Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Арестов, А. Г. Бабенко, Оценки максимального значения углового кодового расстояния для 24 и 25 точек на единичной сфере в $\mathbb{R}^4$, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 483–503

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm969>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:40:10

УДК 517.518.86+519.147

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ УГЛОВОГО КОДОВОГО РАССТОЯНИЯ ДЛЯ 24 И 25 ТОЧЕК НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ В $\mathbb{R}^4$

В. В. Арестов, А. Г. Бабенко

Данная работа посвящена известной задаче о максимальном числе элементов $\tau_m(s)$ сферического s -кода ($-1 \leq s < 1$) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 2$; а точнее, в ней рассматривается функция Дельсарта $w_m(s)$, связанная с величиной $\tau_m(s)$ неравенством $\tau_m(s) \leq w_m(s)$. В работе найдено решение уравнения $w_m(s) = N$ при $m = 4$ и $N = 24, 25$. В качестве следствия получено утверждение, что среди любых 25 (24) точек на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^4$ всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше 60.5° (61.41°).

Библиография: 24 названия.

Данная работа посвящена известной задаче о максимальном числе элементов $\tau_m(s)$ сферического s -кода ($-1 \leq s < 1$) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 2$; а точнее, в ней рассматривается функция Дельсарта $w_m(s)$ (см. ниже (0.7)), связанная с величиной $\tau_m(s)$ неравенством $\tau_m(s) \leq w_m(s)$. В работе найдено решение уравнения $w_m(s) = N$ при $m = 4$ и $N = 24, 25$. В качестве следствия получены новые оценки сверху максимального значения углового кодового расстояния для 24 и 25 точек на единичной сфере в $\mathbb{R}^4$.

Введение. Хорошо известно [1, с. 3378, п. 4] предположение, что среди всех множеств из 24 точек на единичной сфере $\mathbb{S}^3$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ множество, состоящее из 24 точек: $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$, $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$, являющихся вершинами правильного выпуклого многогранника с символом Шлефли $\{3, 4, 3\}$ (см. [2, гл. 22]), имеет максимально возможное минимальное попарное угловое расстояние между точками, т.е. на нем реализуется максимальное угловое кодовое расстояние.

Другой не менее известной задачей в $\mathbb{R}^4$ является задача нахождения контактного числа τ_4 этого пространства. *Контактным числом* τ_m пространства $\mathbb{R}^m$ называется максимальное число евклидовых шаров пространства одинакового радиуса (можно считать, единичного радиуса) с непересекающимися внутренностями, касающихся одного такого же шара; оно совпадает с наибольшей мощностью множества точек единичной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00175.

сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^m$, угловое расстояние между любыми двумя точками которого не меньше 60° . Описанное выше множество точек дает оценку $\tau_4 \geq 24$. Согласно результатам Одлыжко и Слоэна [3] справедлива оценка $\tau_4 \leq 25$. Следовательно, решение задачи о максимуме углового кодового расстояния для 25 точек на $\mathbb{S}^3$ содержит в себе решение задачи о τ_4 .

В настоящее время ни одна из перечисленных выше задач не решена. В этой работе показаны возможности классической схемы Дельсарта [4]–[7] для получения оценок сверху минимальных расстояний во множествах из 24 и 25 точек на единичной сфере четырехмерного евклидова пространства. При этом существенно использовалась методика, разработанная в [8].

Пусть $\mathbb{R}^m$ есть вещественное евклидово пространство размерности $m \geq 2$, $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ – его единичная сфера, а $\mathbb{B}_\rho^m(y) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - y| \leq \rho\}$ – шар радиуса $\rho > 0$ с центром в точке $y \in \mathbb{R}^m$; здесь $|x| = \sqrt{xx}$ – норма вектора $x \in \mathbb{R}^m$, $xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m$ – скалярное произведение векторов (точек) $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ из $\mathbb{R}^m$.

Пусть $-1 \leq s < 1$. Множество $W \subset \mathbb{S}^{m-1}$, содержащее не менее двух точек, называется *сферическим s -кодом*, если для любых двух точек $x, y \in W$, $x \neq y$, их скалярное произведение xy удовлетворяет условию $(-1 \leq) xy \leq s$; это условие означает, что угловое расстояние (угол) между любыми двумя различными точками множества W больше или равно значения $\arccos s$:

$$\varphi(W) = \min\{\arccos(xy) : x \neq y, x, y \in W\} \geq \arccos s.$$

Величина $\varphi(W)$ называется *угловым кодовым расстоянием* множества W .

Одну из основных задач для сферических кодов можно сформулировать (см., например, [9, гл. 1, § 2, п. 2.3]) следующим образом: для заданных $m \geq 2$ и $-1 \leq s < 1$ найти сферический s -код $W \subset \mathbb{S}^{m-1}$ наибольшей возможной мощности. Мы будем обозначать эту максимальную мощность через $\tau_m(s)$; таким образом,

$$\tau_m(s) = \max\{|W| : W \subset \mathbb{S}^{m-1}, W \text{ – сферический } s\text{-код}\}, \quad (0.1)$$

где $|W|$ есть мощность (количество точек) множества W . Эту задачу можно рассматривать (см. [9, гл. 1, § 2, п. 2.3]) и в двойственной форме: для заданных $m \geq 2$ и $N \geq 2$ найти сферический код $W \subset \mathbb{S}^{m-1}$, $|W| = N$, с наибольшим угловым кодовым расстоянием $\varphi(W)$, которое мы обозначим через $\varphi_m(N)$, т.е.

$$\varphi_m(N) = \max\{\varphi(W) : W \subset \mathbb{S}^{m-1}, |W| = N\}. \quad (0.2)$$

Задачи (0.1), (0.2) имеют большую историю; соответствующую информацию и библиографию можно найти в [9]–[11]. Отметим сейчас лишь, что в случае произвольной размерности $m \geq 2$ величины $\tau_m(s)$ при $-1 \leq s \leq 0$ и $\varphi_m(N)$ при $N \leq 2m$ нашел Ранкин [12].

Величина $\tau_m(1/2)$ совпадает (см., например, [9, гл. 1, § 2]) с контактным числом τ_m пространства $\mathbb{R}^m$:

$$\tau_m = \tau_m\left(\frac{1}{2}\right), \quad m \geq 2. \quad (0.3)$$

В настоящее время контактные числа τ_m известны лишь при $m = 2, 3, 8, 24$, а именно: $\tau_2 = 6$, $\tau_3 = 12$, $\tau_8 = 240$, $\tau_{24} = 196560$; для произвольных значений m известны оценки снизу и сверху этих констант (см., например, [9, гл. 1]).

В дальнейшем оценки снизу для (0.1) обсуждаться не будут. Для оценки сверху числа $\tau_m(s)$ часто используется схема Дельсарта, возникшая в его исследованиях [4], [5], а затем успешно развитая и примененная в работах [3], [6], [7], [13]–[19] и в ряде других работ.

Пусть $R_k = R_k^{\alpha, \alpha}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, есть система ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра), ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - t^2)^\alpha$, $\alpha = (m-3)/2$, нормированных условием $R_k(1) = 1$. Указанная схема базируется на свойстве положительной определенности многочленов R_k , а точнее, на свойстве положительной определенности ядер $R_k(xy)$ на декартовом произведении $\mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{S}^{m-1}$ (см., например, [9, гл. 9, § 3, теорема 1]) и приводит к следующей экстремальной задаче [6], [7], которую нам удобно сформулировать в форме близкой к той, которая использовалась в работе авторов [8].

Обозначим через $\mathcal{F}_m(s)$ множество непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций f со следующими свойствами:

1) функция f представляется в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t), \quad (0.4)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$f_0 > 0, \quad f_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k < \infty; \quad (0.5)$$

2) f – неположительная функция на отрезке $[-1, s]$:

$$f(t) \leq 0, \quad t \in [-1, s]. \quad (0.6)$$

Известно [7], что множество $\mathcal{F}_m(s)$ при каждом $m \geq 2$ и $s \in [-1, 1)$ непусто. На этом множестве функций рассмотрим задачу о вычислении величины

$$w_m(s) = \inf \left\{ \frac{f(1)}{f_0} : f \in \mathcal{F}_m(s) \right\}. \quad (0.7)$$

Задачу (0.7) мы будем называть иногда *задачей* $w_m(s)$. Следующее утверждение содержится в работах [6], [7].

