Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Полякова, О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 548–566

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:58:53

О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций

Д. А. Полякова

Рассматривается сюръективный оператор свертки в пространствах комплекснозначных ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на конечном интервале. Получено полное описание характеристических функций, для которых этот оператор имеет линейный непрерывный правый обратный. В качестве частного случая изучены дифференциальные операторы конечного и бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Библиография: 28 названий.

DOI: 10.4213/mzm9688

Введение. История рассматриваемой задачи о существовании линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) восходит, по-видимому, к началу 50-х годов, когда Л. Шварц сформулировал ее для дифференциального оператора конечного порядка с постоянными коэффициентами (по этому поводу см. [1]). В последнее время данная проблема интенсивно исследуется в различных пространствах бесконечно дифференцируемых и аналитических функций для уравнений свертки, включающих в себя как частный случай дифференциальные уравнения конечного и бесконечного порядка [1]–[6]. С точки зрения приложений (см., например, [7]) одним из наиболее важных направлений в данной тематике является изучение уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций (УДФ) и ультрараспределений. Напомним, что теория УДФ и ультрараспределений начала развиваться в 60-х годах 20-го века благодаря работам Румье, Берлинга и Бьорка [8]–[10]. Недавно в работах Брауна, Майзе и Тейлора (см., например, [11]) были развиты новые подходы к данной теории, что позволило решить ряд известных задач, касающихся как самой теории, так и ее приложений.

Общая постановка задачи о ЛНПО для оператора свертки T_μ с характеристической функцией μ следующая. Предположим, что в некотором локально выпуклом пространстве $\mathcal{E}$ (над полем $\mathbb{C}$) УДФ рассматривается уравнение свертки

$$T_\mu f = g, \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-31083).

причем известно, что оно разрешимо в $\mathcal{E}$ при любой правой части g из $\mathcal{E}$. Обычно решение этого уравнения не является единственным, т.е. другими словами, однородное уравнение свертки $T_\mu f = 0$ имеет нетривиальное подпространство решений. Спрашивается, при каких условиях на символ μ решение f уравнения (1) можно выбрать линейно и непрерывно зависящим от правой части g ?

Ранее в [2] ответ на данный вопрос был получен для пространств УДФ Берлинга максимального типа, задаваемых весом ω . Для этого использовался новый, предложенный в [2], [12]–[14], неконструктивный подход, связанный с использованием специальных семейств субгармонических функций. В настоящей работе этот подход распространяется на гораздо более тонкие по структуре пространства $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ УДФ Берлинга нормального типа на конечном интервале. Полная характеристика символов μ , для которых проблема Шварца имеет положительное решение в этих пространствах, составляет основной результат работы, который заключается в следующем. Пусть $(\lambda_s)_s$ – последовательность нулей символа μ сюръективного оператора свертки $T_\mu: \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I) \rightarrow \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$. Для того чтобы уравнение свертки (1) имело в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ решение f , линейно и непрерывно зависящее от правой части $g \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$, необходимо и достаточно, чтобы нули $(\lambda_s)_s$ символа μ удовлетворяли условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\lambda_s)} = 0.$$

Отметим, что работа существенным образом опирается на результаты, полученные ранее автором в [15], [16], касающиеся соответственно сюръективности оператора T_μ и базиса в $\ker T_\mu$.

Работа состоит из трех пунктов. В п. 1 приводятся все необходимые сведения о весовых функциях, рассматриваемых пространствах $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ УДФ и об операторе свертки T_μ . Второй пункт посвящен функциональному критерию существования ЛНПО для T_μ , на основании которого устанавливаются необходимые и достаточные условия, формулируемые в терминах семейств субгармонических функций. Наконец, в п. 3 доказывается основной результат работы – теорема 6.

1. Оператор свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$. Под *весовой функцией* будем понимать непрерывную неубывающую функцию $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющую условиям (α) выполнено

$$\forall p > 1 \quad \exists C > 0 \quad \omega(x+y) \leq p(\omega(x) + \omega(y)) + C \quad \forall x, y \geq 0;$$

$$(\alpha') \quad \omega(t) = o(t), \quad t \rightarrow \infty;$$

$$(\gamma) \quad \ln t = o(\omega(t)), \quad t \rightarrow \infty;$$

$$(\delta) \quad \varphi_\omega(x) := \omega(e^x) \text{ выпукла на } [0, \infty).$$

Сделаем одно замечание, касающееся условия (α) почти полуаддитивности сверху веса ω , которое впервые возникло в [17] при изучении пространств нормального типа. При построении теории УДФ и ультрараспределений (см. [11]) использовалось более слабое ограничение

$$\exists K > 1 \quad \omega(x+y) \leq K(\omega(x) + \omega(y) + 1) \quad \forall x, y \geq 0.$$

Однако, как было недавно установлено в [18], для достижения той же цели достаточно рассматривать более узкий класс почти полуаддитивных сверху весов. Таким образом, принятое нами условие (α) не ограничивает общности исследований.

Если дополнительно известно, что

(β) выполнено

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt < \infty,$$

то вес ω называется *неквазианалитическим*; в противном случае – *квазианалитическим*. Стандартными примерами неквазианалитических весов служат

$$\omega(t) = \begin{cases} t^\rho, & 0 < \rho < 1, \\ \ln^\beta(1+t), & \beta > 1, \\ \frac{t}{\ln^\beta(e+t)}, & \beta > 1; \end{cases}$$

а квазианалитических –

$$\omega(t) = \frac{t}{\ln^\beta(e+t)}, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $\omega(1) = 0$. Положим $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Заметим (см. [17]), что всякий вес ω обладает свойством

$$\lim_{r \downarrow 1} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(rt)}{\omega(t)} = 1. \quad (2)$$

Для неквазианалитического веса ω важную роль играет его гармоническое продолжение в открытую верхнюю (и нижнюю) полуплоскость:

$$P_\omega(x+iy) := \begin{cases} \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, & \text{если } y \neq 0, \\ \omega(x), & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Функция P_ω непрерывна и субгармонична во всей плоскости, причем $P_\omega(z) \geq \omega(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Далее, в силу (α) для каждого $p > 1$ найдется $C > 0$ такое, что при $y \neq 0$

$$\begin{aligned} P_\omega(x+iy) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega(x+yt)}{t^2 + 1} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{p(\omega(x) + \omega(yt)) + C}{t^2 + 1} dt \\ &= p(\omega(x) + P_\omega(iy)) + C. \end{aligned} \quad (3)$$

И наконец, легко проверяется (см. [15]), что $P_\omega(iy) = o(y)$, $y \rightarrow \infty$.

