Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Аркашов, Эргодические свойства одного преобразования на пространстве с мерой Хаусдорфа и самоподобной структурой, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 163–173

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:09:49

Эргодические свойства одного преобразования на пространстве с мерой Хаусдорфа и самоподобной структурой

Н. С. Аркашов

На пространстве с мерой Хаусдорфа, обладающем свойством самоподобия, получена эргодичность и исследована непрерывность преобразования, порожденного преобразованием сдвига на пространстве последовательностей.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm9689

Преобразование, сопряженное преобразованию сдвига на пространстве последовательностей, часто возникает в работах по фрактальной геометрии и динамическим системам (см., например, [1]–[3]). В данной работе исследуются свойства преобразования, определенного на полном метрическом пространстве специального вида с мерой и полусопряженного в некотором смысле соответствующему преобразованию сдвига (см. ниже определение преобразования Π).

Пусть X – метрическое пространство с метрикой ρ . Диаметр непустого множества $A \subseteq X$ называется величина $\text{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$, диаметр пустого множества полагаем равным нулю. Открытым покрытием множества A называется любой не более чем счетный набор открытых множеств $\{A_i\}$ такой, что $A \subseteq \bigcup_i A_i$.

Пусть $d \geq 0$ и $\varepsilon > 0$. Определим величину

$$\mu_\varepsilon^d(A) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i)^d : A \subseteq \bigcup_i A_i, \sup_i \text{diam}(A_i) < \varepsilon \right\},$$

где инфимум берется по всем открытым покрытиям множества A . Величина $\mu_\varepsilon^d(A)$ не убывает при уменьшении ε , поэтому $\mu_\varepsilon^d(A)$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Положим

$$\mu^d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon^d(A).$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00661) и Новосибирского государственного технического университета (грант № 2.1.1(2013)).

Величина $\mu^d(A)$ называется d -мерной мерой Хаусдорфа множества A (см., например, [4; гл. 3, § 12], [3; § 6.1]). Заметим, что d -мерная мера Хаусдорфа μ^d является внешней мерой.

В виде теорем 1 и 2 сформулируем следующие два свойства хаусдорфовой меры (см. теоремы 5.4.4 и 6.1.9 в [3]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A, B \subseteq X$ и $\text{dist}(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$. Тогда

$$\mu^d(A \cup B) = \mu^d(A) + \mu^d(B).$$

Для формулировки теоремы 2 нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $T: X \rightarrow X$ называется преобразованием подобия, если существует такое положительное r , что $\rho(T(x), T(y)) = r\rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$.

Значение r будем в дальнейшем называть коэффициентом преобразования подобия.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T: X \rightarrow X$ – преобразование подобия с коэффициентом r , пусть также d – действительное положительное число. Тогда

$$\mu^d(T(A)) = r^d \mu^d(A) \quad \text{для всех } A \subseteq X.$$

Пусть задана внешняя мера μ на множестве всех подмножеств пространства (X, ρ) . Дальнейшей нашей задачей будет построение достаточно богатой σ -алгебры множеств в X , обозначим ее через $\mathcal{F}$, так чтобы сужение внешней меры на $\mathcal{F}$ оказалось мерой. В следующем определении 2 задается искомая σ -алгебра $\mathcal{F}$. В теореме 3 доказывается, что сужение соответствующей внешней меры на $\mathcal{F}$ является мерой (см. теорему 5.2.5 в [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть μ – внешняя мера на X . Множество A хорошо разбивает множество B , если $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Множество A называется μ -измеримым, если оно хорошо разбивает любое множество $B \subseteq X$.

ТЕОРЕМА 3. Класс всех μ -измеримых множеств является σ -алгеброй и сужение μ на эту σ -алгебру является мерой.

Итак, если μ^d – мера Хаусдорфа, то искомой σ -алгеброй $\mathcal{F}$ такой, что сужение μ^d на $\mathcal{F}$ является мерой, может служить класс всех μ^d -измеримых множеств. В следующем утверждении (см. теорему 5.4.2 в [3]) устанавливается, что класс всех μ^d -измеримых множеств содержит борелевскую σ -алгебру.

ТЕОРЕМА 4. Пусть μ – внешняя мера на X , обладающая таким свойством: для любых $A, B \subseteq X$ с $\text{dist}(A, B) > 0$ верно, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Тогда все борелевские множества μ -измеримы.

