Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Регуляризация бирациональных автоморфизмов, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 286–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 02:27:25

УДК 512.66

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ БИРАЦИОНАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

И. А. Чельцов

Рассмотрен вопрос об эффективной регуляризации бирациональных автоморфизмов многомерных алгебраических многообразий. Полученные методы явно применяются автором к нескольким трехмерным многообразиям Фано и к поверхностям дель Пеццо над алгебраически незамкнутым полем.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В данной работе будет представлен эффективный метод регуляризации конечных подгрупп бирациональных автоморфизмов алгебраических поверхностей и трехмерных алгебраических многообразий. Полученный результат будет применен к описанию конечных подгрупп бирациональных автоморфизмов гладкого двойного накрытия трехмерной квадрики, трехмерной квартики с одной обыкновенной двойной точкой, поверхностям дель Пеццо степени 2 и 3 над алгебраически незамкнутым полем (в частности, будет получен ответ на вопрос Манина, поставленный в книге [1]).

Всюду в статье все подразумевается проективным и определенным над полем $\mathbb{F}$ характеристики нуль. Следующий результат хорошо известен.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть X и Y – многообразия с каноническими особенностями и обильными каноническими дивизорами. Тогда каждое бирациональное отображение между X и Y является бирегулярным.*

В частности, из теоремы 1.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Пусть X – многообразие с каноническими особенностями и обильным каноническим дивизором. Тогда каждый бирациональный автоморфизм многообразия X бирегулярен.*

Из Программы минимальных моделей (см. [2]) вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть X – многообразие общего типа размерности 2 или 3. Тогда существует бирациональное отображение $\gamma: X \dashrightarrow V$ с*

$$\gamma \circ \text{Bir}(X) \circ \gamma^{-1} = \text{Aut}(V).$$

Легко видеть, что утверждение теоремы 1.3 не выполнено для многообразий с немаксимальной размерностью Кодaira.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Для многообразия X назовем подмножество S группы $\text{Bir}(X)$ *регуляризуемым на многообразии V посредством бирационального отображения $\gamma: X \dashrightarrow V$* , если

$$\gamma \circ S \circ \gamma^{-1} \subset \text{Aut}(V),$$

а отображение γ назовем *регуляризацией* множества $S \subset \text{Bir}(X)$.

Каждое регуляризуемое подмножество группы бирациональных автоморфизмов порождает регуляризуемую подгруппу, поэтому мы будем рассматривать в дальнейшем только регуляризуемые подгруппы.

Отметим, что регуляризация бирациональных автоморфизмов не определена единственным образом и существуют бирациональные автоморфизмы, не обладающие регуляризацией. Следующий результат принадлежит И. Долгачеву.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. *Достаточно общее бирациональное квадратичное преобразование проективной плоскости нерегуляризуемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим достаточно общее бирациональное квадратичное преобразование $T: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Можно считать, что порядок T бесконечен и T имеет три фундаментальные точки. Рассмотрим регуляризацию $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ автоморфизма T и бирегулярный автоморфизм $g = f^{-1} \circ T \circ f$.

Предположим, что $x_1, \dots, x_n$ — фундаментальные точки f^{-1} , не являющиеся фундаментальными точками T , и такие, что точки $T(x_1), \dots, T(x_n)$ не являются фундаментальными точками отображения T^{-1} . Рассмотрим соответствующие исключительные кривые E_i .

Кривая $g(E_i)$ стягивается в точку $y_i = T(x_i)$ морфизмом f и стягивается в точку x_j морфизмом f^{-1} , поскольку по предположению точка y_i не является фундаментальной точкой T^{-1} . Таким образом, g переставляет кривые E_i и некоторая степень g^N отображения g действует тривиально на кривых E_i . Следовательно, кривые E_i могут быть стянуты, что даст такую регуляризацию $h: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ бирационального автоморфизма T^N , что h имеет не более чем 6 фундаментальных точек: три фундаментальные точки T и три фундаментальные точки T^{-1} .

По построению бирегулярный автоморфизм $h^{-1} \circ T^N \circ h$ имеет бесконечный порядок. С другой стороны, группа автоморфизмов поверхности, полученной раздутием от 4 до 8 точек на $\mathbb{P}^2$, конечна. Значит, h является раздутием не более чем 3 точек и фундаментальные точки T и T^{-1} совпадают. С другой стороны, общее квадратичное преобразование таковым не является.