Перейдем к определению рассматриваемых пространств бесконечно дифференцируемых функций. Пусть

$$\varphi_\omega^*(y) := \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geq 0\}, \quad y \geq 0,$$

– сопряженная по Юнгу к функции φ_ω ; $I = (-a, a)$ – заданный конечный интервал в $\mathbb{R}$. Положим

$$\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I) = \left\{ f \in C^\infty(I) : \forall q \in (0, 1) \quad \forall l \in (0, a) \quad |f|_{\omega, q, l} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi_\omega^*(j/q)}} < \infty \right\}$$

и наделим пространство $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ естественной топологией, задаваемой набором преднорм $(|\cdot|_{\omega, q, l})_{q \in (0, 1), l \in (0, a)}$. При этом $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ является (FS)-пространством (см. [19]).

Как известно [20; теорема 1], преобразование Фурье–Лапласа функционалов

$$F: \varphi \in (\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I))' \mapsto \widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между $(\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I))'_\beta$, сильным сопряженным к $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$, и следующим пространством целых функций

$$H_{(\omega),I}^1 = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \exists q \in (0, 1) \quad \exists l \in (0, a) \quad \|f\|_{\omega,q,l} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|}} < \infty \right\}.$$

Пространство $H_{(\omega),I}^1$ наделяется естественной индуктивной топологией и является в ней (DFS)-пространством (см. [19]).

В соответствии с [15; предложение 1] множество всех мультипликаторов пространства $H_{(\omega),I}^1$ совпадает с

$$M_{(\omega)}^1 = \left\{ \mu \in H(\mathbb{C}) : \forall \varepsilon > 0 \quad \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,\varepsilon} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty \right\},$$

причем каждый такой мультипликатор является непрерывным, т.е. оператор умножения $\Lambda_\mu: f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H_{(\omega),I}^1$. Заметим (см. [15; лемма 1]), что в определении обоих пространств $H_{(\omega),I}^1$ и $M_{(\omega)}^1$ можно заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$.

Для нетривиального мультипликатора $\mu \in M_{(\omega)}^1$ находим соответствующий ему линейный непрерывный функционал $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ на $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ и определяем оператор свертки T_μ в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ следующим образом:

$$(T_\mu f)(x) := \langle \psi_\mu, f(x+y) \rangle, \quad f \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I), \quad x \in I.$$

Он действует линейно и непрерывно в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ и является сопряженным к оператору умножения Λ_μ . Целую функцию $\mu(z)$ называют *характеристической функцией* оператора T_μ .

Частным случаем оператора свертки T_μ являются дифференциальные операторы конечного и бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Именно, в [15; теорема 2] доказано, что если целая функция $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-i)^k z^k$ является *сильным мультипликатором* пространства $H_{(\omega),I}^1$, т.е. удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)}} < \infty,$$

то

$$T_\mu f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} \quad \text{для всех } f \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I).$$

Кроме того, в силу [15; теорема 3], если ω – неквазианалитический вес, для которого выполнено условие *строгости*:

$$\exists K > 1 \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K,$$

то все мультипликаторы μ из $M_{(\omega)}^1$ будут сильными.

Далее, в [15; теорема 1] было установлено, что оператор T_μ сюръективно отображает $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ на $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ тогда и только тогда, когда μ – делитель пространства $H_{(\omega),I}^1$. Это означает, что если $f \in H_{(\omega),I}^1$ и $f/\mu \in H(\mathbb{C})$, то $f/\mu \in H_{(\omega),I}^1$. Там же было получено полное описание всех делителей в терминах оценок снизу $|\mu(z)|$. Приведем одно из эквивалентных условий делителя:

(SC) выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists r_0 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq r_0 \quad \exists w \in \mathbb{C} \\ |w - x| \leq \delta \omega(x), \quad |\mu(w)| \geq e^{-\varepsilon \omega(w)}.$$

Итак, в случае, когда μ – делитель $H_{(\omega),I}^1$, для линейного непрерывного сюръективного оператора свертки T_μ естественно возникает вопрос о существовании ЛНПО, т.е. такого линейного непрерывного оператора $R: \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I) \rightarrow \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$, что

$$(T_\mu \circ R)g = g \quad \text{для всех } g \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I).$$

При этом функция $f := R(g)$ представляет собой искомое решение уравнения (1) в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$, линейно и непрерывно зависящее от правой части $g \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$. Заметим, что поскольку $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ – пространство Фреше, существование не обязательно линейного непрерывного правого обратного к T_μ следует из теоремы Майкла [21].

2. Условия в терминах семейств субгармонических функций. Первым основным результатом данного пункта является функциональный критерий существования ЛНПО для оператора T_μ . Прежде чем его сформулировать, напомним некоторые общие сведения и предшествующие результаты.

Как известно, если E и F – пространства Фреше, то линейный непрерывный сюръективный оператор $t: E \rightarrow F$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда его ядро $\ker t$ дополнимо в E . Это равносильно также тому, что сопряженный оператор t' имеет линейный непрерывный левый обратный (ЛНЛО).

Пусть μ – делитель $H_{(\omega),I}^1$, $(\lambda_s)_s$ – множество его нулей, k_s – кратность нуля λ_s . Если число нулей конечно, то $\ker T_\mu$ конечномерно (см. [16]), а следовательно, дополнимо в $H_{(\omega),I}^1$, так что T_μ имеет ЛНПО. В частности, все дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами (характеристические функции – полиномы) имеют ЛНПО. Таким образом, интерес представляет лишь случай бесконечного числа нулей. Будем считать, не ограничивая общности, что $|\lambda_s| \uparrow \infty$. В [16] было построено специальное открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулевого множества функции μ . Для построения брались две произвольные числовые последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\delta_k \downarrow 0$. Покрытие обладает следующими свойствами. Во-первых, каждое U_j содержит лишь конечное число нулей λ_s . Далее, при каждом $k \in \mathbb{N}$ для $j_k \leq j < j_{k+1}$ имеет место оценка

$$\ln |\mu(z)| < -\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - \varepsilon_k |\operatorname{Im} z|, \quad z \in U_j. \quad (4)$$

С другой стороны, если

$$\sigma_j := \min \{ \exp(-4\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - 4\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|) : z \in \overline{U_j} \}, \quad j_k \leq j < j_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

а $(\partial U_j)(\sigma_j) := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) < \sigma_j\}$ – σ_j -окрестность границы ∂U_j множества U_j , то

$$\ln |\mu(z)| \geq -3\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - 3\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|, \quad z \in (\partial U_j)(\sigma_j). \quad (6)$$

Наконец,

$$U_j \subset \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} > r_k\}, \quad j_k \leq j < j_{k+1},$$

где $r_k \uparrow \infty$ определяется ε_k и δ_k , а для $\operatorname{diam} U_j$ всегда выполняется оценка

$$\operatorname{diam} U_j \leq 2\delta_k \omega(\operatorname{Re} z_j) + 8\delta_k |\operatorname{Im} z_j|, \quad (7)$$

где z_j – некоторая выбранная точка из U_j (см. [16]).

