Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Дубосарский, Аналитические всплески в много-
связной области с круговыми границами, *Матем. за-
метки*, 2014, том 95, выпуск 3, 400–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:39:02

Аналитические всплески в многосвязной области с круговыми границами

Г. А. Дубосарский

В работе на основе базиса всплесков пространства Харди аналитических в круге функций построены базисы всплесков в пространствах типа Харди функций, аналитических в области с круговыми границами. Также получена оценка скорости сходимости частичных сумм построенных всплесков.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm9691

1. Введение. В статье [1] был построен базис пространства аналитических в единичном круге и непрерывных в его замыкании функций с помощью системы Франклина. В статьях [2] и [3] были построены базисы пространств аналитических в единичном круге функций, имеющих n непрерывных производных в его замыкании. В работах [4]–[7] были построены базисы пространств типа Харди аналитических и гармонических функций в круге и кольце на основе всплесков Мейера.

В данной работе (как в [8], [9]) мы будем использовать неотрицательную четную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$, которая удовлетворяет требованиям:

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\omega) &\equiv 1 \quad \text{при} \quad |\omega| \leq \frac{1-\varepsilon}{2}, \\ \widehat{\varphi}(\omega) &\equiv 0 \quad \text{при} \quad |\omega| \geq \frac{1+\varepsilon}{2}, \\ \widehat{\varphi}^2\left(\omega + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} &\text{ нечетна при } |\omega| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{3},\end{aligned}$$

и неотрицательную функцию $\widehat{\theta}(\omega)$, определяемую соотношением

$$\widehat{\theta}^2(\omega) = \widehat{\varphi}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \widehat{\varphi}^2(\omega).$$

Заметим, что $\text{supp } \widehat{\theta}(\omega) \subseteq \{\omega \in \mathbb{R} : (1-\varepsilon)/2 < |\omega| < 1+\varepsilon\}$ и $\widehat{\theta}(\omega)$ – четная и дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00004) и проекта 2012 г. поддержки молодых ученых и аспирантов “Гармонические и аналитические всплески”.

На основе 2π -периодических всплесков в работах [4], [5] были построены базисы пространств типа Харди $h_p(K)$ и $H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$, гармонических и аналитических функций в единичном круге $K = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости.

Кроме того, в работах [4], [5] построены базисы пространств гармонических и аналитических функций в кольце с центральным отверстием, которые с помощью конформного отображения переносятся на случай нецентрального кольца.

Обозначим через $\tilde{K} = \tilde{K}(z_1, r_1, z_2, r_2, \dots, z_m, r_m)$ область комплексной плоскости, ограниченную окружностями $C_1(0), C_{r_1}(z_1), C_{r_2}(z_2), \dots, C_{r_m}(z_m)$, с центрами в точках $0, z_1, z_2, \dots, z_m$ и радиусами $1, r_1, r_2, \dots, r_m$, где $|z_k| + r_k < 1$, $k = 1, \dots, m$ и $|z_k - z_l| > r_k + r_l$, $k \neq l$. Будем дальше называть $\tilde{K}$ *обобщенным кольцом*. Также везде мы будем использовать обозначение $B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$.

В данной статье, используя идеи вышеназванных работ, мы построим базис пространств типа Харди аналитических функций в обобщенном кольце $\tilde{K}$ без применения конформного отображения. Это приводит к более простым базисным функциям и формулам для коэффициентов разложения по всплескам. За основу для построения всплесков возьмем базис из статьи [5]. Выпишем его для аналитических функций в явном виде:

$$\left\{ A_0(z) \equiv 1, A_n(z) = 2^{1-j/2} \sum_{\nu \in \mathbb{N}} z^\nu \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right) \sin \frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j} : \right. \\ \left. n = 2^{j-1} + k, j > 0, 0 \leq k < 2^{j-1} \right\}, \quad (1.1)$$

причем суммы в выражениях для базиса всплесков в силу ограниченности носителя функции $\hat{\theta}(\omega)$ конечны.

Напомним, что аналитическая функция $f(z)$ в круге K принадлежит классу Харди $H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$, если она удовлетворяет условию

$$\|f\|_p := \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty := \sup_{z \in K} |f(z)| < \infty \quad \text{при } p = \infty.$$

Известно [11], что у функции $f(z) \in H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$, существуют почти всюду на окружности $C_1(0)$ угловые значения $f(e^{ix}) \in L_p[0, 2\pi)$. Если функция $f(z) \in H_p(K)$ при $1 < p \leq \infty$, то она восстанавливается через свои граничные значения с помощью интеграла Пуассона:

$$f(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P(re^{i(x-t)}) dt, \quad (1.2)$$

где $P(re^{ix}) = (1 - r^2)/(1 - 2r \cos x + r^2)$.

Сохранив обозначения, сузим классы $H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$, как это сделано в статье [4]:

$$H_p(K) = \begin{cases} \{f(z) : f(z) \in H_1(K), f(z) \text{ удовлетворяет равенству (1.2)}\}, & p = 1, \\ H_p(K), & 1 < p < \infty, \\ \{f(z) : f(z) \text{ непрерывна в круге } \overline{K}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Введем пространства аналитических функций $H_p(\tilde{K})$, $1 \leq p \leq \infty$. Обозначим через ρ минимум из попарных расстояний между границами $\tilde{K}$ – окружностями $C_1(0), C_{r_1}(z_1), C_{r_2}(z_2), \dots, C_{r_m}(z_m)$. Условимся об обозначениях:

$$a_0(f)_p = \sup_{1-\rho < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p}, \quad (1.3)$$

$$a_l(f)_p = \sup_{r_l < r < r_l + \rho} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_l + re^{ix})|^p dx \right)^{1/p}, \quad l = 1, \dots, m.$$

При $1 \leq p < \infty$ будем считать, что функция $f(z) \in H_p(\tilde{K})$, если $f(z)$ аналитическая в $\tilde{K}$ и выполнено

$$\|f(z)\|_p = \max_{l=0, \dots, m} a_l(f)_p < \infty. \quad (1.4)$$

При этом условии функция $f(z)$ имеет граничные значения, определяемые по некасательным путям. При $p = \infty$ будем считать, что $f(z) \in H_\infty(\tilde{K})$, если она аналитическая в $\tilde{K}$ и непрерывна в $\tilde{K}$.

2. Базис пространств $H_p(\tilde{K})$, $1 \leq p \leq \infty$.