Борелевскую σ -алгебру множеств в X будем обозначать через $\mathcal{B}$. В силу теорем 1, 4 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Сужение хаусдорфовой меры μ^d на $\mathcal{B}$ является борелевской мерой.

Определим хаусдорфову размерность; для этого сформулируем теорему (см. теорему 6.1.6 в [3]).

ТЕОРЕМА 5. Для любого множества A существует такое $d_0 \in [0, +\infty]$, что $\mu^d(A) = 0$ при всех $d > d_0$ и $\mu^d(A) = +\infty$ при всех $d < d_0$.

Число d_0 , определенное в предыдущей теореме, называется хаусдорфовой размерностью A . Хаусдорфову размерность множества A мы будем обозначать через $\dim(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Преобразование подобия $T: X \rightarrow X$ называется сжимающим, если коэффициент этого преобразования $r \in (0, 1)$.

Выделим класс так называемых самоподобных множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем называть непустое компактное множество A самоподобным, если существуют такие сжимающие преобразования подобия $T_1, \dots, T_N$, что имеет место такое представление:

$$A = \bigcup_{i=1}^N T_i(A);$$

при этом $\mu^{\dim(A)}(T_i(A) \cap T_j(A)) = 0$ для всех $i \neq j$.

В дальнейшем мы будем рассматривать класс самоподобных множеств $\mathcal{S}$ таких, что $\mu^{\dim(A)}(A) = 1$ для всех $A \in \mathcal{S}$.

Итак, зафиксируем $E \in \mathcal{S}$, тогда $E = \bigcup_{i=1}^N T_i(E)$, где $T_1, \dots, T_N$ – сжимающие преобразования подобия с коэффициентами $r_1, \dots, r_N$ соответственно. Из теоремы 2 следует, что размерность Хаусдорфа множества E удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^N r_i^{d_0} = 1, \quad (1)$$

где $d_0 = \dim(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Классическое множество Кантора на отрезке $[0, 1]$ числовой прямой, обозначим его буквой K , является одним из примеров самоподобного множества. Для множества K существуют два преобразования подобия $T_1(x) = x/3$ и $T_2(x) = x/3 + 2/3$ такие, что $K = T_1(K) \cup T_2(K)$ и $T_1(K) \cap T_2(K) = \emptyset$. Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $d_0 = \ln 2 / \ln 3$; при этом $\mu^{d_0}(K) = 1$, где μ^{d_0} – соответствующая мера Хаусдорфа (см., например, [3; § 6.4]).

Итак, рассмотрим самоподобное множество E такое, что $E = \bigcup_{i=1}^N T_i(E)$, где $T_1, \dots, T_N$ – сжимающие преобразования подобия с коэффициентами $r_1, \dots, r_N$ соответственно. Пространство последовательностей Σ на N элементах $\{1, 2, \dots, N\}$ определим как множество всех бесконечных последовательностей $\sigma_1 \sigma_2 \dots, \sigma_k \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k = 1, 2, \dots$. Расстояние между $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$ и $\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots$ определяется следующим образом:

$$d(\sigma, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_1 \neq \tau_1, \\ r_{\sigma_1} \cdots r_{\sigma_k}, & \text{если } \sigma_1 = \tau_1, \dots, \sigma_k = \tau_k, \sigma_{k+1} \neq \tau_{k+1} \text{ для некоторого } k \geq 1 \end{cases}$$

(здесь $r_{\sigma_1}, \dots, r_{\sigma_k}$ – коэффициенты преобразований подобия $T_{\sigma_1}, \dots, T_{\sigma_k}$ соответственно); если же $\sigma_k = \tau_k$ для всех $k \geq 1$, то $d(\sigma, \tau) = 0$ (заметим, что в некоторых монографиях определенное нами пространство последовательностей называется *символьным пространством*; см., например, [1; с. 187]).

Пространство последовательностей (Σ, d) является метрическим пространством (см., например, [3; § 4.2], [2; § 4.1]). Следующая теорема позволяет “кодировать” каждую точку из E некоторой последовательностью из пространства последовательностей (см. теорему 4.2.3 в [3]).

ТЕОРЕМА 6. *Существует единственное непрерывное отображение $\Phi: \Sigma \rightarrow E$ такое, что для любого $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \in \Sigma$ выполняется*

$$\Phi(\sigma) = T_{\sigma_1}(\Phi(\sigma_2 \sigma_3 \dots)).$$

Кроме того, $\Phi(\Sigma) = E$.