В силу [15; теорема 1] поскольку μ – делитель $H^1_{(\omega),I}$, образ $J := \mu H^1_{(\omega),I} = \operatorname{Im} \Lambda_\mu$ соответствующего оператора умножения замкнут в $H^1_{(\omega),I}$. Следовательно, J и $H^1_{(\omega),I}/J$ являются (DFS)-пространствами. В [16] было получено изоморфное описание $H^1_{(\omega),I}/J$ в виде пространства последовательностей. Именно, пусть $H^\infty(U_j)$ – пространство всех ограниченных аналитических в U_j функций с нормой $\|g\|_{\infty,j} = \sup\{|g(z)| : z \in U_j\}$;

$$J_j = \{g \in H^\infty(U_j) : g^{(l)}(\lambda_s) = 0, l = 0, \dots, k_s - 1, \lambda_s \in U_j\};$$

$X_j := H^\infty(U_j)/J_j$ – соответствующее факторпространство с факторнормой

$$\| [f] \|_{\infty,j} = \inf\{\|f\|_{\infty,j} : f \in [f]\},$$

$X := \prod_{j=1}^\infty X_j$. Положим

$$k^\infty = \left\{ \varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty \in X : \right. \\ \left. \exists q \in (0, 1) \quad \exists l \in (0, a) \quad |\widetilde{\varphi}|_{\omega,q,l} = \sup_{j \geq 1} \frac{\| [\varphi_j] \|_{\infty,j}}{e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|}} < \infty \right\}.$$

Пространство k^∞ наделяется естественной индуктивной топологией и является в ней (DFS)-пространством. В силу [16; лемма 6] отображение

$$\rho : [f] \in H^1_{(\omega),I}/J \mapsto ([f|_{U_j}])_{j=1}^\infty$$

устанавливает топологический изоморфизм между $H^1_{(\omega),I}/J$ и k^∞ . Очевидно, из этого вытекает, что отображение

$$\widetilde{\rho} : f \in H^1_{(\omega),I} \mapsto ([f|_{U_j}])_{j=1}^\infty$$

является линейным непрерывным сюръективным отображением $H^1_{(\omega),I}$ на k^∞ . При этом $\ker \widetilde{\rho} = J$, так что $\widetilde{\rho}$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда J дополнимо в $H^1_{(\omega),I}$.

Наконец, непосредственно (с помощью теоремы о замкнутом графике) проверяется, что J дополнимо в $H^1_{(\omega),I}$ в том и только том случае, когда оператор Λ_μ имеет ЛНЛО L . Проектор $\pi : H^1_{(\omega),I} \rightarrow J$ и оператор L связываются между собой соотношением

$$(\pi f)(z) := \mu(z)(Lf)(z), \quad f \in H^1_{(\omega),I}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Итак, установлена

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ – делитель $H^1_{(\omega),I}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) T_μ имеет ЛНПО;
- (ii) $\ker T_\mu$ дополнимо в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$;
- (iii) Λ_μ имеет ЛНЛО;
- (iv) $J = \operatorname{Im} \Lambda_\mu$ дополнимо в $H^1_{(\omega),I}$;
- (v) $\tilde{\rho}$ допускает ЛНПО.

На основании данной теоремы доказываются необходимые и достаточные условия наличия у оператора T_μ ЛНПО в терминах семейств целых и субгармонических функций.

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ – делитель $H^1_{(\omega),I}$; $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ – последовательность его нулей. Если оператор T_μ допускает ЛНПО, то в $H^1_{(\omega),I}$ имеется семейство функций $(g_s)_{s=1}^\infty$ такое, что $g_s(\lambda_s) = 1$ и

$$(A) \quad \forall q \in (0, 1), \quad \forall l \in (0, a), \quad \forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ \ln |g_s(z)| + (q\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + l|\operatorname{Im} \lambda_s|) \leq (q + \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l + \varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 оператор $\tilde{\rho}$ имеет ЛНПО $L: k^\infty \rightarrow H^1_{(\omega),I}$. В пространстве k^∞ рассмотрим элементы

$$\varphi^j = ([0], \dots, [0], [1]_j, [0], \dots).$$

Нетрудно видеть, что $\| [1] \|_{\infty, j} = 1$ в X_j , так что в k^∞

$$|\widetilde{\varphi^j}|_{\omega, q, l} = \exp(-q\omega(\operatorname{Re} z_j) - l|\operatorname{Im} z_j|) \quad \text{при любых } q \in (0, 1), \quad l \in (0, a).$$

Обозначим $f^j := L(\varphi^j)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $f^j \in H^1_{(\omega),I}$ и $f^j(\lambda_s) = 1$ для всех $\lambda_s \in U_j$. Далее, поскольку k^∞ и $H^1_{(\omega),I}$ – (DFS)-пространства и L непрерывно действует из k^∞ в $H^1_{(\omega),I}$, то для произвольных $q \in (0, 1)$, $l \in (0, a)$ и $\varepsilon > 0$ найдется $C_1 > 0$, при котором

$$\|L\varphi\|_{\omega, q+\varepsilon, l+\varepsilon} \leq C_1 |\widetilde{\varphi}|_{\omega, q, l}, \quad \varphi \in k^\infty.$$

Следовательно, при всех $z \in \mathbb{C}$

$$\ln |f^j(z)| \leq (q + \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l + \varepsilon)|\operatorname{Im} z| - (q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|) + \ln C_1. \quad (9)$$

В силу [16; лемма 3] существует $C_2 > 0$ такое, что при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\lambda_s \in U_j$

$$q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \geq (q - \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + (l - \varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s| - C_2.$$

Возвращаясь к (9) и полагая $C := \ln C_1 + C_2$, имеем

$$\ln |f^j(z)| \leq (q + \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l + \varepsilon)|\operatorname{Im} z| - ((q - \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + (l - \varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s|) + C.$$

Взяв $g_s(z) = f^j(z)$ для всех номеров s , при которых $\lambda_s \in U_j$, получим требуемое утверждение.

Перейдем к достаточным условиям. Пусть $(U_j)_{j=1}^\infty$ – построенное открытое покрытие нулевого множества $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ делителя $\mu \in H_{(\omega),I}^1$; z_j – выбранные фиксированные точки из U_j .