ТЕОРЕМА А. *Для произвольного $s \in [-1, 1)$ при любом натуральном $m \geq 2$ имеет место неравенство*

$$\tau_m(s) \leq w_m(s). \quad (0.8)$$

Число $\tau_m(s)$ целое, поэтому величину $w_m(s)$ в правой части (0.8) можно заменить на ее целую часть $[w_m(s)]$ и, следовательно, справедлива оценка

$$\tau_m(s) \leq [w_m(s)], \quad m \geq 2, \quad s \in [-1, 1).$$

Как видно из определения (0.7) и утверждения (0.8), любая функция $f \in \mathcal{F}_m(s)$ дает оценку сверху для величины $w_m(s)$, а значит, и для $\tau_m(s)$. На этом пути в [13], [3] были получены, в частности, оценки сверху для τ_8, τ_{24} , которые совпали с известными оценками снизу. Одной из основных целей данной работы является дальнейшее изучение контактного числа τ_4 пространства $\mathbb{R}^4$. Отметим несколько относящихся к этой проблеме результатов. По изложенной только что схеме Дельсарта с помощью конкретной функции (которая на самом деле есть некоторый алгебраический многочлен) Одлджко и Слоэн [3] получили оценку $\tau_4 \leq 25$. В работе авторов [8] решена задача (0.7) в случае $m = 4, s = 1/2$. При этом оказалось, что $w_4(1/2) = 25.558429097 \dots$ и решением является многочлен, близкий к выписанному ранее в [3], а затем уточненный в работах [20], [21]. Работы Бойваленкова [20], [21], [18] и работа [19] стали известны авторам уже после выхода их работы [8]. В [20] изучаются свойства экстремальной функции f в задаче (0.7) при $m = 4, s = 1/2$ (хотя сама задача в работе не решена). В частности, в [20] доказано, что у экстремальной функции коэффициент $f_6 = 0$, а при некоторых дополнительных предположениях будут выполняться также условия $f_7 = 0$ и $f_8 = 0$.

Нетрудно понять, что функции $\tau_m(s)$ и $w_m(s)$ по $s \in [-1, 1)$ не убывают. Довольно очевидно, что $\tau_m(-1) = w_m(-1) = 2$ [12] и $\tau_m(s)$, а значит, и $w_m(s)$ стремятся к $+\infty$ при $s \rightarrow 1$. Рассмотрим задачу, в определенном смысле обратную задаче (0.7). Для значений параметра $w \geq 2$ положим

$$s_m(w) = \inf\{s \in [-1, 1) : w_m(s) \geq w\}; \quad (0.9)$$

функцию s_m можно интерпретировать, как обратную функции w_m . Интерес представляют значения функции (0.9) для натуральных значений аргумента $w = N$.

В настоящей работе будет решена задача (0.9) в случае $m = 4$ для значений аргумента w , равных 25 и 24, т.е. будут найдены значения $s_4(25)$ и $s_4(24)$; приближенно эти значения таковы: $s_4(25) = 0.4925150241 \dots$, $s_4(24) = 0.4785451836 \dots$, здесь и в аналогичных ситуациях ниже для применяемых нами величин приведены 10 десятичных знаков (хотя, на самом деле, мы использовали 30 знаков). Из этого результата будет следовать, в частности, такое утверждение.

Следствие 0.1. *Среди любых 25 (24) точек на сфере $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше 60.5° (61.41°).*

В работах Левенштейна [13], [16] фактически содержатся (см. [19]) оценки сверху минимальных угловых расстояний N точек на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ для любых натуральных чисел $N \geq 2$ и $m \geq 2$. В частности, согласно этим результатам среди любых 24 точек на сфере $\mathbb{S}^3$ всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше 61.65° , а для любых 25 точек на сфере $\mathbb{S}^3$ минимальное попарное угловое расстояние строго меньше 60.79° , иными словами, для величины (0.2) справедливы неравенства

$$\varphi_4(24) < 61.65^\circ, \quad \varphi_4(25) < 60.79^\circ; \quad (0.10)$$

на самом деле, из результатов работы [16] следуют оценки $s_4(24) \geq 0.4749504898 \dots$, $s_4(25) \geq 0.4880762504 \dots$, которые и влекут неравенства (0.10).

В работе [19] в некоторых конкретных случаях для величины (0.9) были указаны более сильные оценки, например следующая оценка, которую в принятых здесь обозначениях можно записать так: $s_4(24) \geq 0.47763$. Отсюда вытекает, что среди любых 24

точек на сфере $\mathbb{S}^3$ всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше 61.47° .

Слоэн, Смит и Хардин [22] построили конкретное множество из 25 точек на единичной сфере $\mathbb{S}^3$ пространства $\mathbb{R}^4$ с минимальным угловым расстоянием, большим либо равным 57.4988826° . Тем самым, они улучшили результат работы [23, с. 158], в которой утверждается, что $\varphi_4(25) \geq 56.5^\circ$. Перечисленные результаты можно записать в виде следующих оценок величин (0.2), (0.9):

$$\begin{aligned} 60^\circ \leq \varphi_4(24) < 61.47^\circ, \quad 57.4988826^\circ \leq \varphi_4(25) < 60.79^\circ; \\ 0.47763 \leq s_4(24) \leq \cos \varphi_4(24) \leq 0.5, \\ 0.4880762504 \leq s_4(25) \leq \cos \varphi_4(25) \leq 0.5373161. \end{aligned} \quad (0.11)$$

1. Вычисление значения $s_4(25)$. В четырехмерном случае ($m = 4$) показатель α равен $1/2$ и многочлены $R_k = R_k^{1/2, 1/2}$ являются многочленами Чебышева второго рода, нормированными условием $R_k(1) = 1$, т.е. многочленами

$$R_k(t) = \frac{\sin(k+1)\theta}{(k+1)\sin\theta}, \quad t = \cos\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Для формулировки основного результата работы нам понадобятся несколько определений и обозначений. Пусть H есть следующий многочлен двадцать восьмой степени:

$$\begin{aligned} H(z) = & 1744568320000 z^{28} + 19824640000 z^{27} - 11368270848000 z^{26} \\ & + 299992125440 z^{25} + 33683617005056 z^{24} - 1690611799808 z^{23} \\ & - 59756580346080 z^{22} + 3740858012128 z^{21} + 70524254066704 z^{20} \\ & - 4516619739088 z^{19} - 58188563861056 z^{18} + 3200479271680 z^{17} \\ & + 34328475907496 z^{16} - 1262955136312 z^{15} - 14563330120710 z^{14} \\ & + 172742066070 z^{13} + 4417415566665 z^{12} + 76811504675 z^{11} \\ & - 942777154875 z^{10} - 46753060057 z^9 + 137285137301 z^8 \\ & + 11621133345 z^7 - 12856584451 z^6 - 1594636173 z^5 \\ & + 680106134 z^4 + 118057108 z^3 - 13255560 z^2 - 3691008 z - 186624. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Он имеет четырнадцать вещественных и четырнадцать комплексных корней:

$$\begin{aligned} z_1 = -1.0416743109 \dots, \quad z_2 = -0.9918041575 \dots, \quad z_3 = -0.8449780198 \dots, \\ z_4 = -0.8175275067 \dots, \quad z_5 = -0.7387597195 \dots, \quad z_6 = -0.5411187835 \dots, \\ z_7 = -0.4069720983 \dots, \quad z_8 = -0.2950901339 \dots, \quad z_9 = -0.2696741063 \dots, \\ z_{10} = -0.1591723800 \dots, \quad z_{11} = -0.0913396135 \dots, \quad z_{12} = 0.4109824855 \dots, \\ z_{13} = 0.4925150241 \dots, \quad z_{14} = 0.6197533558 \dots, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
z_{15,16} &= -0.8891104747 \dots \pm i 0.1829442719 \dots, \\
z_{17,18} &= -0.4736286597 \dots \pm i 0.0577014541 \dots, \\
z_{19,20} &= 0.4317085516 \dots \pm i 0.0656750849 \dots, \\
z_{21,22} &= 0.4484454172 \dots \pm i 0.0031683147 \dots, \\
z_{23,24} &= 0.8021254198 \dots \pm i 0.3917816767 \dots, \\
z_{25,26} &= 0.9371073469 \dots \pm i 0.1945583784 \dots, \\
z_{27,28} &= 1.0751005630 \dots \pm i 0.2302148263 \dots.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Особую роль в дальнейшем будет играть его тринадцатый вещественный корень, условимся обозначать его буквой d ; таким образом,

$$d = z_{13} = 0.4925150241 \dots \tag{1.5}$$

Среди всех вещественных корней полинома H только корень z_{13} лежит на том же самом отрезке $[0.4880762504, 0.5373161]$, что и величина $s_4(25)$ (см. (0.11)). Одним из основных результатов данной работы является следующее утверждение, в котором доказано, что, на самом деле, величины $s_4(25)$ и z_{13} совпадают между собой; в этом утверждении использованы обозначения (0.7), (1.5).