Заметим, что группа $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ порождена проективными автоморфизмами $\mathbb{P}^2$ и инволюциями Кремоны, которые все регуляризуемы.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. *Регуляризуемые элементы группы бирациональных автоморфизмов не обязательно образуют подгруппу.*

Таким образом, для данного многообразия естественно попытаться описать регуляризуемые подгруппы группы его бирациональных автоморфизмов. В общем случае такая проблема может быть очень сложной, однако хорошо известен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть X – алгебраическое многообразие, а $G \subset \text{Bir}(X)$ – конечная подгруппа. Тогда G регуляризируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поле рациональных функций $K(X)$ на X , возьмем нормальную проективную модель Y поля инвариантных функций $K(X)^G$ и рассмотрим нормализацию V многообразия Y в поле $K(X)$. В этом случае V бирационально эквивалентно многообразию X и группа G действует бирегулярно на V .

Следует отметить, что доказательство теоремы 1.7 не очень эффективно – для данного многообразия и данной конечной подгруппы группы его бирациональных автоморфизмов найти ее регуляризацию достаточно трудно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Основная цель данной работы – описать новый и эффективный способ регуляризации конечных подгрупп бирациональных автоморфизмов поверхностей и трехмерных многообразий.

В п. 6 полученный метод будет применен для нахождения регуляризации бирациональных инволюций двойного накрытия трехмерной квадрики.

Применение эквивариантного разрешения особенностей и применение Программы минимальных моделей дает следующее обобщение теоремы 1.7.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть X – многообразие размерности 2 или 3, а G – конечная подгруппа в $\text{Bir}(X)$. Тогда существует бирациональное отображение $\gamma: X \dashrightarrow Y$ на многообразии Y с терминальными особенностями такое, что либо канонический дивизор K_Y численно эффективен, либо Y обладает $(\gamma \circ G \circ \gamma^{-1})$ -эквивариантной структурой расслоения на многообразия Фано.

В дальнейшем мы применим эффективную регуляризацию к бирациональным автоморфизмам бирационально жестких многообразий Фано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Многообразие Фано X называется *бирационально жестким*, если X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ и X бирационально не эквивалентен никакому расслоению Мори¹, кроме самого себя.

Заметим, что из теоремы 1.9 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.11. Пусть X – бирационально жесткое многообразие Фано размерности не больше 3, а G – конечная подгруппа в $\text{Bir}(X)$. Тогда существует бирациональное отображение $\gamma: X \dashrightarrow Y$ на многообразии Фано Y с терминальными особенностями такое, что $\gamma \circ G \circ \gamma^{-1} \subset \text{Aut}(Y)$.

Таким образом, теорема 1.11 дает способ нахождения всех конечных подгрупп группы бирациональных автоморфизмов бирационально жестких поверхностей дель Пеццо и трехмерных многообразий Фано. В п. 6 теорема 1.11 будет применена к двойному накрытию трехмерной квадрики, в п. 7 – к особой трехмерной квартирке, а в п. 4 – к кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$ и двойному накрытию $\mathbb{P}^2$.

Рассмотрим несколько открытых вопросов, связанных с регуляризацией бирациональных автоморфизмов.

¹Расслоение $\tau: V \rightarrow Z$ называется *расслоением Мори*, если $\tau_*(\mathcal{O}_V) = \mathcal{O}_Z$, многообразие V имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, дивизор $-K_V$ является τ -обильным и $\text{Pic}(V/Z) = \mathbb{Z}$.

ГИПОТЕЗА 1.12. *Группа бирациональных автоморфизмов порождена регуляризуемыми бирациональными автоморфизмами.*

Отметим, что подгруппа группы бирациональных автоморфизмов, порожденная регуляризуемыми бирациональными автоморфизмами, является нормальной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.13. Гипотеза 1.12 выполнена для X , если группа $\text{Bir}(X)$ проста.

Утверждается гипотетически, что группы $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ и $\text{Bir}(\mathbb{P}^3)$ просты.

ГИПОТЕЗА 1.14. *Для данного многообразия X существуют порождающие группы $\text{Bir}(X)$, которые регуляризуемы на многообразиях, лежащих в конечном числе семейств.*

Хорошо известно, что гипотезы 1.12 и 1.14 выполнены для поверхностей и для многих трехмерных бирационально жестких многообразий Фано (см. [3] и [4]).

2. Подвижные лог-пары. В этом пункте будут рассмотрены свойства подвижных лог-пар, которые были введены и рассмотрены в современном виде Алексеевым в работе [5]. Результаты этого пункта будут использованы в следующем пункте для конструкции алгоритма регуляризации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Под *подвижной лог-парой*

$$(X, M_X) = \left(X, \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{M}_i \right)$$

будем подразумевать многообразие X вместе с формальной конечной линейной комбинацией линейных систем $\mathcal{M}_i$ без неподвижных компонент таких, что все числа b_i неотрицательны и рациональны.

Заметим, что каждая подвижная лог-пара может быть рассмотрена как обычная лог-пара. В частности, для подвижной лог-пары (X, M_X) дивизор $K_X + M_X$ будет называться *лог-каноническим дивизором* лог-пары (X, M_X) , а M_X будет называться *границей* подвижной лог-пары (X, M_X) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Прямой образ границы подвижной лог-пары естественно определен для любого бирационального отображения.