ТЕОРЕМА 3. *Если имеется семейство $(u_j)_{j=1}^\infty$ субгармонических в $\mathbb{C}$ функций такое, что $u_j|_{U_j} \geq 0$ и*

(В) *выполнено*

$$\forall q \in (0, 1) \quad \forall l \in (0, a) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ u_j(z) + (q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|) \leq (q + \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l + \varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C,$$

то T_μ имеет ЛНПО.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к построению ЛНПО L к оператору $\tilde{\rho}$. Иначе говоря, для каждого элемента $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty \in k^\infty$ нужно указать функцию $f \in H_{(\omega),I}^1$ такую, что $[f|_{U_j}] = [\varphi_j]$ при всех $j \in \mathbb{N}$, т.е.

$$f^{(l)}(\lambda_s) = \varphi_j^{(l)}(\lambda_s), \quad \lambda_s \in U_j, \quad l = 0, \dots, k_s - 1.$$

При этом еще отображение $L: \varphi \mapsto f$ должно быть линейным и непрерывным. Заметим, что, вообще говоря, само построение функции f уже фактически проводилось в [16; лемма 6]. Здесь оно несколько модифицировано так, чтобы можно было использовать семейство функций $(u_j)_{j=1}^\infty$ для улучшения оценок норм функции f в $H_{(\omega),I}^1$.

а) Так как X_j – банахово пространство размерности $m_j = \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s$, то в X_j и X'_j в соответствии с леммой Ауэрбаха [22; 10.5] можно выбрать базисы $\{[\varphi_{jp}] : p = 1, \dots, m_j\}$ и $\{\nu_{jp} : p = 1, \dots, m_j\}$ такие, что

$$|||[\varphi_{jp}]|||_{\infty,j} = 1, \quad |||\nu_{jp}'|||_{\infty,j} = 1, \quad p = 1, \dots, m_j;$$

$$\langle [\varphi_{jp}], \nu_{jm} \rangle = \delta_{pm} = \begin{cases} 1, & p = m, \\ 0, & p \neq m. \end{cases}$$

Обозначим

$$E_{jp} = ([0], \dots, [0], [\varphi_{jp}], [0], \dots), \quad p = 1, \dots, m_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $E_{jp} \in k^\infty$, причем

$$\widetilde{E_{jp}}|_{\omega,q,l} = \exp(-q\omega(\operatorname{Re} z_j) - l|\operatorname{Im} z_j|), \quad q \in (0, 1), \quad l \in (0, a).$$

Легко проверить (см. [16; доказательство леммы 9]), что $\{E_{jp} : p = 1, \dots, m_j, j \in \mathbb{N}\}$ – абсолютный базис в k^∞ ; разложение произвольного элемента $x = ([x_j])_{j=1}^\infty \in k^\infty$ по нему имеет вид

$$x = \sum_{j=1}^\infty \sum_{p=1}^{m_j} \langle [x_j], \nu_{jp} \rangle E_{jp}.$$

При этом для коэффициентов ряда справедлива оценка

$$|\langle [x_j], \nu_{jp} \rangle| \leq \widetilde{|x|}_{\omega,q,l} \exp(q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|). \quad (10)$$

Здесь $q \in (0, 1)$ и $l \in (0, a)$ определяются условием $\widetilde{|x|}_{\omega,q,l} < \infty$.

б) Построим теперь функции $f_{jp} \in H^1_{(\omega),I}$ такие, что $\tilde{\rho}(f_{jp}) = E_{jp}$. Это делается так же, как в [16; лемма 6], но с уточнением оценок.

1) В классе $[\varphi_{jp}]$ выберем представителя, т.е. функцию $\varphi_{jp} \in H^\infty(U_j)$ так, чтобы $\|\varphi_{jp}\|_{\infty,j} = |||[\varphi_{jp}]|||_{\infty,j} = 1$. Тогда

$$|\varphi_{jp}(z)| \leq 1, \quad z \in U_j. \quad (11)$$

Пусть σ_j определяется равенством (5), $V_j = \{z \in U_j : \text{dist}(z, \partial U_j) \geq \sigma_j\}$. При этом, если $z \in U_j \setminus V_j$, то для $\ln |\mu(z)|$ выполняется неравенство (6).

Как известно, существует бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция g , обладающая следующими свойствами:

$$g(z) \equiv 1 \text{ на } \bigcup_j V_j, \quad \text{supp } g \subset \bigcup_j U_j, \quad 0 \leq g(z) \leq 1 \text{ в } \mathbb{C}.$$

При этом

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) \right| \leq \frac{C_0}{\sigma_j}, \quad z \in U_j \setminus V_j, \quad (12)$$

где C_0 от j не зависит.

2) Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, p , $1 \leq p \leq m_j$, и перейдем к построению функции f_{jp} . Положим

$$\Phi(z) := \begin{cases} \varphi_{jp}(z), & z \in U_j, \\ 0, & z \notin U_j, \end{cases} \quad h(z) := -\frac{\Phi(z)}{\mu(z)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; $h(z) = 0$ при $z \notin U_j \setminus V_j$. Для $z \in U_j \setminus V_j$ на основании (11), (12), (5) и (6) имеем

$$|h(z)| \leq C_0 \exp \max_{z \in \bar{U}_j} \{7\varepsilon_k \omega(\text{Re } z) + 7\varepsilon_k |\text{Im } z|\} = C_0 \exp(7\varepsilon_k \omega(\text{Re } \tilde{z}_j) + 7\varepsilon_k |\text{Im } \tilde{z}_j|), \quad (13)$$

где $\tilde{z}_j$ — некоторая точка из $\bar{U}_j$.

Получим еще для функции h специальную интегральную оценку. Пусть числа $q \in (0, 1)$, $l \in (0, a)$ и $\varepsilon > 0$ выбраны произвольно. Обозначим

$$\psi_j(z) := u_j(z) + q\omega(\text{Re } z_j) + l|\text{Im } z_j|,$$

где $(u_j)_{j=1}^\infty$ — субгармонические функции из условия теоремы. Заметим сразу, что в силу условия (B) существует $C_1 \geq 1$, при котором

$$\psi_j(z) \leq \psi(z) + \ln C_1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

где $\psi(z) := (q + \varepsilon)\omega(\text{Re } z) + (l + \varepsilon)|\text{Im } z|$; константа C_1 от j и z не зависит. Учитывая (13) и то, что $u_j|_{U_j} \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} |h(z)|^2 \exp(-2\psi_j(z) - 2\ln(1 + |z|^2)) d\lambda_z \\ &= \int_{U_j \setminus V_j} |h(z)|^2 \exp(-2\psi_j(z)) \frac{d\lambda_z}{(1 + |z|^2)^2} \leq C_0^2 M^2 D_j^2, \end{aligned}$$

где

$$M^2 := \int_{\mathbb{C}} \frac{d\lambda_z}{(1 + |z|^2)^2},$$

$$D_j^2 := \exp(14\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} \tilde{z}_j) + 14\varepsilon_k |\operatorname{Im} \tilde{z}_j| - 2q\omega(\operatorname{Re} z_j) - 2l|\operatorname{Im} z_j|).$$

Пользуясь [23; теорема 4.4.2], находим бесконечно дифференцируемую в $\mathbb{R}^2$ функцию v , являющуюся решением $\bar{\partial}$ -задачи $\partial v / \partial \bar{z} = h$, для которой

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2 \exp(-2\psi_j(z) - 4\ln(1 + |z|^2)) d\lambda_z \leq \frac{C_0^2 M^2 D_j^2}{2}.$$

