Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Романовский, Е. М. Назарук, О дихотомии линейных автономных систем функционально-дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 129–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:54:18

О дихотомии линейных автономных систем функционально-дифференциальных уравнений

Р. К. Романовский, Е. М. Назарук

Исследуется экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши для подкласса линейных автономных систем ФДУ нейтрального типа сведением к такой же задаче для разностного уравнения вида $x_n = \Gamma x_{n-1}$ в банаховом пространстве с компактным оператором Γ . Описан спектр Γ . Дихотомия решений задачи Коши – следствие дихотомии спектра. Полученный результат в частном случае дает критерий дихотомии для линейной автономной системы ФДУ запаздывающего типа общего вида.

Библиография: 19 названия.

DOI: 10.4213/mzm9693

1. Начиная с середины прошлого века в теории устойчивости интенсивно изучается тип поведения динамических систем, получивший название “экспоненциальная дихотомия”. В 60-е–80-е гг. построены основы теории, получены приложения к теории нелинейных колебаний, проблеме обратимости дифференциальных операторов, проблеме усреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами [1]–[10]. В последние 20 лет получен ряд новых важных результатов по этой проблематике методами теории полугрупп ([11]–[14], см. также ссылки в книге [11] и обзоре [12]), продолжены исследования по применению прямого метода Ляпунова к анализу дихотомии [15]–[18].

Данная работа посвящена исследованию дихотомии для подкласса функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Рассматривается задача Коши для линейной автономной системы ФДУ нейтрального типа

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[x(t) - \int_0^a [dT(s)] x(t-s) \right] = \int_0^a [dF(s)] x(t-s), & t > a, \\ x|_{[0,a]} = \varphi(t) \in E. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $E = C([0, a] \rightarrow \mathbb{C}^N)$, F, T – матрицы-функции порядка N ,

$$0 < V_0^a(F) < \infty, \quad T \text{ липшицева на } [0, a]. \quad (2)$$

Под *решением* понимается непрерывная функция $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^N$, удовлетворяющая при $t \leq a$ начальному условию (1), при $t > a$ соотношению

$$\left[x(t) - \int_0^a dT(s) x(t-s) \right]_a^t = \int_0^t d\tau \int_0^a [dF(s)] x(\tau-s). \quad (3)$$

Показано, что при условиях (2) задача Коши (1) приводится к виду

$$\begin{cases} x_n = \Gamma x_{n-1}, & n = 1, 2, \dots, \\ x_0 = \varphi \in E, \end{cases} \quad (4)$$

где Γ – компактный оператор $E \rightarrow E$, $x_n(t) = x(t + na)$, $t \in [0, a]$, при этом $x_n(0) = x_{n-1}(a)$, откуда, в частности, следует однозначная разрешимость задачи Коши (1) в указанном классе. Под *дихотомией* решений задачи (1) понимается дихотомия решений разностной задачи Коши (3) в фазовом пространстве E . Описан спектр оператора Γ . Дихотомия решений эквивалентна дихотомии спектра Γ : распадается на две компоненты, лежащие внутри и вне круга $|\lambda| \leq 1$. В частном случае $T = 0$ полученный результат дает критерий дихотомии для линейной автономной системы ФДУ запаздывающего типа *общего* вида.

Далее $|\cdot|$ – эрмитова норма в $\mathbb{C}^N$, так же обозначается согласованная с ней матричная норма, $\|\cdot\|$ – норма в E .