ТЕОРЕМА 1.1. *На полуинтервале $[-1, 1)$ уравнение $w_4(s) = 25$ имеет единственное решение $s = d$ и, таким образом,*

$$s_4(25) = d = 0.4925150241 \dots \tag{1.6}$$

Это утверждение будет получено как следствие приводимой ниже теоремы 1.2.

Введем несколько чисел, выражающихся через d , и функцию, относительно которой в последствии будет доказано, что она является экстремальной в задаче $w_4(d)$. Рассмотрим кубический полином

$$\begin{aligned}
G(z) &= (320 d^2 + 48 d - 68) z^3 + (240 d^3 + 108 d^2 + 39 d - 12) z^2 \\
&\quad + (160 d^4 + 48 d^3 - 166 d^2 + 16 d + 42) z \\
&\quad + 80 d^5 + 12 d^4 - 113 d^3 - 4 d^2 + 21 d + 4.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Этот полином имеет два комплексных корня

$$\xi_{1,2} = -0.2486667705 \dots \pm i 0.0422341143 \dots$$

и один вещественный корень, который мы обозначим через ξ ; его приближенное значение таково

$$\xi = -1.3689346636 \dots \tag{1.8}$$

Положим

$$\eta = \frac{-13 + 24d - 4\xi + 30d\xi + 24d^2\xi + 64d^2}{2(17 - 12d - 80d^2)} = 0.5035865245\dots, \quad (1.9)$$

$$\zeta = \frac{7 + 6d\xi + 6\eta + 16\xi + 16d + 40d\eta}{-40} = -0.0468609188\dots, \quad (1.10)$$

$$q = d + 2\xi = -2.2453543031\dots, \quad (1.11)$$

$$r = 2d\xi + d^2 + 3\xi^2 - 2\eta - 2 = 1.5089025621\dots \quad (1.12)$$

Определим многочлен девятой степени

$$f^*(t) = (t - d)(t^3 - \xi t^2 + \eta t - \zeta)^2(t^2 + qt + r). \quad (1.13)$$

Ниже мы покажем, что многочлен f^* неположителен на отрезке $[-1, d]$ и коэффициенты Фурье f_k^* многочлена (1.13) в его разложении

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^9 f_k^* R_k(t) \quad (1.14)$$

по многочленам Чебышева второго рода неотрицательные, причем $f_0^* > 0$, т.е. функция f^* принадлежит классу $\mathcal{F}_4(d)$; более того, эта функция является экстремальной в задаче $w_4(d)$. Точнее, имеет место такое утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. *Функция f^* , заданная соотношениями (1.7)–(1.13), принадлежит множеству $\mathcal{F}_4(d)$ и является единственной (с точностью до положительного постоянного множителя) экстремальной функцией (решением) задачи (0.7) при $t = 4$, $s = d$; при этом справедливы равенства*

$$w_4(d) = \frac{f^*(1)}{f_0^*} = 25. \quad (1.15)$$

Доказательство теоремы 1.2 будет реализовано в виде нескольких вспомогательных утверждений. Оценку сверху для величины $w_4(d)$ дает функция f^* . Оценка снизу будет получена с помощью квадратурной формулы (на более широком в сравнении с $\mathcal{F}_4(d)$ классе функций), содержащейся в следующей ниже лемме 1.1.

Пусть $C[-1, 1]$ есть пространство вещественных функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$. Обозначим через Φ_4 множество функций $f \in C[-1, 1]$, представимых рядами по многочленам $R_k = R_k^{1/2, 1/2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, с абсолютно суммируемой последовательностью вещественных коэффициентов:

$$\Phi_4 = \left\{ f \in C[-1, 1] : f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t), f_0, f_1, f_2, \dots \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty \right\}; \quad (1.16)$$

очевидно, $\mathcal{F}_4(d) \subset \Phi_4$.

Многочлен третьей степени

$$z^3 - \xi z^2 + \eta z - \zeta, \quad (1.17)$$

квадрат которого является одним из сомножителей в правой части (1.13), имеет три вещественных корня:

$$a = -0.8305233622 \dots, \quad b = -0.3958876231 \dots, \quad c = -0.1425236781 \dots \quad (1.18)$$

Эти три числа, обозначения (1.1)–(1.13), (1.16), а также обозначение

$$\Lambda(A, B, C, D) = \frac{1 + 2(B + C + D + BD + CD + CB + 4BCD)}{8(A - 1)(A - B)(A - C)(A - D)} \quad (1.19)$$

используются в следующей лемме.

ЛЕММА 1.1. *Для каждой функции $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t) \in \Phi_4$ имеет место квадратурная формула*

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1-t^2} dt = L(f) - \sum_{\nu \geq 1} L(R_\nu) f_\nu, \quad (1.20)$$

в которой L есть функционал

$$L(f) = \frac{1}{25} f(1) + \lambda(a) f(a) + \lambda(b) f(b) + \lambda(c) f(c) + \lambda(d) f(d) \quad (1.21)$$

с коэффициентами

$$\lambda(a) = \Lambda(a, b, c, d) = 0.123069069 \dots, \quad (1.22)$$

$$\lambda(b) = \Lambda(b, c, d, a) = 0.198093840 \dots, \quad (1.23)$$

$$\lambda(c) = \Lambda(c, d, a, b) = 0.274002556 \dots, \quad (1.24)$$

$$\lambda(d) = \Lambda(d, a, b, c) = \frac{1 + 2(\xi + \eta + 4\zeta)}{8(d-1)(d^3 - d^2\xi + d\eta - \zeta)} = 0.364834533 \dots \quad (1.25)$$

Функционал L обладает свойствами

$$L(1) = 1, \quad L(R_\nu) = 0 \quad \text{при } \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9, \quad (1.26)$$

$$L(R_\nu) > 0 \quad \text{при } \nu \geq 6, \nu \neq 9. \quad (1.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения, которые используются для обоснования этой леммы, аналогичны тем, что применялись в работе [8] при доказательстве леммы 4.2, связанной с задачей исследования величины $w_4 = w_4(1/2)$, поэтому мы приведем эти рассуждения довольно кратко.

Вначале найдем достаточные условия на вещественные узлы $-1 \leq A < B < C < D < 1$ и коэффициенты $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8$ для существования квадратурной формулы вида

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1-t^2} dt = \mathcal{L}(f) + \sum_{\nu=6}^8 \gamma_\nu f_\nu, \quad (1.28)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{25} f(1) + \lambda_A f(A) + \lambda_B f(B) + \lambda_C f(C) + \lambda_D f(D), \quad (1.29)$$

на множестве всех полиномов девятой степени $f(t) = \sum_{k=0}^9 f_k R_k(t)$. Большинство из этих условий будут также и необходимыми.

На первом этапе найдем условия, которым должны удовлетворять параметры A, B, C, D . Сделаем симметрическую замену

$$U = A + B + C, \quad V = AB + AC + BC, \quad W = ABC.$$

Из теоремы Виета следует, что A, B, C являются корнями многочлена

$$\chi(t) = t^3 - Ut^2 + Vt - W. \quad (1.30)$$

Ниже мы получим несколько уравнений с неизвестными D, U, V, W , с помощью которых получим одно уравнение с одним неизвестным D .