Из этого на основании (14) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2 \exp(-2\psi(z) - 4\ln(1 + |z|^2)) d\lambda_z \leq \frac{C_0^2 C_1^2 M^2 D_j^2}{2}. \quad (15)$$

3) Наконец, положим

$$f_{jp}(z) := v(z)\mu(z) + \Phi(z)g(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В [16; лемма 6] было показано, что $f_{jp} \in H_{(\omega),I}^1$ и $\tilde{\rho}(f_{jp}) = E_{jp}$. Установим нужные нам оценки нормы функции f_{jp} в $H_{(\omega),I}^1$. Для этого рассмотрим сначала интеграл

$$I_{jp} := \int_{\mathbb{C}} |f_{jp}(z)|^2 \exp\{-2(q + 2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) - 2(l + 2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - 4\ln(1 + |z|^2)\} d\lambda_z.$$

Имеем, что $|f_{jp}(z)|^2 \leq 2(|v(z)|^2|\mu(z)|^2 + |\Phi(z)|^2)$.

Поскольку μ – мультипликатор $H_{(\omega),I}^1$, то найдется $C_2 > 0$ такое, что

$$|\mu(z)| \leq C_2 \exp(\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда с учетом (15)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2 |\mu(z)|^2 \exp\{-2(q + 2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) - 2(l + 2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - 4\ln(1 + |z|^2)\} d\lambda_z \\ & \leq \frac{C_0^2 C_1^2 C_2^2}{2} M^2 D_j^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Функция $\Phi(z)$ тождественно равна 0 вне U_j и $|\Phi(z)| \leq 1$ при $z \in U_j$. В силу [16; лемма 3] существует $C_3 > 1$, при котором для всех $z \in U_j$

$$2(q + 2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + 2(l + 2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| \geq 2q\omega(\operatorname{Re} z_j) + 2l|\operatorname{Im} z_j| - \ln C_3,$$

причем C_3 зависит только от q , l и ε . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} |\Phi(z)|^2 \exp\{-2(q + 2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) - 2(l + 2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - 4\ln(1 + |z|^2)\} d\lambda_z \\ & \leq C_3^2 M^2 \exp(-2q\omega(\operatorname{Re} z_j) - 2l|\operatorname{Im} z_j|) \leq C_3 M^2 D_j^2. \end{aligned}$$

Объединяя (16) и последнюю оценку, полагая $C_4^2 := (C_0^2 C_1^2 C_2^2 + 2C_3^2)M^2$, окончательно имеем, что $I_{jp} \leq C_4^2 D_j^2$. Пользуясь субгармоничностью $|f_{jp}(z)|$, из этого стандартным образом для произвольного $z \in \mathbb{C}$ получаем

$$|f_{jp}(z)|^2 \leq C_4^2 D_j^2 \exp\{2(q + 2\varepsilon)\omega(|\operatorname{Re} z| + 1) + 2(l + 2\varepsilon)(|\operatorname{Im} z| + 1) + 4\ln(3 + |z|^2)\}.$$

В силу свойств функции ω эту оценку можно продолжить следующим образом:

$$|f_{jp}(z)|^2 \leq C_5^2 D_j^2 \exp\{2(q + 3\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + 2(l + 3\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Уже цитированная выше лемма 3 из [16] позволяет выбрать $C_6 \geq 1$, не зависящее от j , при котором

$$\frac{\varepsilon}{2}\omega(\operatorname{Re} \tilde{z}_j) + \frac{\varepsilon}{2}|\operatorname{Im} \tilde{z}_j| \leq \varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| + \ln C_6.$$

Если теперь взять $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ так, чтобы $7\varepsilon_k < \varepsilon/2$, то окончательно при $j \geq j_{\tilde{k}}$ и всех $z \in \mathbb{C}$ будем иметь

$$|f_{jp}(z)| \leq C_5 C_6 \exp\{-(q - \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - (l - \varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| + (q + 3\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l + 3\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\},$$

так что

$$\|f_{jp}\|_{\omega, q+3\varepsilon, l+3\varepsilon} \leq C_5 C_6 \exp(-(q - \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - (l - \varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|), \quad j \geq j_{\tilde{k}}.$$

За счет увеличения константы можно считать, что это неравенство выполнено для всех $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, фактически показано, что для любых $q \in (0, 1)$, $l \in (0, a)$ и $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$, при котором

$$\|f_{jp}\|_{\omega, q+2\varepsilon, l+2\varepsilon} \leq C \exp(-(q + \varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - (l + \varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|), \quad j \in \mathbb{N}, \quad p = 1, \dots, m_j. \quad (17)$$

в) Завершая доказательство, определим наконец нужный оператор L , полагая для $x = ([x_j])_{j=1}^\infty \in k^\infty$

$$Lx := \sum_{j=1}^\infty \sum_{p=1}^{m_j} \langle \nu_j, [x_{jp}] \rangle f_{jp}.$$

Из (10) и (17) вытекает, что

$$\|Lx\|_{\omega, q+2\varepsilon, l+2\varepsilon} \leq C \widetilde{|x|}_{\omega, q, l} \sum_{j=1}^\infty \frac{m_j}{e^{\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|}}.$$

Сходимость последнего ряда следует, например, из [16; доказательство леммы 9]. Значит, L – ЛНПО к $\tilde{\rho}$.

3. Критерий существования ЛНПО для оператора T_μ . Пусть ω – неквазианалитический вес, μ – делитель $H_{(\omega), I}^1$, $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$, $(U_j)_{j=1}^\infty$ и $(z_j)_{j=1}^\infty$ те же, что и в п. 2, T_μ – сюръективный оператор свертки с характеристической функцией $\mu(z)$.

ТЕОРЕМА 4. Если оператор T_μ имеет ЛНПО, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_s)} = 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой 2 найдется семейство $(g_s)_{s=1}^{\infty}$ функций из $H_{(\omega),I}^1$ таких, что $g_s(\lambda_s) = 1$ и выполняется условие (А). Возьмем какое-нибудь $l_0 \in (0, a)$ и произвольное $\varepsilon \in (0, 1/4)$. В силу (А) существуют $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, при которых для всех $s \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \ln |g_s(z)| + \varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + \varepsilon|\operatorname{Im} \lambda_s| &\leq 2\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + 2\varepsilon|\operatorname{Im} z| + C_1; \\ \ln |g_s(z)| + \varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + (l_0 + 4\varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s| &\leq 2\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + (l_0 + 5\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\ln |g_s(t)| + \varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + (l_0 + 4\varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s| \leq 2\varepsilon\omega(t) + C_2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Пользуясь условием (α) на вес ω , найдем $C_3 > 0$ такое, что

$$\omega(x + y) \leq (1 + \varepsilon)(\omega(x) + \omega(y)) + C_3, \quad x, y \geq 0. \quad (21)$$