Если лог-канонический дивизор подвижной лог-пары является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором, такие понятия как дискрепантность, терминальность и каноничность могут быть определены для подвижных лог-пар аналогично соответствующим определениям для обычных лог-пар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Скажем, что подвижные лог-пары (X, M_X) и (Y, M_Y) *бирационально эквивалентны*, если существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$, такое что $M_Y = \rho(M_X)$.

Отметим, что любая подвижная лог-пара бирационально эквивалентна подвижной лог-паре с каноническими и терминальными особенностями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Для данной подвижной лог-пары (X, M_X) рассмотрим бирационально эквивалентную подвижную лог-пару (W, M_W) с каноническими особенностями. Выберем такое $n \gg 0$, что дивизор

$$D = n(K_W + M_W)$$

является дивизором Картье. В этом случае *размерностью Кодаиры* $\kappa(X, M_X)$ подвижной лог-пары (X, M_X) будем называть размерность Иитаки лог-пары (X, D) .

Можно показать, что размерность Кодаиры подвижной лог-пары корректно определена и одинакова для всех бирационально эквивалентных лог-пар.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Размерность Кодаиры подвижной лог-пары является неубывающей функцией от коэффициентов ее границы.

Следующее определение совпадает с классическим в случае пустой границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Скажем, что подвижная лог-пара (V, M_V) является *минимальной моделью* подвижной лог-пары (X, M_X) , если они бирационально эквивалентны, дивизор $K_V + M_V$ численно эффективен и (V, M_V) имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности.

Минимальная модель может не существовать и может не быть единственной. Однако минимальные модели важны в виду следующей стандартной гипотезы.

ГИПОТЕЗА 2.7. Пусть (X, M_X) – произвольная подвижная лог-пара. Тогда либо ее размерность Кодаиры неотрицательна и (X, M_X) бирационально эквивалентна минимальной модели, либо $\kappa(X, M_X) = -\infty$ и подвижная лог-пара (X, M_X) бирационально эквивалентна подвижной лог-паре (Y, M_Y) с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями такой, что Y имеет структуру расслоения Морфизма $f: Y \rightarrow Z$, а дивизор $-(K_Y + M_Y)$ является f -обильным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Гипотеза 2.7 выполнена в размерности 2 и 3.

Рассмотрим морфизм, связанный с минимальной моделью подвижной лог-пары.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Предположим, что подвижная лог-пара (X, M_X) является минимальной моделью. Тогда морфизм $I(X, M_X): X \rightarrow Z$ будем называть *морфизмом Иитаки* подвижной лог-пары (X, M_X) , если для некоторого обильного $\mathbb{Q}$ -Картье дивизора L на многообразии Z выполнено

$$K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} I(X, M_X)^*(L)$$

$$\text{и } I(X, M_X)_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z.$$

Что можно сказать о существовании морфизма Иитаки?

ГИПОТЕЗА 2.10. Морфизм Иитаки существует.

Отметим, что стандартная гипотеза о лог-избыточности (см. [2]) влечет гипотезу 2.10. В частности, гипотеза 2.10 выполнена для всех поверхностей и для всех трехмерных многообразий (см., например, [6]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11. Пусть X – алгебраическая поверхность или трехмерное многообразие, а (X, M_X) – подвижная лог-пара. В этом случае морфизм Иитаки минимальной модели подвижной лог-пары (X, M_X) существует.

Как уже упоминалось, минимальная модель подвижной лог-пары может не быть единственной. Однако, следующее рациональное отображение всегда единственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Предположим, что подвижная лог-пара (X, M_X) бирационально эквивалентна минимальной модели (V, M_V) посредством бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow V$, и предположим, что морфизм Иитаки подвижной лог-пары (V, M_V) существует. Тогда будем называть отображение

$$I(X, M_X) = I(V, M_V) \circ \rho$$

отображением Иитаки подвижной лог-пары (X, M_X) .

Можно показать, что в определении 2.12 отображение Иитаки подвижной лог-пары не зависит от выбора минимальной модели. Следующее определение является непосредственным обобщением классической канонической модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Будем говорить, что подвижная лог-пара (V, M_V) является канонической моделью подвижной лог-пары (X, M_X) в том случае, когда они бирационально эквивалентны, дивизор $K_V + M_V$ обилеи и особенности (V, M_V) каноничны.

Следующий результат доказывается аналогично соответствующему утверждению для обычных лог-пар (см. [6]).

ТЕОРЕМА 2.14. Каноническая модель единственна, если она существует.