Рассмотрим многочлен пятой степени

$$\sigma(t) = (t-1)(t-D)\chi(t). \quad (1.31)$$

Разложим его вначале по степеням переменной t , а затем, применяя известные (см. [24, с. 28, формула (41)]) представления

$$t^k = 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \frac{(k+1-2\nu)^2}{k+1-\nu} \binom{k}{\nu} R_{k-2\nu}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.32)$$

степеней переменной через многочлены Чебышева второго рода, найдем нулевой коэффициент, участвующий в разложении $\sigma(t) = \sum_{k=0}^5 \sigma_k R_k(t)$ полинома σ по многочленам R_k

$$\sigma_0 = -\frac{1}{8}(1 + D + U + 8DW + 2DU + 2V + 2DV + 2W).$$

Подставив многочлен σ в формулу (1.28), получаем первое необходимое условие существования этой формулы: $\sigma_0 = 0$, которое эквивалентно равенству

$$W = \frac{1 + D + U + 2V + 2DU + 2DV}{-2(1 + 4D)}. \quad (1.33)$$

Действуя аналогично, с помощью полинома

$$h(t) = (t-D)\chi(t) \quad (1.34)$$

и формулы (1.28) находим еще одно выражение для параметра W

$$W = -\frac{1}{40}(7 + 6DU + 6V + 16U + 16D + 40DV). \quad (1.35)$$

Приравняв правые части равенств (1.33), (1.35), получим уравнение, эквивалентное следующему равенству:

$$V = \frac{-13 + 24D - 4U + 30DU + 24D^2U + 64D^2}{2(17 - 12D - 80D^2)}. \quad (1.36)$$

Таким же способом, применяя полиномы

$$\begin{aligned} h_1(t) &= (t-1)(t^3 - Ut^2 + Vt - W), & h_2(t) &= (t-1)(t-D)(t-B)(t-C), \\ h_3(t) &= (t-1)(t-D)(t-A)(t-C), & h_4(t) &= (t-1)(t-D)(t-A)(t-B), \end{aligned} \quad (1.37)$$

получаем

$$\lambda_D = \frac{1 + 2(4W + U + V)}{8(D-1)(D^3 - D^2U + DV - W)} = \Lambda(D, A, B, C), \quad (1.38)$$

$$\lambda_A = \Lambda(A, B, C, D), \quad \lambda_B = \Lambda(B, C, D, A), \quad \lambda_C = \Lambda(C, D, A, B). \quad (1.39)$$

Подставляя в (1.28) многочлены R_ν , $\nu = 6, 7, 8$, получим еще три необходимых условия:

$$\gamma_\nu = -\mathcal{L}(R_\nu) \quad \text{при } \nu = 6, 7, 8. \quad (1.40)$$

Девять условий (1.33), (1.35), (1.38), (1.39), (1.40) являются необходимыми для существования квадратурной формулы (1.28).

Построим теперь многочлен $\psi(t) = \sum_{k=0}^9 \psi_k R_k(t)$, на котором зануляются все функционалы, стоящие в правой части формулы (1.28) (с учетом представления (1.29)), кроме значения в точке $t = 1$, т.е. многочлен ψ со свойствами

$$\psi(A) = \psi(B) = \psi(C) = \psi(D) = \psi_6 = \psi_7 = \psi_8 = 0. \quad (1.41)$$

Положим

$$Q = D + 2U, \quad R = -2 + 2DU + D^2 + 3U^2 - 2V \quad (1.42)$$

и рассмотрим многочлен девятой степени

$$\psi(t) = (t-D)(t^3 - Ut^2 + Vt - W)^2(t^2 + Qt + R). \quad (1.43)$$

Учитывая (1.42), найдем четыре старших и нулевой коэффициенты Фурье в его разложении

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^9 \psi_k R_k(t) \quad (1.44)$$

по многочленам Чебышева второго рода R_k

$$\psi_9 = \frac{5}{256}, \quad \psi_8 = \psi_7 = 0, \quad (1.45)$$

$$\psi_6 = \frac{7}{64}(-2UD^2 - 3DU^2 - 2W + 6VU + 2DV - 4U^3 + 2D - D^3 + 4U), \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{64}(10D + 20U + 22W - 32D^2V^2U - 32D^2VU + 80WV - 16WU^2 \\ &\quad + 48V^2U + 32W^2U - 64D^2WU^2 + 32DV^3 - 16D^3V^2 - 32D^3WU \\ &\quad - 16D^3V + 42DV + 64WV^2 - 48VU^3 - 64D^3W^2 + 64DWVU \\ &\quad - 24DU^4 - 8D^3U^2 - 16D^2U^3 + 62VU + 128DW^2V - 5D^3 - 20U^3 \\ &\quad - 96WVU^2 + DU^2 - 128D^2W^2U + 128DW^2 - 10UD^2 \\ &\quad + 64DV^2 + 64DWU - 32DVU^2 - 48DV^2U^2 - 96DWU^3 - 192DW^2U^2). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Наложим на параметры D, U, V, W условие $\psi_6 = 0$, т.е.

$$-2UD^2 - 3DU^2 - 2W + 6VU + 2DV - 4U^3 + 2D - D^3 + 4U = 0.$$

Подставим в это уравнение вместо параметра W его выражение (1.35) и, домножив получившееся уравнение на 20, придем к уравнению

$$7 - 40UD^2 - 60DU^2 + 6DU + 6V + 96U + 56D + 80DV + 120VU - 80U^3 - 20D^3 = 0.$$

Выразим отсюда параметр V

$$V = \frac{40UD^2 + 60DU^2 - 7 - 6DU - 96U - 56D + 80U^3 + 20D^3}{2(3 + 40D + 60U)}.$$

Из последнего соотношения и (1.36) следует, что

$$F(D, U) = 0, \quad (1.48)$$

где

$$\begin{aligned} F(D, U) = & 4 + 21D + 42U + 320U^3D^2 + 16DU - 12U^2 + 48U^3D - 113D^3 \\ & - 68U^3 + 39DU^2 + 48UD^3 + 160UD^4 + 108D^2U^2 \\ & + 240D^3U^2 + 12D^4 + 80D^5 - 166UD^2 - 4D^2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Сейчас мы получим еще одно уравнение относительно неизвестных D, U . Формула (1.28) на функции ψ (в предположении, что выполнены условия (1.41)) принимает вид

$$\psi_0 = \frac{1}{25}\psi(1). \quad (1.50)$$

Используя соотношения (1.47), (1.42), (1.43), равенство (1.50) можно переписать в такой форме

$$\frac{1}{128}F_1(D, U, V, W) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_1(D, U, V, W) = & 64 + 122D + 244U + 256V + 422W + 512DWV - 672D^2V^2U \\ & - 544D^2VU + 1616WV - 272WU^2 + 816V^2U + 256DW + 672W^2U \\ & - 1344D^2WU^2 + 672DV^3 - 336D^3V^2 - 672D^3WU - 272D^3V + 256DU \\ & + 666DV + 1344WV^2 - 816VU^3 + 128U^2 - 384WU^3 + 1536D^3W^2 \\ & + 1344DWVU - 128W^2V - 256D^2U^2 - 192V^2U^2 - 408DU^4 - 136D^3U^2 \\ & - 272D^2U^3 - 384U^3D - 192W^2U^2 - 128D^3W + 910VU + 3072DW^2V \\ & - 128D^3WV + 256DWV^2 - 256D^2WVU - 384DWVU^2 - 61D^3 - 244U^3 \\ & - 2016WVU^2 + 384WU + 89DU^2 - 3072D^2W^2U - 384WU^2D - 320V^2 \\ & - 256WUD^2 + 3072DW^2 - 128UD^3 + 64W^2 + 512WUV + 128V^3 \\ & - 512DVU - 192U^4 - 256D^2VU^2 - 384DVU^3 - 128D^3VU + 1008DV^2U^2 \\ & - 122UD^2 + 1216DV^2 + 1344DWU - 544DVU^2 \\ & + 256V^2DU + 2016DWU^3 - 4608DW^2U^2. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение (1.35) для W , получаем

$$\frac{1}{50}F_2(D, U, V) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_2(D, U, V) = & 572 D + 1877 U - 4141 V + 95872 D^2 V^2 + 74240 D^2 V + 13992 V U^2 \\ & + 61056 D^2 V^2 U + 86592 D^2 V U - 8192 D^4 - 12288 D^5 \\ & + 11604 V^2 U - 30144 D V^3 + 258912 D^3 V^2 + 131904 D^3 V \\ & + 12475 D U - 11352 D V + 1248 V U^3 - 36000 D^3 U^3 + 6022 U^2 \\ & - 12744 U^4 D^2 - 16640 D^4 V^2 - 27136 D^4 V - 31080 D^2 U^2 \\ & + 5304 V^2 U^2 - 15216 D U^4 - 67472 D^3 U^2 - 54316 D^2 U^3 \\ & - 15960 U^3 D + 39680 D^2 V^3 - 5184 D^3 U^4 + 8864 V U - 241536 D^3 U^2 V \\ & - 153216 D^4 V U - 59520 U^2 D^2 V^2 + 20294 D^3 + 632 U^3 - 69120 D^3 U^3 V \\ & - 230400 D^3 U^2 V^2 + 12566 D U^2 - \frac{789}{2} - 3456 U^3 D^4 \\ & - 22608 U^2 D^4 + 12800 U D^3 V^2 - 38784 U D^4 - 46080 U^2 D^4 V \\ & - 153600 U D^4 V^2 - 93888 U^3 D^2 V - 23040 D^5 V U - 76800 D^5 V^2 \\ & - 61440 D^5 V + 153600 D^3 V^3 - 6664 U D^3 - 7472 V^2 - 3456 U^4 \\ & - 86544 D^2 V U^2 - 9216 D^5 U - 1728 D^5 U^2 + 2160 D V U^3 \\ & + 2224 D^3 V U - 3536 V^3 + 25612 U D^2 - 37472 D V^2 + 39368 D V U^2 \\ & - 4160 V^2 D U + 16896 D^2 + 12776 D V U + 45216 D V^2 U^2. \end{aligned}$$