В дальнейшем, рассматривая композицию преобразований $T_i \circ T_j$, мы для краткости будем опускать значок композиции и писать $T_i T_j$.

Введем в рассмотрение множество

$$\begin{aligned} B_0 = & \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} (T_i(E) \cap T_j(E)) \\ & \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq N} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} (T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_m} T_i(E) \cap T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_m} T_j(E)) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку $E \in \mathcal{S}$, получаем, что $\mu^{\dim(E)}(B_0) = 0$. Обозначим $\Phi^{-1}(E \setminus B_0)$ через $\Sigma_{E \setminus B_0}$. Отметим одно свойство отображения Φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение Φ , действующее из $(\Sigma_{E \setminus B_0}, d)$ на $(E \setminus B_0, \rho)$, является гомеоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что прообраз $\Phi^{-1}(\omega)$ любого $\omega \in E \setminus B_0$ состоит ровно из одного элемента. Предположим противное, пусть существуют $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots$ и $\tau = \tau_1 \tau_2 \dots$ такие, что $\tau \neq \gamma$, но при этом $\Phi(\gamma) = \Phi(\tau) = \omega$. Пусть, скажем, $\gamma_1 \neq \tau_1$, но тогда $\omega = T_{\gamma_1}(\Phi(\gamma_2 \dots)) = T_{\tau_1}(\Phi(\tau_2 \dots))$, поэтому $\omega \in T_{\gamma_1}(E) \cap T_{\tau_1}(E)$, получили противоречие, поскольку $\omega \in E \setminus B_0$. Пусть теперь $\gamma_1 = \tau_1, \dots, \gamma_{k-1} = \tau_{k-1}$, но $\gamma_k < \tau_k$, где $k \geq 2$. Тогда

$$\omega = T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} \dots T_{\gamma_{k-1}} T_{\gamma_k}(\Phi(\gamma_{k+1} \dots)) = T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_{k-1}} T_{\tau_k}(\Phi(\tau_{k+1} \dots)),$$

в этом случае

$$\omega \in T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} \dots T_{\gamma_{k-1}} T_{\gamma_k}(E) \cap T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_{k-1}} T_{\tau_k}(E),$$

но и в этом случае мы получили противоречие с условием $\omega \in E \setminus B_0$.

Напомним, что мы обозначили $\Phi^{-1}(E \setminus B_0)$ через $\Sigma_{E \setminus B_0}$. Итак, Φ определяет взаимно-однозначное отображение $\Sigma_{E \setminus B_0}$ на $E \setminus B_0$.

Покажем, что Φ^{-1} является непрерывным отображением $E \setminus B_0$ на $\Sigma_{E \setminus B_0}$. Выберем произвольную точку $x_0 \in E \setminus B_0$. Возьмем произвольное положительное ε .

Обозначим $\max\{r_1, \dots, r_N\}$ через r . Выберем натуральное k таким образом, чтобы $r^k < \varepsilon$. В силу самоподобия множества E , а также в силу того, что $x_0 \notin B_0$, найдутся, и притом единственным образом, такие $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$, что $x_0 \in T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$. Покажем, что существует такое $\delta > 0$, что

$$B_{x_0}^\delta = \{x \in E : \rho(x, x_0) < \delta\} \subseteq T_{i_1} \dots T_{i_k}(E).$$

Введем в рассмотрение

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho\left(x_0, \bigcup_{j \neq i_k} T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{k-1}} T_j(E)\right), & \delta_2 &= \rho\left(x_0, \bigcup_{j \neq i_{k-1}} T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{k-2}} T_j(E)\right), \\ &\dots, & \delta_{k-1} &= \rho\left(x_0, \bigcup_{j \neq i_2} T_{i_1} T_j(E)\right), & \delta_k &= \rho\left(x_0, \bigcup_{j \neq i_1} T_j(E)\right). \end{aligned}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$, заметим, что $\delta > 0$ в силу того что $x_0 \notin B_0$. Исходя из построения δ , для любой точки x из множества E такой, что $\rho(x_0, x) < \delta$, получаем последовательно:

$$x \in T_{i_1}(E), \quad x \in T_{i_1} T_{i_2}(E), \quad \dots, \quad x \in T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_k}(E).$$