ЛЕММА 1. Пусть аналитическая функция $g_0(z)$ принадлежит классу $H_p(K)$, $1 \leq p < \infty$, и функция $\omega(z)$ аналитична в круге K и непрерывна в $\bar{K}$, $\omega(K) \subseteq K$. Тогда справедливо неравенство:

$$\int_0^{2\pi} |g_0(\omega(e^{ix}))|^p dx \leq \frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|} \int_0^{2\pi} |g_0(e^{ix})|^p dx. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2. Пусть аналитическая в области $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_k, r_k)}$ функция $g_k(z)$ такова, что функция $h_k(z) = g_k(z_k + r_k/z) \in H_p(K)$, $1 \leq p < \infty$. Функция $\omega(z)$ аналитична в круге K и непрерывна в $\bar{K}$, $\omega(K) \subseteq K$, $\{\omega(e^{ix}) : x \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$. Тогда выполняются следующие неравенства:

$$\int_0^{2\pi} |g_k(\omega(e^{ix}))|^p dx \leq \int_0^{2\pi} |g_k(z_k + r_k e^{ix})|^p dx, \quad \text{если } B_{r_k}(z_k) \subseteq \omega(K), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |g_k(\omega(e^{ix}))|^p dx \\ & \leq \frac{|\omega(0) - z_k| + r_k}{|\omega(0) - z_k| - r_k} \int_0^{2\pi} |g_k(z_k + r_k e^{ix})|^p dx, \quad \text{если } B_{r_k}(z_k) \not\subseteq \omega(K). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Докажем только лемму 2, так как обоснование леммы 1 содержит те же идеи. Идея рассуждений заимствована из теоремы Литтлвуда [10; с. 90–93].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_k(z)$ – гармоническое продолжение функции $|g_k(z)|^p$ с окружности $C_{r_k}(z_k)$ во внешность круга $\overline{B_{r_k}(z_k)}$ такое, что существует конечный предел $G_k(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} G_k(z)$. Тогда, в силу субгармоничности в области $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$ функции $|g_k(z)|^p$, выполняется неравенство $|g_k(\omega(e^{ix}))|^p \leq G_k(\omega(e^{ix}))$.

Докажем неравенство (2.3). Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} |g_k(\omega(e^{ix}))|^p dx \leq \int_0^{2\pi} G_k(\omega(e^{ix})) dx = 2\pi G_k(\omega(0)). \quad (2.4)$$

Введем гармоническую функцию $H_k(z) = G_k(z_k + r_k/z)$. По формуле Пуассона получаем

$$H_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_k(e^{ix}) P(ze^{-ix}) dx, \quad z \in K.$$

Откуда заключаем, что

$$G_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_k(z_k + r_k e^{ix}) P\left(\frac{r_k}{z - z_k} e^{ix}\right) dx. \quad (2.5)$$

Собирая вместе (2.4), (2.5) и используя то, что $P(z) \leq (1 + |z|)/(1 - |z|)$, выводим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |g_k(\omega(e^{ix}))|^p dx &\leq 2\pi G_k(\omega(0)) = \int_0^{2\pi} G_k(z_k + r_k e^{ix}) P\left(\frac{r_k}{\omega(0) - z_k} e^{ix}\right) dx \\ &\leq \frac{1 + r_k/|\omega(0) - z_k|}{1 - r_k/|\omega(0) - z_k|} \int_0^{2\pi} |g_k(z_k + r_k e^{ix})|^p dx \\ &= \frac{|\omega(0) - z_k| + r_k}{|\omega(0) - z_k| - r_k} \int_0^{2\pi} |g_k(z_k + r_k e^{ix})|^p dx. \end{aligned}$$

Неравенство (2.3) доказано.

Заметим, что многочлены образуют всюду плотное множество в пространстве $H_\infty(K)$. Поэтому мы можем считать, что в (2.2) $\omega(z)$ – многочлен. В этом случае выполнено условие $B_{r_k}(z_k) \subseteq \omega(K)$, в силу которого $G_k(\omega(z))$ гармонична вне K . Поэтому выполняется следующая цепочка:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |g_k(\omega(e^{ix}))|^p dx &\leq \int_0^{2\pi} G_k(\omega(e^{ix})) dx = 2\pi G_k(\omega(\infty)) \\ &= 2\pi G_k(\infty) = \int_0^{2\pi} G_k(z_k + r_k e^{ix}) dx = \int_0^{2\pi} |g_k(z_k + r_k e^{ix})|^p dx. \end{aligned}$$

Для доказательства последующих теорем нам потребуется специальное представление аналитической в $\tilde{K}$ функции. Доказательство этого представления аналогично доказательству теоремы о представлении аналитической функции в центральном кольце рядом Лорана.

ЛЕММА 3. *Функция $f(z)$ аналитична в обобщенном кольце $\tilde{K}$. Тогда функция $f(z)$ однозначно представима в виде*

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^m f_k(z), \quad (2.6)$$

где функция $f_0(z)$ аналитична в $B_1(0)$, функции $f_k(z)$ – в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $k = 1, \dots, m$, и выполнено условие $f_k(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, $k = 1, \dots, m$.

Если функция $f(z) \in H_p(\tilde{K})$, то функции $f_k(z)$, $k = 0, \dots, m$, в $\tilde{K}$ представимы через граничные значения $f(z)$ в виде

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \frac{1}{1 - ze^{-ix}} dx = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(0)} z^l, \quad (2.7)$$

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_k + r_k e^{ix}) \frac{r_k e^{ix}}{z - z_k - r_k e^{ix}} dx = \sum_{s=1}^{\infty} a_{-s}^{(k)} (z - z_k)^s, \quad (2.8)$$

где коэффициенты $a_s^{(k)}$ определяются по формулам:

$$a_s^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1(0)} \frac{f(z)}{z^{s+1}} dz, \quad s \geq 0, \quad (2.9)$$

$$a_{-s}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_k}(z_k)} f(z)(z - z_k)^{s-1} dz, \quad s > 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

Заметим, что аналитической в $\tilde{K}$ функции $f(z)$ мы можем сопоставить обобщенный ряд Лорана

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(0)} z^s + \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^{\infty} a_{-s}^{(k)} (z - z_k)^s \quad (2.11)$$

с коэффициентами $a_s^{(k)}$, определяемыми по формулам (2.9) и (2.10), сходящийся равномерно к функции $f(z)$ внутри $\tilde{K}$. Частичной суммой ряда (2.11) порядка N мы будем называть функцию

$$s_N(z; f) = \sum_{s=0}^{N-1} a_s^{(0)} z^s + \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^{N-1} a_{-s}^{(k)} (z - z_k)^s.$$

Введем с помощью (1.1) следующую систему аналитических функций:

$$\left\{ A_0(z) \equiv 1, A_n(z), A_{n,l}(z) = A_n\left(\frac{r_l}{z - z_l}\right) : l = 1, \dots, m, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.12)$$

В случае $m = 1, z_1 = 0$ в статье [5] были получены формулы для коэффициентов разложения по всплескам (2.12) с помощью построения биортогональной системы. В следующей теореме мы выведем более простые соотношения для коэффициентов, подобно тому как это было сделано в статье [7] для центрального кольца.