Из теоремы 2.14 следует простой, но важный результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Предположим, что (X, M_X) – каноническая модель. Тогда все бирациональные автоморфизмы X , сохраняющие подвижную лог-пару (X, M_X) , бирегулярны.

Отметим, что если каноническая модель подвижной лог-пары (X, M_X) существует, то $\kappa(X, M_X)$ равно размерности многообразия X . Более того, легко видеть, что с точностью до гипотезы 2.7 выполнено и обратное (см. [2]).

3. Эффективная регуляризация. В этом пункте будет описан эффективный алгоритм нахождения регуляризации конечной подгруппы группы бирациональных автоморфизмов.

Пусть X – поверхность или трехмерное многообразие, а G – конечная подгруппа в $\text{Bir}(X)$. Зафиксируем некоторый очень обильный дивизор H на X вместе с неотрицательным рациональным числом μ и положим

$$(X, H_X^\mu) = \left(X, \sum_{g \in G} \mu g(|H|) \right).$$

По построению, подвижная лог-пара (X, H_X^μ) является G -инвариантной.

ЛЕММА 3.1. *Имеет место равенство $\kappa(X, H_X^\mu) = \dim(X)$ для $\mu \gg 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Размерность Кодaira подвижной лог-пары является неубывающей функцией от коэффициентов ее границы. Таким образом,

$$\kappa(X, H_X^\mu) \geq \kappa(X, \mu|H|).$$

Из обильности H следует, что $\kappa(X, \mu|H|) = \dim(X)$ для $\mu \gg 0$.

Итак, $\kappa(X, H_X^\mu) = \dim(X)$ для достаточно больших μ по лемме 3.1. Следовательно, утверждения 2.8 и 2.11 дают бирациональную перестройку $\sigma: X \dashrightarrow V$ такую, что подвижная лог-пара

$$(V, H_V^\mu) = (\sigma(X), \sigma(H_X^\mu))$$

является канонической моделью подвижной лог-пары (X, H_X^μ) .

ЛЕММА 3.2. *Рациональное отображение σ – регуляризация подгруппы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подвижная лог-пара (V, H_V^μ) является $(\sigma \circ G \circ \sigma^{-1})$ -инвариантной канонической моделью. Необходимое утверждение вытекает из следствия 2.15.

Таким образом, эффективно получена регуляризация группы G . В частности, получено эффективное доказательство теоремы 1.7 для поверхностей и трехмерных многообразий. Более того, принимая во внимание G -инвариантное разрешение особенностей и Лог-программу минимальных моделей, получаем, что последнее дает эффективную регуляризацию подгруппы G , удовлетворяющую всем требованиям теоремы 1.9.

Покажем теперь, что особенности самого многообразия V также канонические.

ЛЕММА 3.3. *Особенности V каноничны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из Второй главной теоремы работы [6] следует, что для некоторого рационального числа $\delta > \mu$ каноническая модель подвижной лог-пары (X, H_X^δ) является (V, H_V^δ) . В частности, оба лог-канонических дивизора

$$K_V + H_V^\mu \quad \text{и} \quad K_V + H_V^\delta$$

являются дивизорами $\mathbb{Q}$ -Картье. Значит, канонический дивизор

$$K_V \sim_{\mathbb{Q}} (K_V + H_V^\mu) - \frac{\mu}{\delta - \mu} [(K_V + H_V^\delta) - (K_V + H_V^\mu)]$$

также является дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье.

Подвижная лог-пара (V, H_V^μ) является канонической моделью. В частности, особенности подвижной лог-пары (V, H_V^μ) каноничны. С другой стороны, каноничность особенностей V следует из каноничности особенностей подвижной лог-пары (V, H_V^μ) и уже доказанного факта, что дивизор K_V является дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье.

4. Поверхности дель Пеццо. В этом пункте мы рассмотрим поверхности дель Пеццо над алгебраически замкнутым полем в контексте регуляризации бирациональных автоморфизмов.

Зафиксируем гладкую поверхность дель Пеццо X с $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ и K_X^2 равным 2 или 3. Отметим, что из условия $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ следует, что поле определения $\mathbb{F}$ не является алгебраически замкнутым.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Хорошо известно, что

$$X \cong \begin{cases} \text{двойное накрытие } \mathbb{P}^2, \text{ разветвленное в гладкой квартике, если } K_X^2 = 2, \\ \text{кубика в } \mathbb{P}^3, \text{ если } K_X^2 = 3. \end{cases}$$

Напомним коротко конструкцию инволюций Бертини и Гейзера поверхности X . Рассмотрим бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ такой, что поверхность W неособа и $K_W^2 > 0$. Из условия $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ следует, что антиканонический дивизор $-K_W$ численно эффективен и объемен. Следовательно, линейная система $| -nK_W |$ свободна для $n \gg 0$ и задает бирациональный морфизм на поверхность дель Пеццо V с каноническими особенностями степени 1 или 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Скажем, что бирациональное отображение $\phi|_{-nK_W} \circ f^{-1}$ является *стандартным* отображением поверхности дель Пеццо X в поверхность дель Пеццо V .