Итак, $B_{x_0}^\delta \subseteq T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_k}(E)$. Следовательно, для любой $x \in B_{x_0}^\delta \setminus B_0$ выполняется $\Phi(x) = i_1 i_2 \dots i_k \dots$, стало быть,

$$d(\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(x_0)) \leq r_{i_1} \dots r_{i_k} \leq r^k < \varepsilon.$$

Тем самым, предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $T_i(E) \cap T_j(E) = \emptyset$ для всех $i \neq j$, то $B_0 = \emptyset$. В этом случае в силу предложения 1 отображение $\Phi: (\Sigma, d) \rightarrow (E, \rho)$ является гомеоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отображение $S: \Sigma \rightarrow \Sigma$, определенное следующим образом:

$$S(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots) = \sigma_2 \sigma_3 \dots,$$

называется *преобразованием сдвига*.

Обратим внимание, что преобразование сдвига $S: (\Sigma, d) \rightarrow (\Sigma, d)$ является непрерывным, поэтому утверждение непосредственно вытекает из построения метрики d на пространстве последовательностей Σ .

Заметим, что прообраз $\Phi^{-1}(x)$ любой точки $x \in B_0$ состоит более чем из одной точки, выберем в каждом из этих прообразов ровно одну любую точку, в итоге, получим множество $\Sigma_{B_0} \subseteq \Phi^{-1}(B_0)$. Обозначим $\Sigma_{B_0} \cup \Sigma_{E \setminus B_0}$ через Σ' . Отображение $\Phi: \Sigma' \rightarrow E$ является взаимно-однозначным. Сужение отображения Φ на множество Σ' будем обозначать через Φ_0 .

В обозначении меры $\mu^{\dim(E)}(\cdot)$ в дальнейшем мы будем опускать верхний индекс. Через $\mathcal{B}_E$ будем обозначать σ -алгебру борелевских множеств в E , т.е. $\mathcal{B}_E = \{B \cap E : B \in \mathcal{B}\}$. Пополним σ -алгебру $\mathcal{B}_E$, а именно, обозначим через $\mathcal{B}_E^*$ совокупность всех множеств вида $B \cup C$, где $B \in \mathcal{B}_E$ и $C \subset B_0$ (множество B_0 определено в (2)). Очевидно, что $\mathcal{B}_E^*$ является σ -алгеброй. Итак, $(E, \mathcal{B}_E^*, \mu)$ является пространством с мерой.

Рассмотрим отображение $\Pi = \Phi \circ S \circ \Phi_0^{-1}: E \rightarrow E$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого множества $A \in \mathcal{B}_E^*$ выполняется соотношение

$$\Pi^{-1}(A) \in \mathcal{B}_E^*. \quad (3)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\mu(\Pi^{-1}(A)) = \mu(A). \quad (4)$$

Для того чтобы установить истинность предложения 2, докажем следующие леммы.

Введем обозначение. Запись $A = B \pmod{\mu}$ означает, что

$$\mu(A \setminus B) = 0 \quad \text{и} \quad \mu(B \setminus A) = 0.$$

ЛЕММА 1. Для любого множества $A \subset E$ выполняется

$$\Pi^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^N T_i(A) \pmod{\mu}. \quad (5)$$

Кроме того, для любого $A \in \mathcal{B}_E^*$ имеет место соотношение (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую точку $y \in \bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0$ (см. (2)); пусть к тому же $\Phi_0^{-1}(y) = \sigma_1 \sigma_2 \dots$. В таком случае $x = T_{\sigma_1}^{-1}(y) \in A \setminus B_0$, отсюда мы получим, что $y \in \Pi^{-1}(x)$, поэтому

$$\bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \subseteq \Pi^{-1}(A). \quad (6)$$

Пусть x – некоторая точка, принадлежащая множеству A , тогда $\Phi^{-1}(x) = \{\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots : \Phi(\sigma) = x\}$ и $S^{-1} \circ \Phi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^N \{i\sigma : \Phi(\sigma) = x\}$, но тогда, используя определение Φ , получаем

$$\Phi \circ S^{-1} \circ \Phi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^N T_i(x). \quad (7)$$

Из соотношения (7) следует, что

$$\Pi^{-1}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^N T_i(A). \quad (8)$$

В итоге из (6) и (8) следует равенство (5).