Далее, пусть P_ω – введенное в п. 1 гармоническое продолжение веса ω . Поскольку $P_\omega(iy) = o(y)$, $y \rightarrow \infty$, то имеется $C_4 > 0$, при котором

$$P_\omega(iy) \leq |y| + C_4, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

По принципу Фрагмена–Линделёфа (см. [24; 6.5.4]) для всех $u + iv \in \mathbb{C}$ с $v \neq 0$

$$\ln |g_s(u + iv)| \leq \frac{|v|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |g_s(t)|}{(u - t)^2 + v^2} dt + |v|d_s, \quad (23)$$

где

$$d_s = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \ln |g_s(r e^{i\theta})| \sin \theta d\theta.$$

Из (19) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \ln |g_s(r e^{i\theta})| \sin \theta d\theta &\leq \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi (2\varepsilon\omega(r) + 2\varepsilon r \sin \theta + C_1) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi r} \left(4\varepsilon\omega(r) + 2\varepsilon r \frac{\pi}{2} + 2C_1 \right), \end{aligned}$$

так что $d_s \leq 2\varepsilon$ при всех $s \in \mathbb{N}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $d_s \leq 0$, $s \in \mathbb{N}$.

На основании (20) с учетом (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{|v|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |g_s(t)|}{(u - t)^2 + v^2} dt &\leq 2\varepsilon \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(u + vt)}{t^2 + 1} dt - \varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) - (l_0 + 4\varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s| + C_2 \\ &\leq 2\varepsilon(1 + \varepsilon)(\omega(u) + P_\omega(iv)) - \varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) - (l_0 + 4\varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s| + C_2 + 2\varepsilon C_3 \\ &\leq 4\varepsilon\omega(u) + 4\varepsilon|v| - \varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) - (l_0 + 4\varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s| + C_2 + C_3 + C_4. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (23), полагая $C_5 := C_2 + C_3 + C_4$, получаем, что для всех $u + iv \in \mathbb{C}$ с $v \neq 0$ и всех $s \in \mathbb{N}$

$$\ln |g_s(u + iv)| \leq 4\varepsilon\omega(u) + 4\varepsilon|v| - \varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) - (l_0 + 4\varepsilon)|\operatorname{Im} \lambda_s| + C_5.$$

По непрерывности это неравенство выполняется и при $v = 0$. При $u + iv = \lambda_s$, учитывая условие $g_s(\lambda_s) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, получаем

$$0 \leq 3\varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) - l_0|\operatorname{Im} \lambda_s| + C_5,$$

так что

$$l_0|\operatorname{Im} \lambda_s| \leq 3\varepsilon\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + C_5 \quad \text{при всех } s \in \mathbb{N}.$$

Это означает требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ. Свойства веса ω позволяют при необходимости в условии (18) заменить $\omega(\operatorname{Re} \lambda_s)$ на $\omega(\lambda_s)$.

Перейдем к достаточным условиям. Сформулируем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 1. Пусть l_0 – фиксированное положительное число. Имеется такая непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция v , что $v(0) = 0$ и что выполняется условие

(C) выполнено

$$\forall q \in (0, 1) \quad \exists C > 0 \quad v(z) \leq l_0|\operatorname{Im} z| - q\omega(z) + C \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство УДФ Берлинга нормального типа на всей числовой прямой

$$\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall q \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f|_{\omega, q, n} < \infty\}$$

и пространство пробных функций

$$D_{(\omega)}^1([-l_0, l_0]) = \{f \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \subset [-l_0, l_0]\}.$$

Как известно (см., например, [25; теорема 2.4.2], преобразование Фурье–Лапласа функций $h \mapsto \hat{h}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-ix\zeta} dx$ устанавливает топологический изоморфизм между $D_{(\omega)}^1([-l_0, l_0])$ и

$$H_{(\omega)}^1([-l_0, l_0]) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \forall q \in (0, 1) \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(l_0|\operatorname{Im} z| - q\omega(z))} < \infty \right\}.$$

Далее, в $D_{(\omega)}^1([-l_0, l_0])$ имеется неотрицательная функция η такая, что $\int_{\mathbb{R}} \eta(x) dx = 1$ (по этому поводу см. [25; с. 51 и предложение 1.6.2]). Поэтому, положив $v(z) := \max\{|\ln |\hat{\eta}(z + \zeta)|| : |\zeta| \leq 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, как нетрудно видеть, получим требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Im} z_j|}{\omega(\operatorname{Re} z_j)} = 0, \tag{24}$$

то T_μ допускает ЛНПО.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим семейство субгармонических функций как в теореме 3. Выберем произвольное $l_0 \in (0, \min\{1, a\})$. Пусть $v(z)$ – функция из предыдущей леммы. Положим

$$u_j(z) := \sup_{t \in U_j} v(z - t), \quad z \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда функции u_j , $j \in \mathbb{N}$, непрерывны и субгармоничны в $\mathbb{C}$. Если $z \in U_j$, то $u_j(z) \geq v(0) = 0$.

Проверим выполнение условия (В). Возьмем произвольное $q \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$. Пусть константа $C_1 > 0$ такова, что

$$v(z) \leq l_0 |\operatorname{Im} z| - (q + \varepsilon)\omega(z) + C_1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (25)$$

Далее, найдем $C_2 > 0$, при котором

$$6|\operatorname{Im} z_j| < \varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + C_2, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

В силу условия (α) на вес ω , существует $C_3 > 0$ такое, что

$$q\omega(x + y) \leq (q + \varepsilon)(\omega(x) + \omega(y)) + C_3, \quad x, y \geq 0. \quad (27)$$

На основании [16; лемма 3] можно выбрать $C_4 > 0$, при котором для всех $j \in \mathbb{N}$ и $t \in U_j$ справедлива оценка

$$(q - \varepsilon)\omega(z_j) + |\operatorname{Im} z_j| \leq q\omega(t) + 2|\operatorname{Im} t| + C_4. \quad (28)$$

Наконец, из неравенства (7) вытекает, что имеется $C_5 > 0$ такое, что

$$\operatorname{diam} U_j \leq \varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| + C_5, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Пусть $t \in U_j$. Из (27) и (28) имеем

$$\begin{aligned} (q + \varepsilon)\omega(z - t) &\geq q\omega(t) - (q + \varepsilon)\omega(z) - C_3 \\ &\geq (q - \varepsilon)\omega(z_j) - (q + \varepsilon)\omega(z) + |\operatorname{Im} z_j| - 2|\operatorname{Im} t| - C_3 - C_4. \end{aligned}$$