2. Зафиксируем $t \in [0, a]$. Вычитая из равенства (3) с заменой t на $t + na$ равенство (3) с заменой t на na , выполняя в интеграле по отрезку $[na, t + na]$ замену $\tau \sim \tau - na$, представляя интеграл Стильтеса в обеих частях равенства в виде суммы интегралов по $[0, t]$, $[t, a]$ и используя введенное выше обозначение, получим *эквивалентное* (3) соотношение

$$(I - B)x_n = Ax_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где операторы $A, B: E \rightarrow E$ даются формулами

$$\begin{aligned} A\varphi(t) &= \varphi(a) + \rho(\varphi, t) + \int_0^t d\tau \int_\tau^a d[F(s)] \varphi(\tau + a - s), \\ B\varphi(t) &= \int_0^t [dT(s)] \varphi(t - s) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau d[F(s)] \varphi(\tau - s), \\ \rho(\varphi, t) &= \int_\tau^a d[T(s)] \varphi(t + a - s) - \int_0^a [dT(s)] \varphi(a - s). \end{aligned} \quad (6)$$

ЛЕММА. При условиях (2) оператор A компактен, оператор $I - B$ имеет ограниченный обратный $E \rightarrow E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом равенства

$$\int_t^a [dT(s)] \varphi(t + a - s) = \int_t^a [d_s T(t + a - s)] \varphi(s), \quad t \in [0, a],$$

при $0 \leq t_1 < t_2 \leq a$ имеем

$$A\varphi|_{t=t_1} - A\varphi|_{t=t_2} = I_1 + I_2, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_1}^{t_2} [d_s T(t_1 + a - s)] \varphi(s) - \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_\tau^a [dF(s)] \varphi(\tau - s), \\ I_2 &= \int_{t_2}^a \{d_s [T(t_1 + a - s) - T(t_2 + a - s)]\} \varphi(s). \end{aligned}$$

При условиях (2) имеют место оценки

$$|I_1| \leq (L + M)(t_2 - t_1)\|\varphi\|, \quad |I_2| \leq 2L(t_2 - t_1)\|\varphi\|, \quad (8)$$

где L – постоянная Липшица для матрицы T , $M = V_0^a(F)$. Из (7), (8) и очевидной оценки $|A\varphi| \leq \text{const} \cdot \|\varphi\|$ следует, в силу критерия компактности Арцела, первое утверждение леммы. Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что верна оценка

$$|B^k \varphi| \leq \frac{(L + M)^k}{k!} t^k \|\varphi\|, \quad t \in [0, a], \quad k \geq 1. \quad (9)$$

Имеем

$$|B\varphi| \leq L \int_0^t |\varphi(t-s)| ds + M \int_0^t \max_{[0, \tau]} |\varphi(\tau-s)| d\tau \leq (L + M)t\|\varphi\|.$$

Предполагая верным (9) с заменой k на $k-1$, получим

$$\begin{aligned} |B^k \varphi| &\leq L \int_0^t |B^{k-1} \varphi|_{t-s} ds + M \int_0^t \max_{[0, \tau]} |(B^{k-1} \varphi)_{\tau-s}| d\tau \\ &\leq \frac{(L + M)^{k-1}}{(k-1)!} \left[L \int_0^t (t-s)^{k-1} ds + M \int_0^t \tau^{k-1} d\tau \right] = \frac{(L + M)^k}{k!} t^k \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из леммы с учетом соотношения (5) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Задача Коши (1), (2) эквивалентна разностной задаче Коши (4) с компактным оператором $\Gamma = (I - B)^{-1}A$, где A, B – операторы (6).

Отметим, что из (5) следует: $x_n(0) = x_{n-1}(a)$.

Из структуры спектра компактного оператора в банаховом пространстве следует: спектр Γ состоит из точки O и не более чем счетного множества собственных чисел с возможной предельной точкой O .