И наконец, подставив в это уравнение выражение (1.36) для V , приходим к соотношению

$$\frac{1250\Upsilon(D, U)}{(80D^2 + 12D - 17)^2} = 0, \quad (1.51)$$

в котором

$$\begin{aligned} \Upsilon(D, U) = & 68 + 165 D + 42 U - 785 D^3 - 1280 D^7 - 196 U^3 - 640 D^2 - 262 D^2 U \\ & - 4072 D^3 U^2 + 6512 D^2 U^3 - 2280 D U^4 + 1528 D U + 1496 D^4 \\ & + 1360 D^5 + 324 U^2 - 816 U^4 - 384 D^6 + 911 D U^2 - 28160 D^6 U^3 \\ & - 58752 D^5 U^3 - 14080 D^7 U^2 - 34944 D^6 U^2 - 15360 D^7 U - 7168 D^6 U \\ & - 29376 D^4 U^4 + 10752 D^2 U^4 + 22784 D^3 U^3 + 18960 D^3 U^4 \\ & + 12352 D^4 U^2 - 12256 D^4 U^3 + 20928 D^5 U + 2576 D^5 U^2 \\ & - 42240 D^5 U^4 - 1192 D^2 U^2 + 3008 D^4 U - 10216 D^3 U - 2432 U^3 D. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Результант полиномов F, Υ по переменной U (см. (1.49), (1.52)) имеет вид

$$2048H(D)(1 - D)(80D^2 + 12D - 17)^3,$$

где полином H определен формулой (1.2). Возьмем в качестве D тринадцатый вещественный корень полинома H (см. (1.5)), т.е. положим $D = d$. Заметим, что полином $F(d, U)$ совпадает с полиномом $G(U)$, определенным формулой (1.7). Полином $\Upsilon(d, U)$ обозначим через $T(U)$. Таким образом, имеем

$$G(U) = F(d, U), \quad T(U) = \Upsilon(d, U).$$

По построению результат полиномов G и T равен нулю, поэтому у этих полиномов имеется, по крайней мере, один общий корень. Выше (см. (1.7), (1.8)) говорилось, что полином G имеет два комплексных корня $\xi_{1,2} = -0.2486667705 \dots \pm i 0.0422341143 \dots$ и один вещественный корень $\xi = -1.3689346636 \dots$. Поскольку

$$T(\xi_{1,2}) = 3.2260630885 \dots \pm i 0.001371204116 \dots \neq 0,$$

то в силу сказанного выше выполняется равенство $T(\xi) = 0$. Таким образом, учитывая, что $80d^2 + 12d - 17 = 8.3158642123 \dots \neq 0$, получаем, что пара

$$D = d, \quad U = \xi$$

является одним из решений системы двух уравнений (1.48), (1.51) с двумя неизвестными. В этом случае в силу формул (1.35), (1.36), (1.42), (1.9)–(1.12) имеем

$$V = \eta, \quad W = \zeta, \quad Q = q, \quad R = r.$$

Кроме того, полином (1.30) совпадает с полиномом (1.17), поэтому

$$A = a, \quad B = b, \quad C = c.$$

Отсюда также следует, что функция ψ , заданная формулой (1.43), и функция f^* , определенная равенством (1.13), совпадают.

Из формул (1.38), (1.39) вытекает, что коэффициенты $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ функционала $\mathcal{L}$ (см. (1.29)) совпадают с коэффициентами (1.22)–(1.25) функционала L , определенного в (1.21). Следовательно, формула (1.28) с учетом (1.40) примет вид

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1-t^2} dt = L(f) - \sum_{\nu=6}^8 L(R_\nu) f_\nu. \quad (1.53)$$

На данном этапе рассуждений можно утверждать, что формула (1.53) выполняется на многочленах, определенных формулами (1.31), (1.34), (1.37) при выбранных D, U, V, W, A, B, C , а также на многочленах R_6, R_7, R_8 и $\psi = f^*$. Указанные десять многочленов образуют базис в множестве $\mathcal{P}_9$ многочленов степени не выше девяти. Поэтому квадратурная формула (1.53) выполняется для любого многочлена из $\mathcal{P}_9$. Из нее, в частности, следует, что $L(1) = 1$ и $L(R_\nu) = 0$ при $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9$, т.е. имеет место (1.26).

Очевидно, формулу (1.53) можно распространить на весь класс функций Φ_4 , если записать ее в форме (1.20)–(1.25). Нам осталось проверить неравенства (1.27). Для обоснования этих неравенств воспользуемся следующими двумя свойствами многочленов Чебышева второго рода:

- 1) $R_\nu(1) = 1, \nu \geq 0$;
- 2) многочлены R_ν на интервале $(-1, 1)$ поточечно стремятся к нулю при $\nu \rightarrow \infty$.

Как следствие этих свойств имеем $L(R_\nu) \rightarrow 1/25 > 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, в силу чего неравенства (1.27) нужно проверить лишь для конечного числа индексов ν . Подробнее, воспользовавшись формулой (1.1), получим

$$L(R_\nu) = \frac{1}{25} + \lambda(d) \frac{\sin(\nu+1)\theta_0}{(\nu+1)\sin\theta_0} + \lambda(a) \frac{\sin(\nu+1)\theta_1}{(\nu+1)\sin\theta_1} + \lambda(b) \frac{\sin(\nu+1)\theta_2}{(\nu+1)\sin\theta_2} + \lambda(c) \frac{\sin(\nu+1)\theta_3}{(\nu+1)\sin\theta_3},$$

где

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \arccos d = 1.0558191061\dots, & \theta_1 &= \arccos a = 2.5508429904\dots, \\ \theta_2 &= \arccos b = 1.9778305716\dots, & \theta_3 &= \arccos c = 1.7138069835\dots\end{aligned}$$

Поэтому для любого $\nu \geq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}L(R_\nu) &\geq \frac{1}{25} - \frac{\lambda(d) + \lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c)}{\nu+1} \max\left\{\frac{1}{\sin\theta_0}, \frac{1}{\sin\theta_1}, \frac{1}{\sin\theta_2}, \frac{1}{\sin\theta_3}\right\} \\ &= \frac{1}{25} \left(1 - \frac{24}{(\nu+1)\sin\theta_1}\right).\end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что $L(R_\nu) > 0$ при $\nu \geq 43$. Для $\nu \leq 42$ условия (1.27) проверяются непосредственными вычислениями. Лемма 1.1 доказана.

В следующей лемме изучаются свойства функции f^* , описанной соотношениями (1.5), (1.7)–(1.14).