Далее, имеем равенство

$$\Pi^{-1}(A) = \left(\bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \right) \cup \left(\Pi^{-1}(A) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \right) \right). \quad (9)$$

Из (8) следует, что для второго слагаемого в (9) выполняется включение

$$\Pi^{-1}(A) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \right) \subseteq B_0. \quad (10)$$

Покажем, что для всякого $A \in \mathcal{B}_E^*$ имеет место соотношение

$$\bigcup_{i=1}^N T_i(A) \in \mathcal{B}_E^*. \quad (11)$$

Прежде всего A можно представить в виде $B \cup C$, где $B \in \mathcal{B}_E$ и $C \subseteq B_0$. Стало быть,

$$\bigcup_{i=1}^N T_i(A) = \bigcup_{i=1}^N T_i(B) \cup \bigcup_{i=1}^N T_i(C). \quad (12)$$

Очевидно, что $T_i(C) \subseteq T_i(B_0)$, $i = 1, \dots, N$. Из определения B_0 (см. (2)) имеем $T_i(B_0) \subseteq B_0$ для всех i , следовательно, $\bigcup_{i=1}^N T_i(C) \subseteq B_0$. Таким образом, из (12) получаем (11). В итоге из (9), (10) и (11) выводим (3). Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает следующая

ЛЕММА 2. *Для любого множества $A \subset E$ и $n \geq 1$ имеет место равенство*

$$\Pi^{-n}(A) = \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq N} T_{i_1} \dots T_{i_n}(A) \pmod{\mu}.$$

Перейдем к доказательству того, что преобразование Π сохраняет меру μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Прежде всего отметим, что соотношение (3) доказано в лемме 1. Докажем теперь равенство (4). Из леммы 1 следует, что

$$\mu(\Pi^{-1}(A)) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^N T_i(A)\right).$$

Так как $A \in \mathcal{B}_E^*$ и $\mu(T_i(A) \cap T_j(A)) = 0$ при $i \neq j$, то

$$\mu(\Pi^{-1}(A)) = \bigcup_{i=1}^N \mu(T_i(A)).$$

Но $\mu(T_i(A)) = r_i^{d_0} \mu(A)$, $i = 1, \dots, N$, где r_i – коэффициент преобразования T_i и $d_0 = \dim(E)$, поэтому выполняется равенство

$$\mu(\Pi^{-1}(A)) = \mu(A) \sum_{i=1}^N r_i^{d_0}.$$

Осталось воспользоваться равенством (1), чтобы получить утверждение предложения.

Таким образом, преобразование Π является *преобразованием, сохраняющим меру*; следствием этого является выполнение известной теоремы Пуанкаре о возвращении (см., например, [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Обратим внимание, что $(E, \mathcal{B}_E^*, \mu)$ является вероятностным пространством. Последовательность $\{\Pi^n\}_{n \geq 0}$ можно понимать как модель случайного блуждания на E . Из леммы Каца (см. [6; с. 188]) следует, что среднее время первого

возвращения $\tau(A)$ в некоторое множество $A \in \mathcal{B}_E^*$ положительной меры при условии, что мы стартовали из этого множества является конечным (заметим, что в теореме Пуанкаре нет информации о времени возвращения). Определим $\tau(A)$ более точно:

$$\tau(A) = \sum_{n=1}^{\infty} np(A, n),$$

где

$$p(A, n) = \mu(\omega \in E: \Pi(\omega) \notin A, \dots, \Pi^{n-1}(\omega) \notin A, \Pi^n(\omega) \in A \mid \omega \in A).$$

В частности, если $A = T_k(E)$, легко вычислить $p(A, n)$. Действительно,

$$p(A, n) = \mu\left(\bigcup_{i_1 \neq k, \dots, i_{n-1} \neq k} (T_k T_{i_1} \dots T_{i_{n-1}} T_k(E))\right) = r_k^{d_0} \sum_{i_1 \neq k, \dots, i_{n-1} \neq k} r_{i_1}^{d_0} \dots r_{i_{n-1}}^{d_0}, \quad (13)$$

где $d_0 = \dim(E)$. Далее, поскольку $\sum_{i=1}^n r_i^{d_0} = 1$, из (13) получаем

$$p(A, n) = r_k^{d_0} (1 - r_k^{d_0})^{n-1}.$$

Множество $A \in \mathcal{B}_E^*$ называется *инвариантным*, если $\Pi^{-1}(A) = A$.