ТЕОРЕМА 1. Система функций (2.12) является базисом каждого пространства $H_p(\tilde{K})$, $1 \leq p \leq \infty$. Коэффициенты разложения

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^m \alpha_{n,l} A_{n,l}(z) \quad (2.13)$$

функции $f(z) \in H_p(\tilde{K})$, частичные суммы которого сходятся по норме $\|\cdot\|_p$, вычисляются через граничные значения функции по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \langle f(z), A_n(z) \rangle_0, & n \geq 0, \\ \alpha_{n,l} &= \langle f(z), A_{n,l}(z) \rangle_l, & n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \overline{g(e^{ix})} dx, \\ \langle f, g \rangle_l &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_l + r_l e^{ix}) \overline{g(z_l + r_l e^{ix})} dx, & l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $f(z) \in H_p(\tilde{K})$, аналогично тому, как это было сделано в [4] можно проверить, что функции $f_k(z)$, $k = 0, \dots, m$, из разложения леммы 3 удовлетворяют условиям $f_0(z), f_k(z_k + r_k/z) \in H_p(K)$, $k = 1, \dots, m$. Значит, существуют предельные угловые граничные значения функций $f_0(z)$ на окружности $C_1(0)$ и $f_k(z)$ на окружности $C_{r_k}(z_k)$, $k = 1, \dots, m$, принадлежащие классу L_p .

Идея доказательства теоремы заключается в том, чтобы свести проверку сходимости ряда (2.13) к функции $f(z)$ к проверке сходимости соответствующих частей ряда (2.13) к функциям $f_k(z)$, $k = 0, \dots, m$.

Нам будет целесообразно определить следующую билинейную форму для функций $f(z), h(z) \in H_p(\tilde{K})$, используя их разложения вида (2.6):

$$\begin{aligned} \langle f, h \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(e^{ix}) \overline{h_0(e^{ix})} dx \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(z_k + r_k e^{ix}) \overline{h_k(z_k + r_k e^{ix})} dx = \sum_{k=0}^m \langle f_k, h_k \rangle_k, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где под соответствующими интегралами стоят граничные значения функций $f_k(z)$ и $h_k(z)$, $k = 0, \dots, m$. Заметим, что в пространстве $H_2(\tilde{K})$ данная билинейная форма обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Функция $A_n(z)$ является аналитической в круге K , функции $A_{n,l}(z)$ – аналитические вне $B_{r_k}(z_k)$. В силу единственности в разложении (2.6), примененного к функциям $A_n(z)$, $A_{n,l}(z)$, соответствующие компоненты $(A_n(z))_k$, $(A_{n,l}(z))_k$, $k = 0, \dots, m$, очевидно удовлетворяют равенствам

$$(A_n(z))_0 = A_n, \quad (A_n(z))_k = 0, \quad k \neq 0, \quad (2.15)$$

$$(A_{n,l}(z))_l = A_{n,l}(z), \quad (A_{n,l}(z))_k = 0, \quad k \neq l. \quad (2.16)$$

Используя равенства (2.15), (2.16) и то, что система (1.1) является ортонормированной [5] относительно произведения

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \overline{g(e^{ix})} dx,$$

можно проверить (по аналогии с тем, как это было сделано в [4]), что система (2.12) является ортонормированной относительно произведения (2.14). Поэтому, если для функции справедливо представление (2.13), то

$$\alpha_n = \langle f, A_n \rangle, \quad \alpha_{n,l} = \langle f, A_{n,l} \rangle.$$

Однако, в силу (2.6) эти формулы, в отличие от формул из условия теоремы, содержат как правило неизвестные граничные значения функций $f_k(z)$, $k = 0, \dots, m$:

$$\langle f(z), A_n(z) \rangle = \langle f_0(z), A_n(z) \rangle_0, \quad \langle f(z), A_{n,l}(z) \rangle = \langle f_l(z), A_{n,l}(z) \rangle_l.$$

Проверим, что в предыдущих формулах можно заменить $f_k(z)$, $k = 0, \dots, m$, на $f(z)$, т.е. проверим равенства

$$\langle f(z), A_n(z) \rangle = \langle f(z), A_n(z) \rangle_0, \quad (2.17)$$

$$\langle f(z), A_{n,l}(z) \rangle = \langle f(z), A_{n,l}(z) \rangle_l. \quad (2.18)$$

Проверим соотношение (2.17). Из (2.6) следует, что для этого достаточно доказать, что $\langle f_k(z), A_n(z) \rangle_0 = 0$, $k = 1, \dots, m$. Используя вещественность коэффициентов при z^ν в (1.1), получаем

$$\begin{aligned} \langle f_k(z), A_n(z) \rangle_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(e^{ix}) \overline{A_n(e^{ix})} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(e^{ix}) A_n(e^{-ix}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_1(0)} f_k(z) A_n\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{iz} = -i \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{f_k(z) A_n\left(\frac{1}{z}\right)}{iz} = 0. \end{aligned}$$

Тождество (2.18) проверяется аналогично.

Таким образом, нам достаточно доказать равенство (2.13), если коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \langle f(z), A_n(z) \rangle, & n \geq 0, \\ \alpha_{n,l} &= \langle f(z), A_{n,l}(z) \rangle, & n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Обозначим через $S_N(z; f; \tilde{K})$ частичную сумму порядка N ряда (2.13):

$$S_N(z; f; \tilde{K}) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n A_n(z) + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^m \alpha_{n,l} A_{n,l}(z). \quad (2.19)$$

Введем еще функции $g_k(z) = f_k(z_k + r_k/z)$, определенные в области $B_1(0) \setminus \{0\}$. Поскольку существует предел $\lim_{z \rightarrow 0} g_k(z) = f_k(\infty) = 0$, функция $g(z)$, доопределенная в нуле значением 0, будет аналитической во всем круге $B_1(0)$.

Через $S_N(z; f_0; K)$ и $S_N(z; g_k(z); K)$, $k = 1, \dots, m$, мы будем обозначать частичные суммы порядка N разложений функций $f_0(z)$ и $g_k(z)$ по системе (1.1):

$$\begin{aligned} S_N(z; f_0; K) &= \sum_{n=0}^{N-1} (f_0, A_n) A_n(z), \\ S_N(z; g_k; K) &= \sum_{n=0}^{N-1} (g_k, A_n) A_n(z), & k = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $(f, h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \overline{h(e^{ix})} dx$.