Можно показать, что в случае $K_V^2 = 1$ поверхность V является двойным накрытием квадратичного конуса в $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике, а в случае $K_V^2 = 2$ поверхность V является двойным накрытием $\mathbb{P}^2$ с ветвлением в квартике. Таким образом, V обладает канонической бирегулярной инволюцией, которая индуцирует бирациональную инволюцию τ поверхности дель Пеццо X . В случае, когда поверхность V гладкая, инволюция τ не бирегулярна и τ называется *инволюцией Бертини* в случае $K_V^2 = 1$ или *инволюцией Гейзера* в случае $K_V^2 = 2$. Классические и более геометричные определения инволюций Бертини и Гейзера можно найти в работах [7] и [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Поверхность V гладкая тогда и только тогда, когда $V \cong W$.

Важность и сущность инволюций Бертини и Гейзера выражена в следующем классическом результате Манина (см. [7] и [8]).

ТЕОРЕМА 4.4. *Поверхность X бирационально жесткая, а группа $\text{Bir}(X)$ является полупрямым продуктом группы $\text{Aut}(X)$ и подгруппы, порожденной всеми инволюциями Бертини и Гейзера поверхности X .*

В работе [9] был доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.5. *Предположим, что Y – поверхность дель Пеццо с каноническими особенностями, бирационально эквивалентная поверхности X . Тогда Y может быть получена стандартным преобразованием поверхности X .*

Отметим, что из теорем 4.5 и 1.11 вытекает следующее.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. *Каждая конечная подгруппа группы $\text{Bir}(X)$ является либо подгруппой группы $\text{Aut}(X)$, либо подгруппой группы $\text{Aut}(V)$, где V – гладкая поверхность дель Пеццо, полученная стандартным преобразованием из поверхности X .*

5. Вопрос Ю. И. Манина. В этом пункте мы ответим на вопрос Манина, поставленный в [1].

Пусть X – гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ с $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ над алгебраически незамкнутым полем $\mathbb{F}$, а G – группа бирациональных автоморфизмов поверхности X , порожденная всеми инволюциями Бертини и инволюциями Гейзера поверхности X .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из построения инволюций Бертини и Гейзера следует, что G является нормальной подгруппой в группе $\text{Bir}(X)$.

Следующий результат является специальным случаем теоремы 4.4.

ТЕОРЕМА 5.2. *Кубика X бирационально жестка, а группа $\text{Bir}(X)$ является полупрямым произведением группы G и группы $\text{Aut}(X)$.*

В работе [1] был поставлен вопрос о том, какие элементы групп G и $\text{Bir}(X)$ имеют конечный порядок. Отметим, что конечный порядок имеют все бирегулярные автоморфизмы кубики X , инволюции Бертини и Гейзера, а также все сопряженные им элементы группы $\text{Bir}(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пусть θ – бирегулярный автоморфизм кубики X , а τ – бирациональная инволюция Бертини или бирациональная инволюция Гейзера кубики X такая, что $\theta \circ \tau = \tau \circ \theta$. Тогда $\tau \circ \theta$ имеет конечный порядок.

Несколько позднее, Каневский описал в работе [10] элементы группы G , которые имеют конечный порядок. Отметим, что его метод чисто теоретико-групповой и основан на образующих соотношениях в группе G , найденных в [8].

ТЕОРЕМА 5.4. *Каждый бирациональный автоморфизм кубики X конечного порядка сопряжен в группе $\text{Bir}(X)$ одному из следующих бирациональных автоморфизмов:*

- а) *бирегулярный автоморфизм кубики X ;*
- б) *инволюция Бертини;*
- в) *инволюция Гейзера;*
- г) *композиция коммутирующих между собой бирегулярного автоморфизма кубической поверхности X и инволюции Бертини или Гейзера.*

Отметим, что теоремы 5.2 и 5.4 влекут следующее

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Элементы конечного порядка в группе G сопряжены с инволюциями Бертини и Гейзера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.4. Пусть τ – элемент конечного порядка в $\text{Bir}(X)$. Необходимо показать, что τ сопряжен одному из следующих бирациональных автоморфизмов: бирегулярный автоморфизм кубики X ; инволюция Бертини; инволюция Гейзера; композиция коммутирующих между собой бирегулярного автоморфизма кубики X и инволюции Бертини или Гейзера.