ЛЕММА 1.2. *Функция f^* принадлежит множеству $\mathcal{F}_4(d)$, и для нее имеет место равенство $f^*(1) = 25f_0^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем коэффициенты Фурье f_k^* многочлена (1.13) в его разложении (1.14) по многочленам $R_k = R_k^{1/2, 1/2}$ Чебышева второго рода. Для этого удобно воспользоваться формулой (1.32). В результате получим для коэффициентов разложения такие выражения:

$$\begin{aligned}f_9^* &= \frac{5}{256}, & f_8^* &= f_7^* = f_6^* = 0, \\ f_5^* &= \frac{9}{16}\eta + \frac{9}{32}r + \frac{3}{8}\zeta\xi + \frac{3}{16}\eta^2 + \frac{9}{32}\xi^2 + \frac{9}{16}d\xi + \frac{3}{8}d\zeta + \frac{81}{256} - \frac{9}{32}qd - \frac{9}{16}q\xi + \frac{3}{8}d\eta\xi \\ &\quad - \frac{3}{8}q\eta\xi - \frac{3}{8}qd\eta - \frac{3}{16}qd\xi^2 + \frac{3}{8}rd\xi - \frac{3}{8}q\zeta + \frac{3}{8}r\eta + \frac{3}{16}r\xi^2 = 0.1006597630\dots, \\ f_4^* &= -\frac{25}{64}d - \frac{25}{32}\xi - \frac{25}{32}\zeta + \frac{25}{64}q - \frac{5}{16}rd\xi^2 - \frac{5}{8}rd\eta - \frac{5}{8}r\eta\xi + \frac{5}{8}qd\zeta + \frac{5}{8}q\zeta\xi - \frac{25}{32}\eta\xi \\ &\quad - \frac{25}{32}d\eta - \frac{5}{8}w\eta - \frac{5}{8}r\zeta + \frac{5}{8}qd\eta\xi + \frac{5}{16}q\eta^2 - \frac{5}{16}d\eta^2 - \frac{5}{8}d\zeta\xi + \frac{25}{32}qd\xi - \frac{25}{64}d\xi^2 \\ &\quad + \frac{25}{32}q\eta + \frac{25}{64}q\xi^2 - \frac{25}{64}rd - \frac{25}{32}r\xi = 0.2220776796\dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3^* &= \frac{7}{8}\eta + \frac{7}{16}r + d\zeta\eta + \frac{3}{8} + \zeta\xi + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{7}{16}\xi^2 + \frac{7}{8}d\xi + d\zeta - \frac{7}{16}qd - \frac{7}{8}q\xi \\
&\quad + r d\eta\xi - \frac{1}{2}q d\eta^2 - q\zeta\eta + r\zeta\xi + r d\zeta - q d\zeta\xi + \frac{1}{2}r\eta^2 + d\eta\xi - q\eta\xi - q d\eta \\
&\quad - \frac{1}{2}q d\xi^2 + r d\xi - q\zeta + r\eta + \frac{1}{2}r\xi^2 = 0.3133127365\dots, \\
f_2^* &= -\frac{21}{64}d - \frac{21}{32}\xi - \frac{27}{32}\zeta + \frac{21}{64}q - \frac{3}{2}r\zeta\eta - \frac{3}{4}r d\eta^2 - \frac{9}{16}r d\xi^2 - \frac{9}{8}r d\eta - \frac{9}{8}r\eta\xi + \frac{9}{8}q d\zeta \\
&\quad + \frac{9}{8}q\zeta\xi - \frac{27}{32}\eta\xi + \frac{3}{4}q\zeta^2 - \frac{27}{32}d\eta - \frac{9}{8}\zeta\eta - \frac{9}{8}r\zeta + \frac{9}{8}q d\eta\xi + \frac{9}{16}q\eta^2 - \frac{9}{16}d\eta^2 - \frac{9}{8}d\zeta\xi \\
&\quad - \frac{3}{2}r d\zeta\xi + \frac{3}{2}q d\zeta\eta - \frac{3}{4}d\zeta^2 + \frac{27}{32}q d\eta - \frac{27}{64}d\xi^2 + \frac{27}{32}q\eta + \frac{27}{64}q\xi^2 - \frac{27}{64}r d - \frac{27}{32}r\xi \\
&= 0.2749299247\dots, \\
f_1^* &= \frac{7}{16}\eta + \frac{7}{32}r - d\zeta^2 q + d\zeta\eta + \frac{5}{8}\zeta\xi + \frac{5}{16}\eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{7}{32}\xi^2 + \frac{7}{16}d\xi + \frac{5}{8}d\zeta + \frac{21}{128} \\
&\quad - \frac{7}{32}qd - \frac{7}{16}q\xi + r d\eta\xi - \frac{1}{2}q d\eta^2 - q\zeta\eta + r\zeta\xi + r d\zeta - q d\zeta\xi + \frac{1}{2}r\eta^2 + 2r d\zeta\eta + r\zeta^2 \\
&\quad + \frac{5}{8}d\eta\xi - \frac{5}{8}q\eta\xi - \frac{5}{8}q d\eta - \frac{5}{16}q d\xi^2 + \frac{5}{8}r d\xi - \frac{5}{8}q\zeta + \frac{5}{8}r\eta + \frac{5}{16}r\xi^2 \\
&= 0.1637887936\dots, \\
f_0^* &= -\frac{7}{128}d - \frac{7}{64}u - \frac{5}{32}\zeta + \frac{7}{128}q - \frac{1}{2}r\zeta\eta - \frac{1}{4}r d\eta^2 - \frac{1}{8}r d\xi^2 - \frac{1}{4}r d\eta - \frac{1}{4}r\eta\xi + \frac{1}{4}q d\zeta \\
&\quad + \frac{1}{4}q\zeta\xi - \frac{5}{32}\eta\xi + \frac{1}{4}q\zeta^2 - \frac{5}{32}d\eta - d\zeta^2 r - \frac{1}{4}\zeta\eta - \frac{1}{4}r\zeta + \frac{1}{4}q d\eta\xi + \frac{1}{8}q\eta^2 - \frac{1}{8}d\eta^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}d\zeta\xi - \frac{1}{2}r d\zeta\xi + \frac{1}{2}q d\zeta\eta - \frac{1}{4}d\zeta^2 + \frac{5}{32}q d\xi - \frac{5}{64}d\xi^2 + \frac{5}{32}q\eta + \frac{5}{64}q\xi^2 - \frac{5}{64}r d - \frac{5}{32}r\xi \\
&= 0.0455958394\dots
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Многочлен f^* неположителен на отрезке $[-1, d]$, ибо последний множитель $(t^2 + qt + r)$ в его представлении (1.13) имеет положительный минимум на всей действительной оси: $r - (q/2)^2 = 0.248498575\dots > 0$. Кроме того, из формул (1.54), следует, что все его коэффициенты f_k^* в разложении (1.14) неотрицательны и $f_0^* > 0$. Согласно определению (0.4)–(0.6) полином f^* принадлежит множеству $\mathcal{F}_4(d)$.

В силу (1.13), (1.17), (1.18) и (1.54) для функции f^* выполняются свойства

$$f^*(d) = f^*(a) = f^*(b) = f^*(c) = f_6^* = f_7^* = f_8^* = 0.$$

Поэтому на функции f^* формула (1.20) превращается в равенство $f_0^* = f^*(1)/25$. Лемма доказана.

Следующая лемма позволит показать, что f^* является единственной (с точностью до постоянного положительного множителя) экстремальной функцией задачи $w_4(d)$.

ЛЕММА 1.3. *Допустим, что f есть полином (не выше) девятой степени со свойствами:*

1) для f справедливо представление

$$f(t) = h(t)g(t), \tag{1.55}$$

где $h(t) = (t-d)(t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2 = (t-d)(t^3 - \xi t^2 + \eta t - \zeta)^2$, а g есть некоторый полином второй степени;

2) в разложении

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^9 f_{\nu} R_{\nu}(t) \quad (1.56)$$

полинома f по многочленам Чебышева второго рода равны нулю хотя бы два из трех (в частности, все три) коэффициента f_6, f_7, f_8 .

Тогда полином f с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией (полиномом) f^* , т.е. $f = C f^*$, где $C = \text{const}$; при этом если $f \in \mathcal{F}_4(d)$, то $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проведем в несколько этапов.

1) Допустим вначале, что полином g в представлении (1.55) имеет вид

$$g(t) = t^2 + Qt + R \quad (1.57)$$

с некоторыми вещественными коэффициентами Q, R . Выпишем явные выражения коэффициентов f_6, f_7 и f_8 в представлении (1.56) полинома f . Нетрудно убедиться, что

$$f(t) = t^9 + A_8 t^8 + A_7 t^7 + A_6 t^6 + \vartheta(t), \quad (1.58)$$

где

$$\begin{aligned} A_8 &= Q - d - 2\xi, & A_7 &= 2d\xi + R + 2\eta - dQ - 2\xi Q + \xi^2, \\ A_6 &= -d\xi^2 - 2\zeta + \xi^2 Q + 2\eta Q - 2\xi R + 2d\xi Q - 2\xi\eta - 2d\eta - dR \end{aligned}$$