Теперь проверим, что выполнено тождество

$$S_N(z; f; \tilde{K}) = S_N(z; f_0; K) + \sum_{k=1}^m S_N\left(\frac{r_k}{z - z_k}; g_k; K\right). \quad (2.20)$$

Ясно, что для этого достаточно доказать равенство коэффициентов в тождестве (2.20) при функциях из системы (2.12), т.е. проверить соотношения

$$\alpha_n = \langle f(z), A_n(z) \rangle = (f_0(z), A_n(z)), \quad n \geq 0, \quad (2.21)$$

$$\alpha_{n,l} = \langle f(z), A_{n,l}(z) \rangle = (g_l(z), A_n(z)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Выполнение равенства (2.21) следует из (2.14). Проверим соотношение (2.22):

$$\begin{aligned}\langle f(z), A_{n,l}(z) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_l(z_l + r_l e^{ix}) \overline{A_{n,l}(z_l + r_l e^{ix})} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_l(e^{-ix}) \overline{A_n(e^{-ix})} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_l(e^{ix}) \overline{A_n(e^{ix})} dx = (g_l(z), A_n(z)).\end{aligned}$$

Используя тождество (2.20) и неравенство треугольника с нормой (1.4) запишем

$$\begin{aligned}\|f(z) - S_N(z; f; \tilde{K})\|_p &\leq \|f_0(z) - S_N(z; f_0; K)\|_p \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left\| g_k \left(\frac{r_k}{z - z_k} \right) - S_N \left(\frac{r_k}{z - z_k}; g_k; K \right) \right\|_p.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Разберем случай $1 \leq p < \infty$. Случай $p = \infty$ разбирается аналогично.

В статье [5] установлено, что для функции $q(z) \in H_p(K)$

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(re^{ix}) - S_N(re^{ix}; q; K)|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Поскольку $f_0(z) \in H_p(K)$, заданный формулой (1.3) функционал $a_0(f)_p$ удовлетворяет условию $a_0(f_0(z) - S_N(z; f_0; K))_p \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Применяя лемму 1 в случае $\omega(z) = z_k + rz$, $r_k < r < r_k + \rho$, мы можем мажорировать остальные функционалы $a_k(f_0(z) - S_N(z; f_0; K))_p$, $k = 1, \dots, m$ из (1.3):

$$a_k(f_0(z) - S_N(z; f_0; K))_p \leq \left(\frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|} \right)^{1/p} a_0(f_0(z) - S_N(z; f_0; K))_p \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\|f_0(z) - S_N(z; f_0; K)\|_p \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Подобным образом, используя лемму 2, мы можем проверить, что

$$\left\| g_k \left(\frac{r_k}{z - z_k} \right) - S_N \left(\frac{r_k}{z - z_k}; g_k; K \right) \right\|_p \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, m.$$

Итак, правая часть неравенства (2.23) стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$, а, следовательно, левая часть тоже. Теорема доказана.

3. Оценка скорости сходимости. Введем класс функций при $0 < \delta < \rho$:

$$\begin{aligned}\Omega_\delta &= \{ \omega(z) : \omega(z) \in H_\infty(K), \{ \omega(e^{ix}) : x \in [0, 2\pi) \} \subset \tilde{K}, |\omega(0)| < 1 - \delta, \\ &\quad \forall k: 1 \leq k \leq m (|\omega(0) - z_k| > r_k + \delta \vee |\omega(0) - z_k| < r_k) \}\end{aligned}$$

и индуцированную им норму для аналитических функций класса $H_p(\tilde{K})$, $1 \leq p < \infty$:

$$\|f\|_{p, \Omega_\delta} = \sup_{\omega \in \Omega_\delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\omega(e^{ix}))|^p dx \right)^{1/p},$$

где ρ определено перед (1.3).

Обозначим через $E_N(h(x))_p$ величину наилучшего приближения функции $h(x)$ из $L_p[0, 2\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше N по норме

$$\|h\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть аналитическая функция $f(z)$ такова, что $f^{(s)}(z) \in H_p(\tilde{K})$, $1 \leq p \leq \infty$, $s \geq 0$, $0 \leq \nu \leq s$, $n = 2^{j-1} + k$, $0 \leq k < 2^{j-1}$, $N = [2^{j-1}(1 - \varepsilon)]$, $S_n(z, f)$ – частичная сумма (2.19) ряда всплесков (2.13). Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{d}{dz} \right)^\nu (f(z) - S_n(z; f)) \right\|_{p, \Omega_\delta} \\ & \leq \frac{C_{1,s}}{\delta^{1/p}} \left(E_N(f_0(e^{ix}))_p + n^\nu E_N(f_0^{(\nu)}(e^{ix}))_p \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^m E_N(f_k(z_k + r_k e^{ix}))_p + n^\nu E_N(f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}))_p \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{d}{dz} \right)^\nu (f(z) - S_n(z; f)) \right\|_{p, \Omega_\delta} \\ & \leq \frac{C_{2,s}}{\delta^{1/p} N^{s-\nu}} \left(E_{N-s}(f_0^{(s)}(e^{ix}))_p + \sum_{k=1}^m E_{N+s-\nu}(f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix}))_p \right), \quad \text{при } N \geq s, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\delta^{1/\infty} = 1$, $\|h\|_{\infty, \Omega_\delta} = \sup_{z \in \tilde{K}} |h(z)|$, $C_{l,s} = C(\hat{\varphi}, l, s, z_1, r_1, z_2, r_2, \dots, z_m, r_m)$, $l = 1, 2$, и через $h^{(k)}(z)$, как и везде далее, обозначена k -я производная $(d/dz)^k h(z)$. При этом показатель степени $1/p$ при δ в (3.1) и (3.2) нельзя уменьшить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проводить рассуждения для случая $1 \leq p < \infty$, так как при $p = \infty$ доказательство проводится аналогично.

Для удобства введем аналитическую в $\tilde{K}$ функцию $q(z) = f^{(\nu)}(z) - S_n^{(\nu)}(z; f)$. Используем представление (2.6) функции $f(z)$. Обозначим через $q_k(z)$, $k = 0, \dots, m$ соответствующие функции в разложении $q(z)$. Тогда выполняются соотношения $q_k(z) = f_k^{(\nu)}(z) - S_n^{(\nu)}(z; f_k)$, $k = 0, \dots, m$, $q(z) = \sum_{k=0}^m q_k(z)$.