Из бирациональной жесткости кубики X и теоремы 1.11 следует, что бирациональный автоморфизм τ может быть регуляризован на некоторой гладкой поверхности дель Пеццо Y . Таким образом, существует бирациональное отображение $\gamma: X \dashrightarrow Y$ такое, что $\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \in \text{Aut}(Y)$. С другой стороны, по теореме 4.5 поверхность Y бирегулярна либо самой кубике X , либо раздутию кубики X . В первом случае τ сопряжен бирегулярному автоморфизму поверхности X . Можно считать, что существует раздутие $f: Y \rightarrow X$ и $K_Y^2 = 1$ или $K_Y^2 = 2$.

Предположим, что $K_Y^2 = 2$. Тогда

$$\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}K_Y \oplus \mathbb{Z}E,$$

где E – исключительный дивизор раздутия f .

Отметим, что действие $\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$ на $\text{Pic}(Y)$ должно сохранять класс K_Y . Если

$$\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}(E) \sim E,$$

то отображение $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1}$ бирегулярно. Таким образом, можно считать, что кривая E не $(\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})$ -инвариантна. Непосредственные вычисления дают

$$(\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})^*(K_X) \sim 2f^*(K_X) + 3E, \quad (\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})^*(E) \sim -f^*(K_X) - 2E.$$

Из конструкции инволюции Гейзера следует, что для некоторой инволюции Гейзера σ кубической поверхности X действие

$$\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma \circ f$$

на группе $\text{Pic}(Y)$ тривиально. Значит, отображение $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma$ является бирегулярным автоморфизмом кубики X , который, к тому же, сохраняет точку $f(E)$, откуда следует, что $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma$ коммутирует с инволюцией σ .

Предположим теперь, что $K_Y^2 = 1$ и

$$\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}K_Y \oplus \mathbb{Z}E,$$

где E – исключительный дивизор бирационального морфизма f .

Можно считать, что действие $\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$ на $\text{Pic}(Y)$ нетривиально, поскольку в противном случае бирациональный автоморфизм $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1}$ бирегулярен. Непосредственные вычисления показывают, что

$$(\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})^*(K_X) \sim 5f^*(K_X) + 6E, \quad (\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})^*(E) \sim -4f^*(K_X) - 5E.$$

Из конструкции инволюции Бертини следует, что для некоторой инволюции Бертини σ кубики X композиция $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma$ бирегулярна и сохраняет $f(E)$, откуда следует, что автоморфизм $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma$ коммутирует с σ .

Теперь рассмотрим оставшийся случай: $K_Y^2 = 1$ и

$$\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}K_Y \oplus \mathbb{Z}E_1 \oplus \mathbb{Z}E_2,$$

где E_1 и E_2 – две различные исключительные кривые морфизма f .

Как и в двух предыдущих случаях можно считать, что действие $\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$ на группе $\text{Pic}(Y)$ нетривиально. По аналогичным причинам можно считать, что

$$\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}(E_1 \cup E_2) \neq E_1 \cup E_2.$$

Предположим, что кривая E_1 является $(\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})$ -инвариантной. В этом случае положим $g: Y \rightarrow V$ – сдвиг кривой E_1 . Тогда $g \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ g^{-1}$ является бирегулярным автоморфизмом поверхности V . С другой стороны, поверхность V является гладкой поверхностью дель Пеццо с $K_Y^2 = 2$. Теперь, как и в случае, когда $K_Y^2 = 2$, несложно показать, что автоморфизм $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1}$ является композицией инволюции Гейзера кубики X и коммутирующего бирегулярного автоморфизма кубики X .

Можно считать, что ни одна из кривых E_i не является $(\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})$ -инвариантной, откуда следует, что

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})^*(K_X) &\sim 5f^*(K_X) + 6E_1 + 6E_2, \\ (\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})^*(E_1) &\sim -2f^*(K_X) - 2E_1 - 3E_2, \\ (\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1})^*(E_2) &\sim -2f^*(K_X) - 3E_1 - 2E_2. \end{aligned}$$

Из конструкции инволюции Бертини следует, что $f \circ \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} \circ f^{-1}$ является композицией коммутирующих инволюции Бертини кубики X и бирегулярного автоморфизма кубики X .

6. Двойное накрытие квадрики. В этом пункте мы эффективно применим алгоритм регуляризации, полученный в пункте 3.

Зафиксируем двойное накрытие

$$\theta: X \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^4$$

гладкой трехмерной квадрики Q , разветвленное в гладкой октике $S \subset Q$. Многообразие X является многообразием Фано с $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ и $-K_X^3 = 4$. Более того, X бирационально жестко (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Назовем кривую $C \subset X$ *прямой*, если $-K_X \cdot C = 1$.

Многообразие X содержит одномерное семейство прямых, если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Каждая прямая C на X индуцирует бирациональную инволюцию τ_C в $\text{Bir}(X)$ такую, что τ_C небирегулярна в том и только том случае, когда $\theta(C) \not\subset S$ (см. [3]). Сущность инволюций τ_C заключена в следующем результате Исковских (см. [3]).