ТЕОРЕМА 1. Собственные числа $\lambda \neq 0$ оператора Γ определяются формулой

$$\lambda = e^{a\xi}, \quad \det \Delta(\xi) = 0, \quad (10)$$

где

$$\Delta(\xi) = \xi \left[I - \int_0^a e^{-\xi s} dT(s) \right] - \int_0^a e^{-\xi s} dF(s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Покажем, что для любого собственного числа $\lambda \neq 0$ имеет место представление (10). Пусть $\varphi \in E$ – соответствующая собственная функция:

$$(I - B)^{-1}A\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi \neq 0. \quad (11)$$

Применяя к обеим частям равенства оператор $(I - B)$ и подставляя (6), последовательно получим цепочку равносильных соотношений

$$\varphi = (\lambda^{-1}A + B)\varphi, \quad (12)$$

$$y(t) = \lambda^{-1}y(a) + \int_0^t d\tau \int_0^a [dF(s)] z(\tau - s), \quad (13)$$

$$\dot{y}(t) = \int_0^a [dF(s)] z(t - s), \quad y(0) = \lambda^{-1}y(a),$$

где

$$z(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0, a], \\ \lambda^{-1}\varphi(t+a), & t \in [-a, 0], \end{cases} \quad y(t) = \varphi(t) - \int_0^a [dT(s)] z(t-s).$$

Учтено вытекающее из (12) равенство $\varphi(0) = \lambda^{-1}\varphi(a)$. При любом $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\lambda = e^{\xi_n a}, \quad \xi_n = \alpha + i\omega_n, \quad \alpha = \frac{\ln \lambda}{a}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{a} n, \quad (14)$$

где $\ln \lambda$ – главное значение логарифма. Заметим, что числа

$$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-\xi_n t} \varphi(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-i\omega_n t} e^{-\alpha t} \varphi(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются коэффициентами Фурье функции $e^{-\alpha t} \varphi(t)$ на отрезке $[0, a]$. Ввиду $\varphi(t) \not\equiv 0$ отсюда следует: существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $c_m \neq 0$. Положим в (14) $n = m$. Покажем, что ξ_m – корень уравнения (10).

Обозначим $\tilde{\varphi}(t) = e^{-\xi_m t} \varphi(t)$. Имеем

$$f = \int_0^a \tilde{\varphi}(t) dt \neq 0, \quad \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(a). \quad (15)$$

Подставляя в (13) $\varphi(t) = e^{\xi_m t} \tilde{\varphi}(t)$, $\lambda = e^{\xi_m a}$, после вычислений получим

$$\dot{\tilde{y}}(t) + \xi_m \tilde{y}(t) = \int_0^a e^{-\xi_m s} [dF(s)] \tilde{z}(t-s),$$

где

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(t), & t \in [0, a], \\ \tilde{\varphi}(t+a), & t \in [-a, 0], \end{cases} \quad \tilde{y}(t) = \tilde{\varphi}(t) - \int_0^a e^{-\xi_m s} [dT(s)] \tilde{z}(t-s).$$

Интегрирование по отрезку $[0, a]$ с учетом (15), $\tilde{z}(-s) = \tilde{z}(a-s)$ и равенства

$$\int_0^a \tilde{z}(t-s) dt = \int_0^s \tilde{\varphi}(t+a-s) dt + \int_s^a \tilde{\varphi}(t-s) dt = \int_{a-s}^a \tilde{\varphi}(t) dt + \int_0^{a-s} \tilde{\varphi}(t) dt = f$$

дает равенство $\Delta(\xi_m)f = 0$, откуда ввиду $f \neq 0$ следует $\det \Delta(\xi_m) = 0$.

2°. Пусть ξ – корень уравнения (10) и вектор $h \neq 0$ из $\mathbb{C}^N$ таков, что $\Delta(\xi)h = 0$. Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что пара $\lambda = e^{\xi a}$, $\varphi(t) = e^{\xi t} h$ удовлетворяет соотношениям (13), равносильным (11). Теорема доказана.

