{k^2+k-(k+1)/2+1} \cdot [(1+\lambda)^{k/((k+1)/2)} + \lambda]^{k-1}} \\
 &> \frac{\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1} \cdot [2\lambda - (k-2)(1+\lambda)^k]}{(1+\lambda)^{2k^2+k+1} \cdot [(1+\lambda)^k + \lambda]^k} + \frac{\lambda \cdot [(1+\lambda)^k + \lambda]^k}{(1+\lambda)^{2k^2+k+1} \cdot [(1+\lambda)^k + \lambda]^k} \\
 &= \frac{\lambda \cdot [2\lambda - (k-2)(1+\lambda)^k]}{(1+\lambda)^{2k^2+k+1} \cdot [(1+\lambda)^k + \lambda]} + \frac{\lambda}{(1+\lambda)^{2k^2+k+1}} > -1.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot [2\lambda - (k-2)(1+\lambda)^k] + \lambda \cdot [(1+\lambda)^k + \lambda] + (1+\lambda)^{2k^2+k+1} \cdot [(1+\lambda)^k + \lambda] \\ & = 3\lambda^2 + (1+\lambda)^k \cdot [\lambda + \lambda(1+\lambda)^{2k^2+1} + (1+\lambda)^{2k^2+k+1} - (k-2)\lambda] > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно, так как разность $(1+\lambda)^{2k^2+k+1} - (k-2)\lambda$ положительна. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992. [2] Y. Suhov, U. A. Rozikov, *Queueing Syst.*, **46**:1-2 (2004), 197–212. [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980. [4] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117. [5] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175. [6] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 507–516.

Р. М. Хакимов

Наманганский государственный университет

E-mail: rustam-7102@rambler.ru

Поступило

04.11.2012