С помощью неравенства треугольника получается следующая оценка:

$$\|q(z)\|_{p, \Omega_\delta} \leq \|q_0(z)\|_{p, \Omega_\delta} + \sum_{k=1}^m \|q_k(z)\|_{p, \Omega_\delta}.$$

Используя лемму 1, запишем

$$\|q_0(z)\|_{p, \Omega_\delta} \leq \sup_{\Omega_\delta} \left(\frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_0(e^{ix})|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\frac{2 - \delta}{\delta} \right)^{1/p} \|q_0(e^{ix})\|_{L_p}.$$

Применяя лемму 2, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|q_k(z)\|_{p,\Omega_\delta} &\leq \max\left\{1, \frac{|\omega(0) - z_k| + r_k}{|\omega(0) - z_k| - r_k}\right\}^{1/p} \|q_k(z_k + re^{ix})\|_{L_p} \\ &\leq \left(\frac{2r_k + \delta}{\delta}\right)^{1/p} \|q_k(z_k + re^{ix})\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|q(z)\|_{p,\Omega_\delta} \leq \left(\frac{2-\delta}{\delta}\right)^{1/p} \|q_0(e^{ix})\|_{L_p} + \max_{k=1,\dots,n} \left(\frac{2r_k + \delta}{\delta}\right)^{1/p} \sum_{k=1}^n \|q_k(z_k + re^{ix})\|_{L_p}. \quad (3.3)$$

Сделаем оценку $\|q_0(e^{ix})\|_{L_p}$ как в статье [7]. Для этого в качестве промежуточных приближений будем использовать средние

$$V_{N+\nu,N}(z; f) = \frac{1}{N} \sum_{j=N+\nu+1}^{2N+\nu} s_j(z; f),$$

где $s_j(z; f)$ – частичная сумма порядка j обобщенного ряда Лорана (2.11) в $\tilde{K}$. Заметим, что для функции $f_0(z)$ сумма $s_j(z; f_0)$ будет совпадать с суммой ряда Маклорена, а для функций $f_k(z)$, $k = 1, \dots, m$ частичная сумма $s_j(z; f_k)$ равна частичной сумме ряда Лорана во внешности круга $\overline{B(z_k, r_k)}$. Легко проверить, что

$$V_{N+\nu,N}^{(\nu)}(z; f_0) = V_{N,N}(z; f_0^{(\nu)}). \quad (3.4)$$

Рассмотрим еще средние Валле Пуссена:

$$\tilde{V}_{N+\nu,N}(x; u) = \frac{1}{N} \sum_{j=N+\nu+1}^{2N+\nu} s_j^*(x, u),$$

где $s_j^*(x, u)$ – j -я частичная сумма ряда Фурье функции $u(x) \in L_1[0, 2\pi)$.

В статье [12] доказана ограниченность нормы оператора $\tilde{V}_{N+\nu,N}: C \rightarrow C$, откуда следует ограниченность нормы оператора $\tilde{V}_{N+\nu,N}: L_p \rightarrow L_p$, $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|\tilde{V}_{N+\nu,N}(x; u)\|_{L_p} \leq C_{3,s} \|u(x)\|_{L_p}. \quad (3.5)$$

Заметим, что для функции $f_0(z) \in H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$ выполняется

$$V_{N+\nu,N}(e^{ix}; f_0) = \tilde{V}_{N+\nu,N}(x; f_0(e^{i\cdot})). \quad (3.6)$$

Применяя неравенство Бернштейна

$$\|P_n^{(\nu)}(e^{ix})\|_{L_p} \leq n^\nu \|P_n(e^{ix})\|_{L_p},$$

тождество (3.4) и учитывая, что $\deg(V_{N+\nu,N}(z; f_0)) \leq 2N + \nu$ и $\deg(S_n(z; f_0)) \leq 8n/3$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \|q_0(e^{ix})\|_{L_p} &= \|f_0^{(\nu)}(e^{ix}) - S_n^{(\nu)}(e^{ix}; f_0)\|_{L_p} \\ &\leq \|f_0^{(\nu)}(e^{ix}) - V_{N+\nu,N}^{(\nu)}(e^{ix}; f_0)\|_{L_p} + \|V_{N+\nu,N}^{(\nu)}(e^{ix}; f_0) - S_n^{(\nu)}(e^{ix}; f_0)\|_{L_p} \\ &\leq \|f_0^{(\nu)}(e^{ix}) - V_{N,N}(e^{ix}; f_0^{(\nu)})\|_{L_p} \\ &\quad + \left(\max \left\{ 2N + \nu, \frac{8}{3}n \right\} \right)^\nu \|V_{N+\nu,N}(e^{ix}; f_0) - S_n(e^{ix}; f_0)\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие всплески из статьи [5], образующие базис пространств $C_{2\pi}$ и $L_p[0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$:

$$\left\{ w_0 \equiv 1, \quad \overset{(\sim)}{w}_n(x) = 2^{(3-j)/2} \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right) \sin \frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j} \frac{(\sin)}{\cos \nu x} : \right. \\ \left. n = 2^{j-1} + k, j > 0, 0 \leq k < 2^{j-1} \right\} \quad (3.7)$$

и сумму $\tilde{S}_n(x; u) = w_0(x)(w_0, u) + \sum_{k=1}^n \{w_k(x)(w_k, u) + \tilde{w}_k(x)(\tilde{w}_k, u)\}$. Для аналитической функции $f_0(z) \in H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$ выполняется

$$S_n(e^{ix}; f_0) = \tilde{S}_n(x; f_0(e^{i\cdot})). \quad (3.8)$$

Используя (3.6), (3.8) и то, что операторы $\tilde{S}_n(\cdot; f)$ и $\tilde{V}_{N,N}(\cdot; f)$ сохраняют тригонометрические полиномы $T_{N,0}(x)$ и $\tilde{T}_{N,0}(x)$ степени не выше N , получаем

$$\begin{aligned} &\|f_0^{(\nu)}(e^{ix}) - V_{N,N}(e^{ix}; f_0^{(\nu)})\|_{L_p} \\ &\quad + \left(\max \left\{ 2N + \nu, \frac{8}{3}n \right\} \right)^\nu \|V_{N+\nu,N}(e^{ix}; f_0) - S_n(e^{ix}; f_0)\|_{L_p} \\ &= \|f_0^{(\nu)}(e^{ix}) - T_{N,0}(x) - \tilde{V}_{N,N}(x; f_0^{(\nu)}(e^{i\cdot}) - T_{N,0}(\cdot))\|_{L_p} \\ &\quad + \left(\max \left\{ 2N + \nu, \frac{8}{3}n \right\} \right)^\nu \\ &\quad \times \|\tilde{V}_{N+\nu,N}(x; f_0(e^{i\cdot}) - \tilde{T}_{N,0}(\cdot)) - \tilde{S}_n(x; f_0(e^{i\cdot}) - \tilde{T}_{N,0}(\cdot))\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Норма оператора $S_n(\cdot; f)$ ограничена [5], выполнено неравенство (3.5); следовательно

$$\|q_0(e^{ix})\|_{L_p} \leq (1 + C_{3,0})\|f_0^{(\nu)}(e^{ix}) - T_{N,0}(x)\|_{L_p} + C_{4,s}n^\nu\|f_0(e^{ix}) - \tilde{T}_{N,0}(x)\|_{L_p}.$$