3. Решение задачи Коши (4) дается формулой $x_n = \Gamma^n \varphi$, $n = 1, 2, \dots$. Будем говорить, что имеет место *экспоненциальная дихотомия* решений задачи Коши (1), (2), если фазовое пространство E распадается в прямую сумму подпространств

$$E = E_1 \dot{+} E_2, \quad E_k \neq \{0\}, \quad (16)$$

так, что для решений эквивалентной задачи Коши (4) имеют место при некоторых $\mu, \nu > 0$ оценки

$$\begin{aligned} \varphi \in E_1 &\implies \|\Gamma^n \varphi\| \leq \mu e^{-\nu n} \|\varphi\|, \\ \varphi \in E_2 &\implies \|\Gamma^n \varphi\| \geq \mu e^{\nu n} \|\varphi\|, \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы имела место экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы множество корней уравнения (10) не пересекалось с мнимой осью и при этом хотя бы один корень лежал в полуплоскости $\operatorname{Re} \xi > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\sigma(\Gamma)$, $s(\Gamma)$ соответственно спектр и множество собственных чисел $\lambda \neq 0$ оператора Γ . Имеем $\sigma(\Gamma) = s(\Gamma) \cup \{0\}$, при этом внешность любого круга $|\lambda| \leq \text{const}$ содержит конечное число точек $\lambda \in s(\Gamma)$. С учетом этого и теоремы 1 требования теоремы 2 означают распад $\sigma(\Gamma) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ спектра Γ в сумму непустых множеств, лежащих соответственно внутри и вне окружности $|\lambda| = 1$ на положительном расстоянии от нее, при этом σ_2 конечно: при некотором $r < 1$

$$\sigma_1 = \{0\} \cup \{\lambda \in s(\Gamma), |\lambda| < r\}, \quad \sigma_2 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \in s(\Gamma), \quad |\lambda_k| > \frac{1}{r}.$$

Отсюда следует [2; с. 71] распад (16), где $E_k = P_k E$, проекторы P_k вычисляются по формуле Рисса

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\lambda I - \Gamma)^{-1} d\lambda, \quad P_2 = I - P_1,$$

при этом спектр сужения Γ на инвариантное подпространство E_k – множество σ_k . С учетом этого формула Рисса

$$\Gamma^n \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda^n (\lambda I - \Gamma)^{-1} \varphi d\lambda, \quad \varphi \in E_1,$$

дает после перехода к оценке нормы интеграла первую оценку (17) при

$$\mu_1 = r \max_{|\lambda|=r} \|(\lambda I - \Gamma)^{-1}\|, \quad \nu = \ln \frac{1}{r}.$$

Оператор $\Gamma: E_2 \rightarrow E_2$ имеет ограниченный обратный Γ^{-1} со спектром $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_m^{-1}\}$ в круге $|\lambda| < r$. При $\varphi \in E_2$ имеем

$$\varphi = (\Gamma^{-1})^n \Gamma^n \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda^n (\lambda I - \Gamma)^{-1} \Gamma^n \varphi d\lambda.$$

Выполняя оценку сверху и выражая отсюда $\|\Gamma^n \varphi\|$, получим вторую оценку (17) при том же ν и $\mu_2 = [r \max_{|\lambda|=r} \|(\lambda I - \Gamma^{-1})^{-1}\|]^{-1}$. Обозначая $\mu = \max(\mu_1, \mu_2)$, получим оценки (17) в окончательном виде.

Невыполнение требований теоремы 2 означает: либо множество $s(\Gamma)$ лежит в круге $|\lambda| < 1$, либо $|\lambda| = 1$ для некоторого $\lambda \in s(\Gamma)$. В первом случае в (16) $E_1 = E$, $E_2 = \{0\}$ и не выполняется требование $E_k \neq \{0\}$. Пусть имеет место второй случай: $\Gamma \varphi = \lambda \varphi$, $|\lambda| = 1$, $\varphi \neq 0$. Имеем

$$\|\Gamma^n \varphi\| = \|\lambda^n \varphi\| = \|\varphi\| = \text{const} \neq 0.$$

С другой стороны, предполагая выполненным разложение (16), (17), получим: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_k \in E_k$, откуда следует: либо $\|\Gamma^n \varphi\| \rightarrow 0$ (случай $\varphi_2 \equiv 0$), либо $\|\Gamma^n \varphi\| \rightarrow \infty$ (случай $\varphi_2 \neq 0$). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В случае $T = 0$ теорема 2 – критерий дихотомии для линейной автономной системы ФДУ запаздывающего типа.