и, наконец, ϑ есть некоторый многочлен пятой степени. Подставляя в (1.58) представления (1.32) степеней t^9, t^8, t^7, t^6 через многочлены Чебышева второго рода, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_6 &= -\frac{49}{128} \xi - \frac{49}{256} d - \frac{7}{32} \zeta + \frac{49}{256} Q + \frac{7}{32} d\xi Q + \frac{7}{64} \xi^2 Q \\ &\quad - \frac{7}{64} d\xi^2 - \frac{7}{64} dR - \frac{7}{32} d\eta + \frac{7}{32} \eta Q - \frac{7}{32} \xi R - \frac{7}{32} \xi \eta, \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$f_7 = \frac{1}{16} R + \frac{1}{8} \eta + \frac{1}{16} \xi^2 - \frac{1}{8} \xi Q - \frac{1}{16} dQ + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} d\xi, \quad (1.60)$$

$$f_8 = -\frac{9}{256} d + \frac{9}{256} Q - \frac{9}{128} \xi. \quad (1.61)$$

Налагая на функцию f любые два из трех условий $f_6 = 0, f_7 = 0, f_8 = 0$, т.е. приравнявая правые части любых двух из трех соотношений (1.59)–(1.61) к нулю, получаем систему

$$f_{\nu} = 0, \quad f_{\mu} = 0, \quad 6 \leq \nu < \mu \leq 8, \quad (1.62)$$

двух линейных уравнений относительно двух неизвестных Q и R . Во всех трех возможных случаях определитель этой системы $\Delta_{\nu, \mu}$ отличен от нуля. Например, для системы

$f_7 = 0$, $f_8 = 0$ ее определитель $\Delta_{7,8}$ равен $-9/4096$; на самом деле, для нас важно, что $\Delta_{7,8} \neq 0$.

Таким образом, любая система двух условий (1.62) имеет единственное решение Q, R . В силу (1.13) функция f^* имеет представление (1.55)+(1.57), и согласно (1.54) для нее выполняются условия (1.62). Отсюда следует, что $Q = q$ и $R = r$. Следовательно, $f = f^*$ есть единственная функция, удовлетворяющая условиям (1.55), (1.57) и (1.62).

2) Предположим, что в представлении (1.55) функции f многочлен g имеет вид $g(t) = Ct^2 + Qt + R$ и при этом $C \neq 0$. Тогда функция $f_C = f/C$ удовлетворяет всем условиям леммы и в ее представлении (1.55) второй множитель имеет вид (1.57). Отсюда, как мы только что показали, следует, что $f/C = f^*$ или, то же самое, $f = Cf^*$. Ясно, что если $f \in \mathcal{F}_4(d)$, то $C > 0$.

3) Наконец покажем, что если для функции f выполняются условия леммы и в соотношении (1.55) второй множитель имеет вид $g(t) = Qt + R$, то $f \equiv 0$. Действительно, функция $\tilde{f} = f^* + f$ удовлетворяет всем предположениям леммы. Для этой функции справедлива формула $\tilde{f} = h\tilde{g}$, в которой $\tilde{g}$ есть многочлен второй степени $\tilde{g}(t) = t^2 + \tilde{Q}t + \tilde{R}$ с коэффициентами $\tilde{Q} = q + Q$, $\tilde{R} = r + R$. Многочлен $\tilde{g}$ имеет вид (1.57). Отсюда, как уже доказано, следует, что $\tilde{f} = f^*$, а потому $f \equiv 0$. Лемма 1.3 доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. В силу леммы 1.2 функция f^* , определенная соотношением (1.13), принадлежит множеству $\mathcal{F}_4(d)$ и для нее имеет место равенство $f^*(1) = 25f_0^*$. Поэтому справедлива оценка

$$w_4(d) \leq \frac{f^*(1)}{f_0^*} = 25.$$

Докажем обратное неравенство

$$w_4(d) \geq 25. \quad (1.63)$$

Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_4(d)$ справедлива квадратурная формула (1.20), (1.21). Коэффициенты $1/25$, $\lambda(d)$, $\lambda(a)$, $\lambda(b)$, $\lambda(c)$ этой формулы положительные, а коэффициенты $L(R_\nu)$, $\nu \geq 1$, неотрицательные (точнее, $L(R_\nu) > 0$, $\nu \geq 6$, $\nu \neq 9$ и $L(R_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9$). В силу свойств (0.4)–(0.6) функции $f \in \mathcal{F}_4(d)$ отсюда следует оценка

$$f_0 = L(f) - \sum_{\nu \geq 1} L(R_\nu) f_\nu \leq \frac{1}{25} f(1), \quad (1.64)$$

которая влечет неравенство (1.63). Тем самым, обосновано утверждение (1.15); в частности, доказано, что функция f^* является экстремальной в задаче $w_4(d)$.

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось проверить, что (с точностью до положительного множителя) функция f^* является единственной экстремальной. Функция

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(t) \in \mathcal{F}_4(d) \quad (1.65)$$

является экстремальной в том и только том случае, если на ней неравенство (1.64) обращается в равенство. В силу свойства (1.27) для этого необходимо, чтобы в представлении (1.65) экстремальной функции f коэффициенты f_ν с номерами $\nu \neq 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9$

были равны нулю; в частности, это означает, что функция f есть полином не выше девятой степени. Кроме того, должно выполняться равенство $L(f) = f(1)/25$, которое эквивалентно тому, что

$$f(d) = f(a) = f(b) = f(c) = 0.$$

Таким образом, точка d должна быть по крайней мере простым, а точки a, b и c – двойными нулями полинома f . Следовательно, f имеет вид $f(t) = h(t)g(t)$, где $h(t) = (t-d) \times (t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2$, а g – некоторый многочлен второй степени. Отсюда в силу леммы 1.3 следует, что $f = Cf^*$, где C – некоторая положительная константа. Теорема 1.2 доказана.

ЛЕММА 1.4. *Для функции $w_4(s)$, определенной формулой (0.7), справедливы следующие два утверждения: $w_4(s) < w_4(d)$ при $-1 \leq s < d$, $w_4(s) > w_4(d)$ при $d < s < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен $g(t) = 20t + 1 = 20R_1(t) + R_0(t)$. С помощью многочленов f^*, g и числа ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, определим многочлен (девятой степени)

$$F(t) = F(\varepsilon, t) = \varepsilon \frac{f^*(t)}{f_0} + (1 - \varepsilon)g(t).$$

Нуль $\tilde{s} = -0.05$ многочлена g лежит между точками s и d (см. (1.18), (1.5)), причем многочлен g на полуинтервалах $[-1, \tilde{s}]$ и $(\tilde{s}, d]$ соответственно отрицательный и положительный. Поэтому при любом ε , $0 < \varepsilon < 1$, полином F на отрезке $[-1, \tilde{s}]$ отрицательный. Далее, поскольку, $F(\tilde{s}) < 0$, $F(d) > 0$, то многочлен F имеет на интервале $(\tilde{s}, d)$ нуль; наименьший из них обозначим через $s(\varepsilon)$. Естественно положить $s(0) = \tilde{s} = -0.05$, $s(1) = d$. Для $t \in [\tilde{s}, d]$ функция $F(\varepsilon, t)$ по переменному $\varepsilon \in [0, 1]$ убывает, поэтому функция $s(\varepsilon)$ возрастает (от значения $s(0) = \tilde{s}$ до значения $s(1) = d$). Нетрудно понять, что функция $s(\varepsilon)$ непрерывна на отрезке $\varepsilon \in [0, 1]$.

Полином $F(t) = F(\varepsilon, t)$ удовлетворяет условию $F(t) \leq 0$, $-1 \leq t \leq s(\varepsilon)$. Кроме того, коэффициенты Фурье F_k , $0 \leq k \leq 9$, в разложении F по многочленам Чебышева второго рода, очевидно, неотрицательные и $F_0 = 1$. Следовательно, F принадлежит классу $\mathcal{F}_4(s(\varepsilon))$. Поэтому при $0 \leq \varepsilon < 1$ имеет место оценка $w_4(s(\varepsilon)) \leq F(1) = 25\varepsilon + (1 - \varepsilon)g(1) = 25\varepsilon + (1 - \varepsilon)21 < 25 = w_4(d)$. Отсюда следует, что $w_4(s) < 25 = w_4(d)$ для $s \in [\tilde{s}, d)$. Функция $w_4(s)$ по переменному $s \in [-1, 1)$ не убывает, а потому $w_4(s) < 25 = w_4(d)$ при всех $s \in [-1, d)$.