Выбирая в качестве $T_{N,0}(x)$ и $\tilde{T}_{N,0}(x)$ соответствующие полиномы наилучшего приближения, получаем

$$\|q_0(e^{ix})\|_{L_p} \leq C_{5,s}(E_N(f_0^{(\nu)}(e^{ix}))_p + n^\nu E_N(f_0(e^{ix}))_p). \quad (3.9)$$

Оценим теперь величину $\|q_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}$. Введем следующую рациональную функцию

$$T_{N,k}(z) = P_{N,k}(z) + P_{N,k}^*\left(\frac{r_k}{z - z_k}\right),$$

где $P_{N,k}(z)$, $P_{N,k}^*(z)$ – пока произвольные многочлены степени не выше N . Тогда справедливы соотношения

$$V_{N,N}^{(\nu)}(z; f_k) = V_{N+\nu,N}(z; f_k^{(\nu)}), \quad (3.10)$$

$$V_{N+\nu,N}(z; T_{N,k}) = T_{N,k}(z). \quad (3.11)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|q_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} &\leq \|f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}) - V_{N,N}^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}; f_k)\|_{L_p} \\ &\quad + \|V_{N,N}^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}; f_k) - S_n^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}; f_k)\|_{L_p} \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Используя (3.10) и (3.11), получаем

$$I_1 \leq \|f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N,k}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} + \|V_{N+\nu,N}(z_k + r_k e^{ix}; f_k^{(\nu)}) - T_{N,k}\|_{L_p}. \quad (3.13)$$

Введем функцию $h_k(z) = f_k^{(\nu)}(z_k + r_k/z) - T_{N,k}(z_k + r_k/z)$. Тогда

$$\begin{aligned} V_{N+\nu,N}(z_k + r_k e^{ix}; f_k^{(\nu)}) - T_{N,k} \\ = V_{N+\nu,N}\left(z_k + r_k e^{ix}; h_k\left(\frac{r_k}{\cdot - z_k}\right)\right) = V_{N+\nu,N}(e^{-ix}; h_k). \end{aligned}$$

Поскольку $h_k(z) \in H_p(K)$, воспользуемся (3.5), (3.6) и получим

$$\begin{aligned} \|V_{N+\nu,N}(e^{-ix}; h_k)\|_{L_p} &= \|V_{N+\nu,N}(e^{ix}; h_k)\|_{L_p} = \|\tilde{V}_{N+\nu,N}(x; h_k(e^i \cdot))\|_{L_p} \\ &\leq C_{3,s} \|h_k(e^{ix})\|_{L_p} = C_{3,s} \|f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N,k}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из неравенств (3.13) и (3.14) заключаем, что

$$I_1 \leq (C_{3,s} + 1) \|f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N,k}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}.$$

Выбирая в качестве $T_{N,k}(z_k + r_k e^{ix})$ тригонометрический полином наилучшего приближения функции $f_k^{(\nu)}(z)$ степени не выше N , получаем

$$I_1 \leq (C_{3,s} + 1) E_N(f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}))_p. \quad (3.15)$$

Оценим теперь I_2 . Для этого проверим неравенство

$$\|Q_l^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} \leq \left(\frac{l}{r_k}\right)^\nu \|Q_l(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p},$$

где $Q_l(z) = \hat{P}_l(r_k/(z - z_k))$, $\hat{P}_l(z)$ – произвольный многочлен степени не выше l . Действительно, пусть

$$Q_l(z) = \sum_{j=0}^l \frac{a_j r_k^j}{(z - z_k)^j}.$$

Тогда, применяя неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов, запишем

$$\begin{aligned} \left\| Q'_l(z_k + r_k e^{ix}) \right\|_{L_p} &= \frac{1}{r_k} \left\| \left(\frac{d}{dx} \right) \sum_{j=0}^l a_j e^{ijx} \right\|_{L_p} \\ &\leq \left(\frac{l}{r_k} \right) \left\| \sum_{j=0}^l a_j e^{ijx} \right\|_{L_p} = \left(\frac{l}{r_k} \right) \left\| Q_l(z_k + r_k e^{ix}) \right\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Пусть далее $\hat{P}(z)$ – многочлен степени не выше $8n/3$, удовлетворяющий равенству

$$\hat{P}\left(\frac{r_k}{z - z_k}\right) = V_{N,N}(z; f_k) - S_n(z; f_k).$$

Используя то, что оператор $S_n(\cdot, f)$ сохраняет рациональную функцию $\tilde{T}_{N,k} = \tilde{P}_{N,k}(z) + \tilde{P}_{N,k}^*(r_k/(z - z_k))$, где $\tilde{P}_{N,k}(z)$ и $\tilde{P}_{N,k}^*(z)$ – многочлены степени не выше N , выводим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{(8n/3)^\nu}{r_k^\nu} \|V_{N,N}(z_k + r_k e^{ix}; f_k) - S_n(z_k + r_k e^{ix}; f_k)\|_{L_p} \\ &\leq \frac{(8n/3)^\nu}{r_k^\nu} \left(\left\| V_{N,N}\left(z_k + r_k e^{ix}; f_k - \tilde{T}_{N,k}\right) \right\|_{L_p} + \left\| S_n\left(z_k + r_k e^{ix}; f_k - \tilde{T}_{N,k}\right) \right\|_{L_p} \right). \end{aligned}$$

Далее, вводя функцию $\tilde{h}_k(z) = f_k(z_k + r_k/z) - \tilde{T}_{N,k}(z_k + r_k/z)$ и опять пользуясь (3.5), (3.6), (3.8) и ограниченностью нормы оператора $\tilde{S}_n(\cdot, f)$ по аналогии с предыдущими рассуждениями получаем

$$I_2 \leq C_{4,s,k} n^\nu \|f_k(z_k + r_k e^{ix}) - \tilde{T}_{N,k}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p},$$

и, следовательно,

$$I_2 \leq C_{4,s,k} n^\nu E_N(f_k(z_k + r_k e^{ix}))_p. \quad (3.16)$$

Объединяя неравенства (3.9)–(3.16), получаем оценку (3.1).