ТЕОРЕМА 6.2. *Группа $\text{Bir}(X)$ является полупрямым произведением группы автоморфизмов трехмерного многообразия X и нормальной подгруппы, порожденной небирегулярными инволюциями τ_C .*

Инволюции τ_C регуляризируемы по теореме 1.7. Значит, из теоремы 6.2 следует, что гипотезы 1.12 и 1.14 выполнены для многообразия X .

Зафиксируем прямую C на X такую, что $\theta(C)$ не содержится в поверхности S . Тогда бирациональная инволюция τ_C не бирегулярна и из теоремы 1.11 следует существование бирационального отображения $\gamma: X \dashrightarrow X_C$ такого, что X_C — трехмерное многообразие Фано с терминальными особенностями и

$$\gamma \circ \tau_C \circ \gamma^{-1} \in \text{Aut}(X_C).$$

Теперь покажем, как явно построить бирациональное отображение γ , используя полученный алгоритм регуляризации. Для некоторого рационального числа $\mu > 0$ рассмотрим подвижную лог-пару

$$(X, H_X^\mu) = (X, \mu| - K_X| + \mu\tau_C(| - K_X|)).$$

ЛЕММА 6.3. *Особенности подвижной лог-пары (X, H_X^μ) терминальны для $\mu < 1/10$, каноничны для $\mu = 1/10$ и неканоничны для $\mu > 1/10$. Более того,*

$$\kappa(X, H_X^\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{для } \mu < \frac{1}{10}, \\ 0 & \text{для } \mu = \frac{1}{10}, \\ 3 & \text{для } \mu > \frac{1}{10}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения получаются с помощью легких вычислений, основанных на непосредственной конструкции бирациональной инволюции τ_C , приведенной в работе [3].

Значит, по следствию 2.15 отображение $I(X, H_X^\mu)$ является регуляризацией бирациональной инволюции τ_C для $\mu > 1/10$. Опишем явно отображение Иитаки $I(X, H_X^\mu)$ для $\mu > 1/10$. Раздуем $f: W \rightarrow X$ прямую C . Пусть Z – единственная базисная кривая линейной системы $|-K_W|$. Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую Z , положим $G = g^{-1}(Z)$ и рассмотрим подвижную лог-пару

$$(V, H_V^\mu) = (V, (f \circ g)^{-1}(H_X^\mu)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Подвижная лог-пара (V, H_V^μ) терминальна для всех $\mu > 0$.

Значит, можно применить Лог-программу минимальных моделей к (V, H_V^μ) и получить для $\mu > 1/10$ бирациональное отображение $\rho: V \dashrightarrow Y$ такое, что подвижная лог-пара $(Y, H_Y^\mu) = (Y, \rho(H_V^\mu))$ имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, а дивизор $K_Y + H_Y^\mu$ численно эффективен и объемен.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Явная конструкция отображения ρ описана в работе [9], где показано, что ρ является композицией флопа в некоторой кривой T , содержащейся в дивизоре G , а стягиванием собственного образа дивизора G в циклическую фактор-особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

Для $\mu = 1/10$ бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ является крепантным по отношению к подвижной лог-паре (X, H_X^μ) . Значит, $K_Y + H_Y^\mu \sim_{\mathbb{Q}} 0$ для $\mu = 1/10$ и, следовательно, антиканонический дивизор $-K_Y$ является численно эффективным и объемным. Теперь можно применить утверждение 2.11 к подвижной лог-паре (Y, H_Y^μ) для $\mu > 1/10$ и получить бирациональный морфизм

$$I(Y, H_Y^\mu) = \psi_{|-n(K_Y + H_Y^\mu)|} \quad \text{для некоторого } n \gg 0.$$

По построению $X_C = I(Y, H_Y^\mu)(Y)$ является многообразием Фано с каноническими особенностями. Более того, можно показать, что бирациональный морфизм $I(Y, H_Y^\mu)$ не стягивает дивизоров на многообразии Y . Таким образом, особенности многообразия X_C терминальны, но легко видеть, что они не $\mathbb{Q}$ -факториальны. Следовательно, для $\mu > 1/10$ бирациональное отображение

$$\gamma = I(Y, H_Y^\mu) \circ \rho \circ (f \circ g)^{-1}$$

является требуемой регуляризацией бирациональной инволюции τ_C .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Из конструкции отображения γ следует, что $-K_{X_C}^3 = 1/2$.