Преобразование, сохраняющее меру, называется *эргодическим*, если мера любого инвариантного множества равна нулю или единице (см., например, [5]).

ТЕОРЕМА 7. Преобразование Π , заданное на $\mathcal{B}_E^*$, является эргодическим.

Установим истинность теоремы 7. Для этого докажем следующие леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k \geq 1$ и $A \in \mathcal{B}_E^*$. Тогда для всех $n \geq k$ выполняется равенство

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = \mu(A) \mu(T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 2, получаем

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = \mu\left(\bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq N} T_{i_1} \dots T_{i_n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)\right).$$

Из предыдущего равенства выводим

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = \mu\left(T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}\left(\bigcup_{1 \leq i_{k+1}, \dots, i_n \leq N} T_{i_{k+1}} \dots T_{i_n}(A)\right)\right). \quad (14)$$

Из равенства (14) и теоремы 2 получаем

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = r_{\alpha_1}^{d_0} \dots r_{\alpha_k}^{d_0} \sum_{1 \leq i_{k+1}, \dots, i_n \leq N} r_{i_{k+1}}^{d_0} \dots r_{i_n}^{d_0} \mu(A), \quad (15)$$

где $d_0 = \dim(E)$. Далее, заметим, что выполняется равенство (см. (1))

$$\sum_{i=1}^N r_i^{d_0} = 1.$$

Откуда и из (15) выводим

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = r_{\alpha_1}^{d_0} \dots r_{\alpha_k}^{d_0} \mu(A). \quad (16)$$

Осталось обратить внимание на то, что (см. теорему 2)

$$\mu(T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = r_{\alpha_1}^{d_0} \dots r_{\alpha_k}^{d_0}.$$

Из последнего равенства и (16) получаем утверждение леммы.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 7, сформулируем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Внешняя мера mes является *борелевски регулярной*, если все открытые множества mes -измеримы и для любого $A \subseteq X$ существует борелевское множество B такое, что $A \subseteq B$ и $\text{mes}(A) = \text{mes}(B)$ (см. [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если mes – регулярная внешняя мера и $\text{mes}(A) < \infty$, где $A \subseteq X$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое подмножество F множества A такое, что $\text{mes}(A \setminus F) < \varepsilon$. Если к тому же $\text{mes}(A) > 0$, то существует замкнутое $F \subseteq A$, что $\text{mes}(F) > 0$.

Хаусдорфова мера μ является борелевски регулярной, поскольку в силу теоремы 1 и 4 все борелевские множества μ -измеримы. Далее, рассмотрим последовательность открытых покрытий, реализующих меру Хаусдорфа некоторого множества A . Для каждого покрытия рассмотрим объединение всех его членов. Пересечение этих объединений – искомое борелевское множество B , для которого $\mu(B) = \mu(A)$ (см. [5; с. 58]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Рассмотрим инвариантное множество $A \in \mathcal{B}_E^*$ такое, что $\mu(A) > 0$. В силу борелевской регулярности меры μ существует замкнутое подмножество F множества A такое, что $\mu(F) > 0$ (см. замечание 4). Заметим, что для всех $k \geq 1$ выполняется равенство

$$E = \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N} T_{i_1} \dots T_{i_k}(E).$$

Для каждого $k \geq 1$ среди всех множеств $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N$, выделим те, для которых $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) \cap F \neq \emptyset$; объединение таких множеств обозначим через F_k , т.е.

$$F_k = \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N} \{T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) : T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Обратим внимание на то, что $F_k \supseteq F_{k+1} \supseteq F$ для всех $k \geq 1$. Кроме того, выполняется равенство $\bigcap_{k \geq 1} F_k = F$. Действительно, пусть $x \in \bigcap_{k \geq 1} F_k$, но тогда для каждого $k \geq 1$ существует множество $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$ такое, что $x \in T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$ и при этом $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) \cap F \neq \emptyset$. Пусть $\text{diam}(E) = C$ и $r = \max\{r_1, \dots, r_N\}$, тогда

$$\text{diam}(T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)) \leq Cr^k. \quad (17)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, используя (17), найдем такое $k \geq 1$, что

$$\text{diam}(T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)) < \varepsilon.$$

Таким образом, мы получаем, что в любой окрестности точки x найдется точка, принадлежащая множеству F ; следовательно, в силу замкнутости F и точка $x \in F$. Стало быть, действительно, множества F и $\bigcap_{k \geq 1} F_k$ совпадают.