В силу (25) тогда

$$\begin{aligned} v(z - t) &\leq l_0 |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} t| - (q + \varepsilon)\omega(z - t) + C_1 \\ &\leq ((q + \varepsilon)\omega(z) + l_0 |\operatorname{Im} z|) - (q - \varepsilon)\omega(z_j) + (l_0 + 2)|\operatorname{Im} t| + C_1 + C_3 + C_4. \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь (29) и (26), получаем

$$\begin{aligned} (l_0 + 2)|\operatorname{Im} t| &\leq 3(|\operatorname{Im} z_j| + \operatorname{diam} U_j) \leq 3(\varepsilon\omega(z_j) + (1 + \varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| + C_5) \\ &\leq 3\varepsilon\omega(z_j) + 6|\operatorname{Im} z_j| + 3C_5 \leq 4\varepsilon\omega(z_j) + C_2 + 3C_5. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (30), заключаем, что

$$v(z - t) \leq ((q + \varepsilon)\omega(z) + l_0 |\operatorname{Im} z|) - (q - 5\varepsilon)\omega(z_j) + C_6,$$

где $C_6 := C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + 3C_5$ зависит лишь от q , l_0 и ε . Следовательно,

$$u_j(z) + (q - 5\varepsilon)\omega(z_j) \leq (q + \varepsilon)\omega(z) + l_0 |\operatorname{Im} z| + C_6, \quad z \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку выполнено условие (24), мы фактически доказали, что для любых $q \in (0, 1)$, $l \in (0, a)$ и $\varepsilon > 0$ имеется такое $C > 0$, что при всех $z \in \mathbb{C}$ и $j \in \mathbb{N}$

$$u_j(z) + q\omega(z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \leq (q + \varepsilon)\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z| + C.$$

Аргументы, приведенные в [15; лемма 1], позволяют заменить здесь z на $\operatorname{Re} z$, а z_j — на $\operatorname{Re} z_j$. Значит, семейство $(u_j)_{j=1}^\infty$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3, так что оператор T_μ имеет ЛНПО.

Эквивалентность условий (18) и (24) достаточно легко вытекает из оценки (7) диаметров U_j и свойств (α') , (2) веса ω ; поэтому здесь мы эти рассуждения приводить не будем.

Итак, доказана следующая теорема, представляющая собой основной результат работы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть ω — неквазианалитический вес; μ — делитель $H_{(\omega), I}^1$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) T_μ имеет ЛНПО;
- (ii) $J = \operatorname{Im} \Lambda_\mu$ дополнимо в $H_{(\omega), I}^1$;
- (iii) имеется семейство $(g_s)_{s=1}^\infty$ функций из $H_{(\omega), I}^1$, удовлетворяющее условию (A) и такое, что $g_s(\lambda_s) = 1$, $s \in \mathbb{N}$;
- (iv) имеется семейство $(u_j)_{j=1}^\infty$ субгармонических в $\mathbb{C}$ функций, удовлетворяющих условию (B) и такое, что $u_j|_{U_j} \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$;
- (v) имеет место сходимость

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Im} z_j|}{\omega(\operatorname{Re} z_j)} = 0;$$

- (vi) имеет место сходимость

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_s)} = 0.$$

Для того чтобы проиллюстрировать теорему 6, приведем два примера символов μ сюръективных операторов свертки T_μ , один из которых не имеет ЛНПО, а другой имеет.

ПРИМЕР 1. Пусть $\omega(t) = t^\rho$, $0 < \rho < 1$, а $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $n/\lambda_n^\rho \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Например, $\lambda_n = n^{2/\rho}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$\mu(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу наложенного условия на (λ_n) , μ имеет нулевой тип при порядке ρ , а значит, является мультипликатором пространства $H_{(\omega), I}^1$. Поскольку $|\mu(t)| \geq 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$, μ — делитель $H_{(\omega), I}^1$. При этом условие (vi) предыдущей теоремы, естественно, нарушено. Значит, соответствующий оператор свертки, который является дифференциальным оператором бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, не имеет ЛНПО.

ПРИМЕР 2. Пусть $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ – возрастающая лакунарная последовательность положительных чисел, т.е. такая, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1.$$

Положим

$$\mu(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нетрудно проверить, что при некотором $C > 0$

$$\ln \max\{|\mu(z)| : |z| = r\} \leq C \ln^2 r, \quad r \geq e,$$

причем пример последовательности $\lambda_n = e^n$, $n \in \mathbb{N}$, показывает, что данная оценка является точной. Следовательно, μ будет сильным мультипликатором пространства $H_{(\omega),I}^1$ для любого веса $\omega(t)$ такого, что $\ln^2 t = o(\omega(t))$, $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, для всех x с $\lambda_n + 1 \leq |x| \leq \lambda_{n+1} - 1$

$$\ln |\mu(x)| \geq -2 \ln x - C,$$

откуда вытекает, что μ – делитель $H_{(\omega),I}^1$. Поскольку μ удовлетворяет (vi), соответствующий оператор свертки T_μ (тоже дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) имеет ЛНПО.

В заключение остановимся еще на следующем моменте. Как было отмечено профессором А. Ю. Поповым при ознакомлении с данной работой, условие (SC), необходимое и достаточное для того, чтобы целая функция $\mu \in M_{(\omega)}^1$ была делителем пространства $H_{(\omega),I}^1$, а также для сюръективности оператора T_μ , довольно сложно проверять. Это в свою очередь затрудняет применение теоремы 6. В связи с этим укажем более простые достаточные условия сюръективности T_μ в случае, когда $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t)$ – некоторый уточненный порядок, $\rho(t) \rightarrow \rho \in (0, 1)$.

Прежде всего обсудим, является ли данная функция весовой. Справедливость условий (α') и (γ) очевидна.

Для того чтобы проверить (α) , запишем функцию ω в виде $\omega(t) = t^\rho L(t)$, где $L(t)$ – некоторая медленно меняющаяся функция. Понятно, что достаточно рассмотреть случай $0 \leq y \leq x$. Зафиксируем $p > 1$ и найдем $\delta \in (0, 1)$ так, чтобы $(1 + \delta)^\rho < \sqrt{p}$. В силу медленного изменения функции $L(t)$, имеется $t_0 > 0$ такое, что

$$L(\lambda t) \leq \sqrt{p} L(t) \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall \lambda \in \left[1, 1 + \frac{1}{\delta}\right].$$

Положим $x_0 := t_0/\delta$. Пусть $x \geq x_0$.

Если $y \leq \delta x$, то

$$\omega(x + y) \leq \omega((1 + \delta)x) = (1 + \delta)^\rho x^\rho L((1 + \delta)x) \leq p x^\rho L(x) = p \omega(x).$$

Если же $\delta x < y \leq x$, то $2y \leq x + y < (1 + 1/\delta)y$, $y > \delta x_0 = t_0$, так что

$$\omega(x + y) = (x + y)^\rho L(x + y) \leq (x + y)^\rho \sqrt{p} L(y) \leq (x^\rho + y^\rho) \sqrt{p} L(y) \leq \sqrt{p} (\omega(x) + \omega(y)).$$

Таким образом, условие (α) выполнено.