ЗАМЕЧАНИЕ. В книге [19; § 12.10] получен достаточный признак экспоненциальной устойчивости для другого подкласса систем (1), основанный на анализе спектра генератора полугруппы операторов сдвига вдоль траекторий системы.

ПРИМЕР. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[x(t) - \int_0^1 s x(t-s) ds \right] = x(t-1), & t > 1, \\ x|_{[0,1]} = \varphi(t) \in E. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $N = 1$, $E = C([0, 1] \rightarrow \mathbb{C})$,

$$F = \begin{cases} 0, & 0 \leq s < 1, \\ 1, & s = 1, \end{cases} \quad \Delta(\xi) = \xi \left[1 - \int_0^1 s e^{-\xi s} ds \right] - e^{-\xi}.$$

Вычисления при $\xi \neq 0$ дают $\Delta(\xi) = \xi^{-1}(e^{-\xi} + \xi^2 - 1)$. Имеем

- 1) $\xi = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, значит, $\Delta(\xi) = (i\omega)^{-1}(e^{i\omega} - \omega^2 - 1) \neq 0$;
- 2) $\Delta(1/2) = 2(e^{1/2} - 3/4) < -1/4$, $\Delta(1) = e^{-1} > 0$, поэтому $\Delta(\xi_0) = 0$ при некотором $\xi_0 \in (1/2, 1)$.

Тем самым выполняются оба условия теоремы 2, и имеет место экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши (18).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, М., 1970.
- [2] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [3] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, М., 1970.
- [4] Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, “Некоторые гладкие эргодические системы”, *УМН*, **22**:5 (1967), 107–172.
- [5] В. В. Жиков, “Принцип усреднения на всей оси для параболических уравнений с переменным главным членом”, *Докл. АН СССР*, **208**:1 (1973), 32–35.
- [6] В. В. Жиков, “Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:6 (1976), 1380–1408.
- [7] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978.
- [8] Э. М. Мухамадиев, “Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций”, *Докл. АН СССР*, **196**:1 (1971), 47–49.
- [9] Р. К. Романовский, “Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными”, *Матем. сб.*, **133**:3 (1987), 341–355.
- [10] Р. К. Романовский, “Усреднение гиперболических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **306**:2 (1989), 286–289.
- [11] C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolutional Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

- [12] А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68.
- [13] А. Г. Баскаков, Ю. Н. Синтяев, “Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов: оценки решений”, *Дифференц. уравнения*, **46**:2 (2010), 210–219.
- [14] А. Г. Баскаков, А. А. Воробьев, М. Ю. Романова, “Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова”, *Матем. заметки*, **89**:2 (2011), 190–203.
- [15] Г. В. Демиденко, Ю. Ю. Клевцова, “Экспоненциальная дихотомия линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами”, *Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Матем., мех., информ.*, **8**:4 (2008), 40–48.
- [16] Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт, “Об экспоненциальной дихотомии линейных разностных систем с почти периодической матрицей”, *Матем. заметки*, **84**:4 (2008), 638–640.
- [17] Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт, “Об экспоненциальной дихотомии линейных систем с почти периодической матрицей”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:1 (2009), 190–198.
- [18] Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт, “Об экспоненциальной дихотомии решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости”, *Дифференц. уравнения*, **46**:8 (2010), 1125–1134.
- [19] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

Р. К. Романовский

Омский государственный технический университет

Е. М. Назарук

Омский государственный технический университет

E-mail: elmarnaz@mail.ru

Поступило

09.04.2012

Исправленный вариант

17.01.2013