Чтобы установить неравенство (3.2) докажем, что при $N \geq s$ верны оценки

$$\begin{aligned} E_N(f_0^{(\nu)}(e^{ix}))_p &\leq \frac{C_{5,s}}{N^{s-\nu}} E_{N-s+\nu}(f_0^{(s)}(e^{ix}))_p, \\ E_N(f_0(e^{ix}))_p &\leq \frac{C_{6,s}}{N^s} E_{N-s}(f_0^{(s)}(e^{ix}))_p. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для этого достаточно доказать для любой функции $\tilde{f}_0(z) \in H_p(K)$ неравенство

$$E_l(\tilde{f}_0(e^{ix}))_p \leq \frac{C_7}{l} E_{l-1}(\tilde{f}'_0(e^{ix}))_p, \quad l \in \mathbb{N}$$

и последовательно применить его несколько раз. Так как

$$\tilde{f}'_0(e^{ix}) = -ie^{-ix} \frac{d}{dx}(\tilde{f}_0(e^{ix})), \quad E_l\left(\frac{d}{dx}(\tilde{f}_0(e^{ix}))\right)_p \leq E_{l-1}\left(e^{-ix} \frac{d}{dx}(\tilde{f}_0(e^{ix}))\right)_p,$$

с помощью неравенства Фавара получаем

$$\begin{aligned} E_l(\tilde{f}_0(e^{ix}))_p &\leq \frac{C_8}{l} E_l\left(\frac{d}{dx}(\tilde{f}_0(e^{ix}))\right)_p \\ &\leq \frac{C_8}{l} E_{l-1}\left(e^{-ix} \frac{d}{dx}(\tilde{f}_0(e^{ix}))\right)_p = \frac{C_8}{l} E_{l-1}(\tilde{f}'_0(e^{ix}))_p, \end{aligned}$$

где $C_8 = \pi/2 \geq C_7$ – константа Фавара.

Таким образом, при $N \geq s$ выполняется

$$E_N(f_0(e^{ix}))_p + n^\nu E_N(f_0^{(\nu)}(e^{ix}))_p \leq \frac{C_{9,s}}{N^{s-\nu}} E_{N-s}(f_0^{(s)}(e^{ix}))_p.$$

Докажем неравенство

$$E_N(f_k(z_k + r_k e^{ix}))_p + n^\nu E_N(f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}))_p \leq \frac{C_{10,s}}{N^{s-\nu}} E_{N+s-\nu}(f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix}))_p. \quad (3.18)$$

Для этого нам достаточно установить, что

$$E_N(f_k(z_k + r_k e^{ix}))_p \leq \frac{C_{11,s}}{N^s} E_{N+s}(f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix}))_p, \quad (3.19)$$

$$E_N(f_k^{(\nu)}(z_k + r_k e^{ix}))_p \leq \frac{C_{12,s}}{N^{s-\nu}} E_{N+s-\nu}(f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix}))_p. \quad (3.20)$$

Ясно, что каждое из неравенств (3.19), (3.20) получается последовательным применением неравенства

$$E_N(\tilde{f}_k(z_k + r_k e^{ix}))_p \leq \frac{C_{13}}{N} E_{N+1}(\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}))_p \quad (3.21)$$

к функциям $f_k(z)$ и $f_k^{(\nu)}(z)$, где $\tilde{f}_k(z)$ – любая аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_k, r_k)}$, такая, что функция $\tilde{g}_k(z) = \tilde{f}_k(z_k + r_k/z) \in H_p(K)$. Последнее неравенство мы и будем доказывать.

Используя неравенство (3.17) при $s = 1$, $\nu = 0$, запишем

$$\begin{aligned} E_N(\tilde{f}_k(z_k + r_k e^{ix}))_p &= E_N(\tilde{g}_k(e^{ix}))_p \leq \frac{C_{5,1}}{N} E_{N-1}(\tilde{g}'_k(e^{ix}))_p \\ &= \frac{C_{5,1}}{N} E_{N-1}\left(\frac{r_k}{e^{2ix}} \tilde{f}'_k\left(z_k + \frac{r_k}{e^{ix}}\right)\right)_p = \frac{C_{5,1} r_k}{N} E_{N-1}(e^{2ix} \tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}))_p. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Проверим теперь неравенство

$$E_{N-1}(e^{2ix} \tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}))_p \leq C_{14} E_{N+1}(\tilde{f}'_k(e^{ix}))_p. \quad (3.23)$$

Докажем его с константой $C_{14} = 5$. Введем тригонометрический полином $T_{N+1}^*(x) = \sum_{l=-N-1}^{N+1} \gamma_l e^{ilx}$ такой, что

$$E_{N+1}(\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}))_p = \|\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N+1}^*(x)\|_{L_p}.$$

Тогда при $-1 \leq l \leq N+1$ получается цепочка

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N+1}^*(x)\|_{L_p} &\geq \|\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N+1}^*(x)\|_{L_1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N+1}^*(x))e^{-ilx}| dx \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N+1}^*(x))e^{-ilx} dx \right| = |\gamma_l|. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Также мы можем вывести следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N+1}^*(e^{-ix})\|_{L_p} &\geq \left\| \tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - \sum_{l=-N-1}^{N-3} \gamma_l e^{ilx} \right\|_{L_p} - \sum_{l=N-2}^{N+1} \|\gamma_l e^{ilx}\|_{L_p} \\ &= \left\| e^{2ix} \tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - \sum_{l=-N+1}^{N-1} \gamma_{l-2} e^{ilx} \right\|_{L_p} \\ &\quad - \sum_{l=N-2}^{N+1} |\gamma_l| \geq E_{N-1}(e^{2ix} \tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}))_p - \sum_{l=N-2}^{N+1} |\gamma_l|. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Складывая неравенства (3.25) и (3.24) при $l = N-2, \dots, N+1$, заключаем, что $\|\tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}) - T_{N+1}^*(e^{-ix})\|_{L_p} \geq (1/5)E_{N-1}(e^{2ix} \tilde{f}'_k(z_k + r_k e^{ix}))_p$. Итак, неравенство (3.23) полностью доказано. А из него и цепочки (3.22) непосредственно следует неравенство (3.19).

Пусть как и прежде ρ – минимальное из расстояний между окружностями $C_1(0)$, $C_{r_l}(z_l)$, $C_{r_2}(z_2), \dots, C_{r_m}(z_m)$. В теореме 2 величина $(d/dz)^\nu(f(z) - S_n(z; f))$ была оценена через граничные значения функций $f_k^{(s)}(z)$, $k = 0, \dots, m$. В качестве следствия мы получим оценку через граничные значения самой функции $f^{(s)}(z)$.