Что касается свойства (δ) , то в соответствии с [26] уточненный порядок

$$\tilde{\rho}(t) := \begin{cases} \rho + \frac{\ln v(t)}{\ln t}, & t > 1, \\ 0, & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad v(t) = \frac{1}{t} \int_1^t s^{\rho(s)-\rho} ds,$$

эквивалентен $\rho(t)$ в том смысле, что $t^{\rho(t)-\tilde{\rho}(t)} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, и удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \tilde{\rho}''(t) \ln t = 0$, которое влечет выпуклость $\tilde{\omega}(e^x)$, где $\tilde{\omega}(t) = t^{\tilde{\rho}(t)}$. Так как $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I) = \mathcal{E}_{(\tilde{\omega})}^1(I)$ и $H_{(\omega),I}^1 = H_{(\tilde{\omega}),I}^1$, то можно без ограничения общности считать, что условие (δ) тоже выполнено.

Итак, $\omega(t) = t^{\rho(t)}$ – вес. Понятно, что он строгий и неквазианалитический, так что все мультипликаторы соответствующего пространства $H_{(\omega),I}^1$ являются сильными. Это означает, что $M_{(\omega)}^1$ – совокупность всех целых функций, имеющих нулевой тип при порядке $\rho(t)$. При этом все операторы свертки будут дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.

Допустим, что мультипликатор μ задан своими простыми нулями:

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right), \quad |\lambda_s| \uparrow \infty. \quad (31)$$

Целая функция μ должна иметь нулевой тип при уточненном порядке $\rho(t)$, что, как известно, равносильно выполнению условия

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_s|^{\rho(|\lambda_s|)}} = 0. \quad (32)$$

Допустим, что нули (λ_s) функции μ образуют R -множество (см. [27; с. 126]), т.е. удовлетворяют условию

(C') точки λ_s расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, не имеющих других общих точек, причем если перенумеровать точки множества (λ_s) внутри любого из этих углов в порядке возрастания их модулей, то для точек, попавших внутрь одного угла,

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| > d |\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}$$

при некотором $d > 0$.

Тогда в силу [28; с. 9–10] вне некоторого исключительного множества кружков $\tilde{C}$ с конечной суммой радиусов $\sum_j r_j < \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mu(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} = 0.$$

Из этого, очевидно, следует, что для μ выполнено условие (SC).

Таким образом, доказана следующая теорема (ее формулировка была предложена профессором А. Ю. Поповым).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\rho(t)$ – уточненный порядок, $\rho(t) \rightarrow \rho \in (0, 1)$ при $t \rightarrow \infty$ и $\omega(t) = t^{\rho(t)}$. Тогда всякая целая функция

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-i)^k z^k,$$

где последовательность (λ_s) удовлетворяет условиям (31), (32) и (C'), является делителем пространства $H^1_{(\omega),I}$, т.е. дифференциальный оператор

$$T_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^k}{dx^k}$$

действует сюръективно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Для того, чтобы этот оператор имел ЛНПО, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (vi) теоремы 6.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. A. Taylor, R. Meise, D. Vogt, "Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **40**:3 (1990), 619–655.
- [2] R. Meise, D. Vogt, "Characterization of convolution operators on spaces of C^∞ -functions admitting a continuous linear right inverse", *Math. Ann.*, **279**:1 (1987), 141–155.
- [3] S. Momm, "On the dependence of analytic solutions of partial differential equations from the right-hand side", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **345**:2 (1994), 729–752.
- [4] Ю. Ф. Коробейник, "О правом обратном для оператора свертки", *Укр. матем. журн.*, **43**:9 (1991), 1167–1176.
- [5] M. Langenbruch, "Continuous linear right inverses for convolution operators in spaces of real analytic functions", *Studia Math.*, **110**:1 (1994), 65–82.
- [6] С. Н. Мелихов, З. Момм, "О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ ", *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 5, 38–48.
- [7] М. А. Соловьев, "Лоренц-ковариантные ультрараспределения, гиперфункции и аналитические функционалы", *ТМФ*, **128**:3 (2001), 492–514.
- [8] C. Roumieu, "Sur quelques extensions de la notion de distribution", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **77**:1 (1960), 41–121.
- [9] C. Roumieu, "Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables", *J. Anal. Math.*, **10** (1962/1963), 153–192.
- [10] G. Björck, "Linear partial differential operators and generalized distributions", *Ark. Mat.*, **6**:4-5 (1966), 351–407.
- [11] R. W. Brawn, R. Meise, B. A. Taylor, "Ultradifferentiable functions and Fourier analysis", *Results Math.*, **17**:3-4 (1990), 206–237.
- [12] R. Meise, B. Taylor, D. Vogt, "Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions", *Indiana Univ. Math. J.*, **36**:4 (1987), 729–756.
- [13] R. Meise, B. A. Taylor, "Splitting of closed ideals in (DFN)-algebras of entire functions and the property (DN)", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **302**:1 (1987), 341–370.
- [14] M. Langenbruch, S. Momm, "Complemented submodules in weighted spaces of analytic functions", *Math. Nachr.*, **157**:1 (1992), 263–276.
- [15] Д. А. Абанина, "Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале", *Сиб. матем. журн.*, **53**:3 (2012), 477–494.
- [16] Д. А. Абанина, "Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций", *Владикавказ. матем. журн.*, **13**:4 (2011), 3–17.
- [17] D. A. Abanina, "On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type", *Results Math.*, **44**:3-4 (2003), 195–213.

- [18] A. V. Abanin, Pham Trong Tien, “Almost subadditive weight functions form Braun–Meise–Taylor theory of ultradistributions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **363** (2010), 296–301.
- [19] В. В. Жаринов, “Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS”, *УМН*, **34**:4 (1979), 97–131.
- [20] А. В. Абанин, И. А. Филиппев, “Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:3 (2006), 485–500.
- [21] E. Michael, “Continuous selections. I”, *Ann. of Math.* (2), **63** (1956), 361–382.
- [22] R. Meise, D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Oxf. Grad. Texts Math., **2**, The Clarendon Press, New York, 1997.
- [23] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.
- [24] R. Boas, *Entire Functions*, Pure Appl. Math., **5**, Academic Press, New York, 1954.
- [25] А. В. Абанин, *Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения*, Наука, М., 2007.
- [26] П. З. Агранович, *Индикаторы голоморфных функций многих переменных*, Дис. канд. физ.-матем. наук, Харьков, 1978.
- [27] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [28] Б. Я. Левин, *Дополнения и исправления к книге «Распределение корней целых функций»*, Препринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1978.

Д. А. Полякова

Южный федеральный университет,

г. Ростов-на-Дону

Южный математический институт ВНЦ РАН и

РСО-А, г. Владикавказ

E-mail: forsites1@mail.ru

Поступило

20.11.2013