Пусть теперь $s > d$. Нам нужно доказать, что $w_4(s) > w_4(d) = 25$. Будем рассуждать от противного. Допустим, что $w_4(s) \leq w_4(d)$, а значит, на самом деле, $w_4(s) = w_4(d) = 25$. В силу теоремы 2.1 работы [8] в задаче $w_4(s)$ существует экстремальная функция; обозначим ее символом f^s . Поскольку $s > d$ и $w_4(s) = w_4(d)$, то функция f^s будет являться экстремальной и в задаче $w_4(d)$. Согласно теореме 1.2 в задаче $w_4(d)$ экстремальная функция единственная (с точностью до положительного постоянного множителя) и, значит, $f^s = Cf^*$, $C > 0$. Однако, если $t \in (d, s]$, то $f^*(t) > 0$, а $f^s(t) \leq 0$, что противоречиво. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Теорема 1.1 есть следствие теоремы 1.2 и леммы 1.4.

2. Вычисление значения $s_4(24)$. Определим многочлен

$$\begin{aligned}
h(z) = & 6068404224 z^{24} - 5559746560 z^{23} - 32435331072 z^{22} + 30162632704 z^{21} \\
& + 76657888256 z^{20} - 69950994432 z^{19} - 105547058176 z^{18} + 90905438208 z^{17} \\
& + 93805633312 z^{16} - 72899067584 z^{15} - 56276296952 z^{14} + 37463407248 z^{13} \\
& + 23144486195 z^{12} - 12425086062 z^{11} - 6505367271 z^{10} + 2613609108 z^9 \\
& + 1227229561 z^8 - 331172622 z^7 - 149222121 z^6 + 22205608 z^5 \\
& + 10721860 z^4 - 490544 z^3 - 368104 z^2 - 10880 z + 2432.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

По выше примененной схеме можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *На полуинтервале $[-1, 1)$ уравнение $w_4(s) = 24$ имеет единственное решение $s = x_{12}$, где $x_{12} = 0.4785451836 \dots$ есть двенадцатый (по возрастанию) вещественный корень полинома (2.1).*

Обоснование этой теоремы базируется на приводимых ниже трех утверждениях. В формулировке этих утверждений используются обозначения: $d = x_{12} = 0.4785451836 \dots$ есть двенадцатый (по возрастанию) вещественный корень полинома h , заданного формулой (2.1); $u = -1.5458619083 \dots$ есть единственный вещественный корень многочлена

$$\begin{aligned}
G(z) = & (3040 d^5 + 2304 d^4 - 1264 d^3 - 832 d^2 + 144 d + 64) z^3 \\
& + (3040 d^6 + 2784 d^5 - 416 d^4 - 720 d^3 - 120 d^2 + 32 d + 8) z^2 \\
& + (3040 d^7 + 2304 d^6 - 4184 d^5 - 2464 d^4 + 1732 d^3 + 704 d^2 - 204 d - 64) z \\
& + 1824 d^7 + 288 d^6 - 2856 d^5 - 753 d^4 + 1050 d^3 + 255 d^2 - 108 d - 24, \\
v = & \frac{6d - 3 + 15d^2 + 7du - u + 6d^2u}{2(4 - 19d^2 - 3d)} = 0.6856630844 \dots, \\
w = & \frac{du + v - u - d - 3dv}{3 - 7d} = -0.082479688 \dots, \\
q = & \frac{8vu + 16du^2 + 8d^2u + d + 2u + 8u^3 - 8w}{8du - 8v + 12u^2 + 4d^2 - 7} = -2.1915353439 \dots, \\
r = & \frac{14 + 30v + 16v^2 - 16wu - 13u^2 + 8duv + 4u^4}{8du - 8v + 12u^2 + 4d^2 - 7} \\
& + \frac{8du^3 + 12d^2u^2 - 8vd^2 - 8dw + 2du - 7d^2}{8du - 8v + 12u^2 + 4d^2 - 7} = 1.4453876673 \dots,
\end{aligned}$$

и, наконец,

$$a = -0.8602964888 \dots, \quad b = -0.4898419662 \dots, \quad c = -0.1957234532 \dots$$

есть корни многочлена $z^3 - uz^2 + vz - w$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Функция*

$$f^*(t) = (t - d)(t^3 - ut^2 + vt - w)^2(t^2 + qt + r) \tag{2.2}$$

принадлежит множеству $\mathcal{F}_4(d)$ и является единственной (с точностью до положительного постоянного множителя) экстремальной функцией (решением) задачи (0.7) при $m = 4$, $s = d$. Помимо того, справедливы равенства

$$w_4(d) = \frac{f^*(1)}{f_0^*} = 24.$$

При доказательстве этой теоремы используются следующие два утверждения.

ЛЕММА 2.1. Функция f^* , определенная формулой (2.2), принадлежит множеству $\mathcal{F}_4(d)$. Точнее, функция f^* имеет неотрицательные коэффициенты в ее разложении $f^*(t) = \sum_{k=0}^9 f_k^* R_k(t)$ по многочленам Чебышева второго рода, причем

$$f_k^* > 0 \quad \text{при } 0 \leq k \leq 9, k \neq 6, 7, \quad f_6^* = f_7^* = 0.$$

Кроме того, $f^*(t) \leq 0$ при $t \in [-1, d]$, $f^*(t) > 0$ при $t \in (d, 1]$.

ЛЕММА 2.2. Для каждой функции $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t) \in \Phi_4$ имеет место квадратная формула

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1-t^2} dt = L(f) - \sum_{\nu \geq 1} L(R_\nu) f_\nu,$$

в которой L есть функционал

$$L(f) = \frac{1}{24} f(1) + \lambda(a) f(a) + \lambda(b) f(b) + \lambda(c) f(c) + \lambda(d) f(d)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \lambda(a) = \Lambda(a, b, c, d) &= 0.0996029075 \dots, & \lambda(b) = \Lambda(b, c, d, a) &= 0.1465314359 \dots, \\ \lambda(c) = \Lambda(c, d, a, b) &= 0.3337257176 \dots, & \lambda(d) = \Lambda(d, a, b, c) &= 0.3784732721 \dots, \end{aligned}$$

где функция Λ определена формулой (1.19). Кроме того, функционал L обладает свойствами

$$\begin{aligned} L(1) &= 1, & L(R_\nu) &= 0 \quad \text{при } \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, \\ L(R_\nu) &> 0 \quad \text{при } \nu \geq 6, \nu \neq 8, 9. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mackay A. L. The packing of three-dimensional spheres on surface of a four-dimensional hypersphere // J. Phys. A: Math. Gen. 1980. V. 13. P. 3373–3379.
- [2] Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
- [3] Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. of Combin. Theory Ser. A. 1979. V. 26. № 2. P. 210–214.
- [4] Delsarte Ph. Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. V. 27. P. 272–289.
- [5] Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.
- [6] Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. Spherical codes and designs // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.
- [7] Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14. № 1. С. 3–25.
- [8] Арестов В. В., Бабенко А. Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
- [9] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
- [10] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups (Second Edition). New York: Springer Verlag, 1993.
- [11] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups (Third Edition). New York: Springer Verlag, 1998.
- [12] Rankin R. A. The closest packing of spherical caps in n dimensions // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1955. V. 2. P. 139–144.
- [13] Левенштейн В. И. О границах для упаковок в n -мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303.
- [14] Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16. № 3. С. 17–30.
- [15] Bannai E., Sloane N. J. A. Uniqueness of certain spherical codes // Canad. J. Math. 1981. V. 33. P. 437–449.
- [16] Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 44–110.
- [17] Юдин В. А. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная матем. 1992. Т. 4. № 2. С. 115–121.
- [18] Boyvalenkov P. Extremal polynomials for obtaining bounds for spherical codes and designs // Discrete Comput. Geom. 1995. V. 14. P. 167–183.
- [19] Boyvalenkov P. G., Danev D. P., Bumova S. P. Upper bounds on the minimum distance of spherical codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1996. V. 42. № 5. P. 1576–1581.
- [20] Boyvalenkov P. On the upper bounds for the kissing numbers // Serdica. 1992. V. 18. P. 278–285.
- [21] Boyvalenkov P. On the extremality of the polynomials used for obtaining the best known upper bounds for the kissing numbers // J. Geom. 1994. V. 49. P. 67–71.
- [22] Hardin R. H., Sloane N. J. A., Smith W. D. Spherical codes // <http://www.research.att.com/~njas/packings/index.html>.
- [23] Галиев Ш. И. Многократные упаковки и покрытия сферы // Дискретная матем. 1996. Т. 8. № 3. С. 148–160.
- [24] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.

(В. В. Арестов) Уральский государственный университет, г. Екатеринбург
(А. Г. Бабенко) Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: Vitalii.Arestov@usu.ru,
Alexander.Babenko@imm.uran.ru

Поступило
02.08.1999
Исправленный вариант
01.03.2000