ТЕОРЕМА 3. В предположениях теоремы 2 верна оценка

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\frac{d}{dz} \right)^\nu (f(z) - S_n(z; f)) \right\|_{p, \Omega_\delta} \\ &\leq \frac{C_{15,s}}{\delta^{1/p} N^{s-\nu}} \left(E_{N-s}(f^{(s)}(e^{ix}))_p + \sum_{k=1}^m E_{N+s-\nu}(f^{(s)}(z_k + r_k e^{ix}))_p \right) \\ &\quad + C_{16,s} \frac{(1-\rho)^N}{\delta^{1/p} N^{s-\nu}} \|f^{(s)}(z)\|_{p, \partial \tilde{K}}, \quad \text{при } N \geq s, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\|h\|_{p, \partial \tilde{K}} = \max\{\|h(e^{ix})\|_{L_p}, \|h(z_1 + r_1 e^{ix})\|_{L_p}, \dots, \|h(z_m + r_m e^{ix})\|_{L_p}\}$ и величины $C_{15,s}$ и $C_{16,s}$ зависят только от функции $\hat{\varphi}(z)$ и чисел $s, z_1, r_1, z_2, r_2, \dots, z_m, r_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем мажорировать слагаемые в правой части неравенства (3.2). Проведем оценку только для $E_{N-s}(f_0^{(s)}(e^{ix}))_p$, так как для других слагаемых она аналогична. Поскольку $f_0^{(s)}(z) = f^{(s)}(z) - \sum_{k=1}^m f_k^{(s)}(z)$, то

$$E_{N-s}(f_0^{(s)}(e^{ix}))_p \leq E_{N-s}(f^{(s)}(e^{ix}))_p + \sum_{k=1}^m E_{N-s}(f_k^{(s)}(e^{ix}))_p. \quad (3.27)$$

В [13; с. 90–93] доказано, что для функции $g(z) \in H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$ при $0 < r < 1$ выполняется

$$E_{N-s}(g(re^{ix}))_p \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} r^{N-s+1} E_{N-s}(g(e^{ix}))_p. \quad (3.28)$$

Функция $g_k(z) = f_k^{(s)}((1-\rho)/z) \in H_p(K)$. Применяя к ней неравенство (3.28) при $r = 1 - \rho$, получаем

$$\begin{aligned} E_{N-s}(f_k^{(s)}(e^{ix}))_p &\leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} (1-\rho)^{N-s+1} E_{N-s}(f_k^{(s)}((1-\rho)e^{ix}))_p \\ &\leq \frac{4}{\pi} (1-\rho)^{N-s+1} \|f_k^{(s)}((1-\rho)e^{ix})\|_{L_p}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Так как $B_{r_k}(z_k) \subset B_{1-\rho}(0)$, используя неравенство (2.2) леммы 2 при $\omega(z) = (1-\rho)z$, выводим

$$\|f_k^{(s)}((1-\rho)e^{ix})\|_{L_p} \leq \|f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \quad (3.30)$$

Таким образом, объединяя (3.29) и (3.30), имеем

$$E_{N-s}(f_k^{(s)}(e^{ix}))_p \leq \frac{4}{\pi} (1-\rho)^{N-s+1} \|f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \quad (3.31)$$

Для оценки $\|f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}$ используем неравенство треугольника:

$$\|f_k^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} \leq \|f^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^m \|f_l^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \quad (3.32)$$

Мажорируем теперь величину $\|f_0^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}$ с помощью (2.7):

$$\begin{aligned} \|f_0^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(s)}(e^{it}) \frac{1}{1 - (z_k + r_k e^{ix})e^{-it}} dt \right\|_{L_p} \\ &\leq \max_{x \in [0, 2\pi)} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(s)}(e^{it}) \frac{1}{1 - (z_k + r_k e^{ix})e^{-it}} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{1 - |z_k| - r_k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(s)}(e^{it})| dt \leq \frac{1}{1 - |z_k| - r_k} \|f^{(s)}(e^{it})\|_{L_p}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Аналогично оцениваются слагаемые $\|f_l^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}$, $l \neq k$, из (3.32):

$$\|f_l^{(s)}(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} \leq \frac{r_l}{|z_l - z_k| - r_l - r_k} \|f^{(s)}(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_p}. \quad (3.34)$$

Собирая вместе неравенства (3.27)–(3.34) заключаем, что

$$E_{N-s}(f_0^{(s)}(e^{ix}))_p \leq E_{N-s}(f^{(s)}(e^{ix}))_p + C_{17,s}(1-\rho)^N \|f^{(s)}(z)\|_p,$$

где константа $C_{17,s}$ зависит только от $s, z_1, r_1, z_2, r_2, \dots, z_m, r_m$. Теорему 3 можно считать доказанной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Бочкарев, “Существование базиса в пространстве функций, аналитических в круге, и некоторые свойства системы Франклина”, *Матем. сб.*, **95**:1 (1974), 3–18.
- [2] Z. Ciesielski, “Bases and approximation by splines”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 2, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, 47–51.
- [3] Ju. N. Subbotin, “Approximative properties of splines”, *Approximation Theory*, Lecture Notes in Math., **556**, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 416–427.
- [4] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, “Всплески в пространствах гармонических функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:1 (2000), 145–174.
- [5] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, “Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральной дыркой”, *Тр. Междунар. лет. мат. школы С.Б. Стечкина по теории функций*, Изд-во ТулГУ, Тула, 2007, 129–149.
- [6] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, “Базисы всплесков в пространствах аналитических функций”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 340–355.
- [7] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, “Базисы всплесков в пространствах аналитических в кольце функций”, *Тр. Междунар. лет. мат. школы С.Б. Стечкина по теории функций*, Изд-во ТулГУ, Тула, 1999, 149–158.
- [8] Y. Meyer, *Ondelettes et operateurs. I. OndeletsOndelettes*, Actualités Math., Hermann, Paris, 1990.
- [9] D. Offin, K. Oskolkov, “A note on orthonormal polynomial bases and wavelets”, *Constr. Approx.*, **9**:2-3 (1993), 319–325.
- [10] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.
- [11] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.
- [12] С. М. Никольский, “Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **4**:6 (1940), 501–508.
- [13] Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин, *Аппроксимация с ограничениями*, Научная думка, Киев, 1982.

Г. А. Дубосарский

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Институт математики и компьютерных наук,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург

E-mail: glebUU@mail.ru

Поступило

05.04.2012

Исправленный вариант

08.04.2013