Используя лемму 3, а также свойство аддитивности меры, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Pi^{-n}(A) \cap F_k) = \mu(A)\mu(F_k) \quad (18)$$

для любого $A \in \mathcal{B}_E^*$. Кроме того, в силу непрерывности меры μ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(F_k) = \mu(A)\mu(F). \quad (19)$$

Из равенств (18) и (19) следует, что найдется последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\Pi^{-n_k}(A) \cap F_k) = \mu(A)\mu(F). \quad (20)$$

Но из условия леммы следует, что $\Pi^{-n_k}(A) = A$, поэтому из (20) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A \cap F_k) = \mu(A)\mu(F). \quad (21)$$

С другой стороны, в силу непрерывности меры μ выводим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A \cap F_k) = \mu(A \cap F). \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем равенство

$$\mu(A)\mu(F) = \mu(A \cap F).$$

Но F является подмножеством A причем $\mu(F) > 0$, поэтому $\mu(A) = 1$. Этим и завершается доказательство теоремы.

Следующее утверждение является следствием эргодичности преобразования Π .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для почти всех $\omega \in E$ траектория точки ω (т.е. последовательность $\{\Pi^n \omega\}$) всюду плотна в E .

В основе доказательства следствия 2 лежит следующая лемма (см. [8; с. 39]).

ЛЕММА 4. Если пространство с мерой E является топологическим пространством со счетной базой, причем каждое его непустое открытое подмножество имеет положительную меру, и если T – эргодическое сохраняющее меру преобразование пространства E , то для почти всех $\omega \in E$ траектория точки ω (т.е. последовательность $\{T^n(\omega)\}$) всюду плотна.

Заметим, что пространство E с метрикой, индуцированной внешним пространством (X, ρ) , является компактным, а значит, и сепарабельным, отсюда следует, что (E, ρ) является топологическим пространством со счетной базой.

ЛЕММА 5. Пусть U – непустое открытое подмножество пространства (E, ρ) . Тогда $\mu(U) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – произвольная точка пространства E и ε – произвольное положительное число. Докажем, что

$$\mu(B_{x_0}^\varepsilon) > 0, \quad \text{где } B_{x_0}^\varepsilon = \{x \in E : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}.$$

Далее, напомним, что $E = \bigcup_{i=1}^N T_i$, где $T_1, \dots, T_N$ – сжимающие преобразования подобия с коэффициентами $r_1, \dots, r_N$ соответственно. Через $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \dots$ обозначим некоторую точку из $\Phi^{-1}(x_0)$. Пусть $\text{diam}(E) = C$ и $r = \max\{r_1, \dots, r_N\}$, тогда

$$\text{diam}(T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_k}(E)) \leq Cr^k.$$

Выберем k таким образом, чтобы выполнялось следующее неравенство: $Cr^k < \varepsilon/2$. Тогда $x_0 \in T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_k}(E) \subseteq B_{x_0}^\varepsilon$. Следовательно,

$$\mu(B_{x_0}^\varepsilon) \geq \mu(T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_k}(E)) = \prod_{i=1}^k r_{\sigma_i}^{d_0} > 0,$$

где $d_0 = \dim(E)$. Стало быть, любое непустое открытое подмножество E имеет положительную меру. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Из лемм 4 и 5 сразу вытекает утверждение следствия.

Автор благодарен профессору В. А. Селезневу за внимание к работе.

Автор признателен анонимному рецензенту за ряд ценных замечаний, позволивших значительно улучшить содержание работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. М. Кроновер, *Фракталы и хаос в динамических системах*, Постмаркет, М., 2000.
- [2] З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975.
- [3] G. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Undergrad. Texts Math., Springer, New York, 2008.
- [4] П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953.
- [5] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1980.
- [6] Г. М. Заславский, *Гамильтонов хаос и фрактальная динамика*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2010.
- [7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984.
- [8] П. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, Изд-во Удмуртск. ун-та, Ижевск, 1999.

Н. С. Аркашов

Новосибирский государственный технический
университет,
Новосибирский государственный университет
E-mail: nicky1978@mail.ru

Поступило

16.05.2012

Исправленный вариант

03.04.2014