В работе [9] был доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть Y – многообразие Фано с каноническими особенностями, которое бирационально эквивалентно многообразию X . Тогда

$$Y \cong \begin{cases} X, \\ X_C \quad \text{для некоторой прямой } C \text{ на } X. \end{cases}$$

Таким образом, теорема 1.11 влечет следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.8. *Все конечные подгруппы группы $\text{Bir}(X)$ являются подгруппами групп $\text{Aut}(X)$ и $\text{Aut}(X_C)$ для некоторой прямой C на X .*

Для каждой прямой C на X группа $\text{Aut}(X_C)$ канонически содержит подгруппу $\mathbb{Z}_2$, которая индуцирует бирациональную инволюцию τ_C на многообразии X . Более того, можно показать, что для достаточно общего X

$$\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}(X_C) \cong \mathbb{Z}_2.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.9. *Для достаточно общего двойного накрытия квадрики X все конечные подгруппы группы $\text{Bir}(X)$ изоморфны $\mathbb{Z}_2$ и сопряжены подгруппам, которые порождены инволюциями τ_C и инволюцией, индуцированной двойным накрытием θ .*

7. Особая трехмерная кватрика. В этом пункте мы применим теорему 1.11 к особой трехмерной кватрике.

Пусть X – достаточно общая кватрика в $\mathbb{P}^4$, имеющая одну особую точку O такую, что локально O изоморфно обыкновенной двойной точке. Отметим, что X является многообразием Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Кватрика X содержит ровно 24 различных прямых, проходящих через особую точку O и группа $\text{Aut}(X)$ тривиальна.

В работе [9] было показано следующее.

ТЕОРЕМА 7.2. *Для точки O и каждой прямой C на X , проходящей через особую точку O , существуют бирациональные перестройки*

$$\psi_O: X \dashrightarrow X_O \quad \text{и} \quad \psi_C: X \dashrightarrow X_C$$

такие, что многообразия X_O и X_C являются трехмерными многообразиями Фано с каноническими особенностями, $-K_{X_O}^3 = 2$ и $-K_{X_C}^3 = 1/2$. Для каждого трехмерного многообразия Фано Y с каноническими особенностями, которое бирационально изоморфно кватрике X , выполнено следующее:

$$Y \cong \begin{cases} X, \\ X_O, \\ X_C \end{cases} \quad \text{для некоторой прямой } C \text{ на } X, \text{ проходящей через точку } O.$$

Бирациональная жесткость X доказана в [4] вместе со следующим результатом.

ТЕОРЕМА 7.3. *Точка O и каждая прямая C на кватрике X , проходящая через особую точку O , индуцируют бирациональные инволюции τ_O и τ_C кватрики X соответственно. Более того, инволюции τ_O и τ_C порождают группу $\text{Bir}(X)$.*

Инволюции τ_O и τ_C регуляризируемы, и гипотезы 1.12 и 1.14 выполнены для кватрики X . Из теорем 1.11 и 7.2 следует, что бирациональные инволюции τ_O и τ_C регуляризируются на многообразиях X_O и X_C , а следующее утверждение было доказано в [9].

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.4. *Бирациональные отображения ψ_O и ψ_C являются регуляризацией бирациональных инволюций τ_O и τ_C соответственно.*

Бирациональные отображения ψ_O и ψ_C можно построить аналогично тому, как была построена регуляризация бирациональных инволюций двойного накрытия трехмерной квадррики в предыдущем пункте.

Из общности многообразия X следует, что

$$\mathrm{Aut}(X_C) \cong \mathrm{Aut}(X_0) \cong \mathbb{Z}_2.$$

СЛЕДСТВИЕ 7.5. *Все конечные подгруппы группы $\mathrm{Bir}(X)$ изоморфны $\mathbb{Z}_2$ и сопряжены с подгруппами, которые порождены инволюциями τ_C и τ_O .*

Автор выражает свою благодарность М. Гриненко, В. А. Исковских и В. В. Шокурову за полезные беседы и В. Клейнерту, А. Радтке, М. Росчену и Л. Воцлаву за их гостеприимство во время проживания автора в Берлине.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Манин Ю. И. Кубические формы. М.: Наука, 1972.
- [2] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [3] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Современные проблемы математики. 1979. Т. 13. С. 159–236.
- [4] Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерной кваттики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1988. Т. 135. С. 472–496.
- [5] Alexeev V. General elephants of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Comp. Math. 1994. V. 91. P. 91–116.
- [6] Шокуров В. В. 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81. P. 2667–2699.
- [7] Manin Yu. I. Rational surfaces over perfect fields // Publ. Math. IHES. 1966. V. 30. P. 55–114.
- [8] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями II // Матем. сб. 1967. Т. 72. С. 161–192.
- [9] Чельцов И. А. Антиканоические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 4. С. 147–172.
- [10] Каневский Д. Структура групп, связанных с автоморфизмами кубических поверхностей // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 2. С. 252–264.

Университет штата Джорджия, США
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступило
20.01.2003
Исправленный вариант
23.05.2003