Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Вронский, Уточнение сильной версии центральной предельной теоремы для ассоциированных процессов, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 513–522

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm971>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:54:45

УДК 519.21

УТОЧНЕНИЕ СИЛЬНОЙ ВЕРСИИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ АССОЦИИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ

М. А. Вронский

В работе доказывается сходимость почти наверное логарифмических усреднений $(\log n)^{-1} \sum_{j=1}^n f(S_j/\sqrt{j})/j$, где S_n – частичные суммы стационарного ассоциированного процесса. Устанавливается асимптотическая гауссовость нормированной разности таких средних и предельного значения.

Библиография: 13 названий.

Введение. За последние десять лет в области предельных теорем теории вероятностей было получено большое число результатов, связанных с так называемыми сильными версиями предельных теорем. Первым утверждением такого типа стала доказанная Брозамлером [1] и Шатте [2] центральная предельная теорема (ЦПТ) почти наверное. А именно, пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$. Тогда для любой функции f , принадлежащий $\text{Lip}(\mathbb{R})$ – классу липшицевых функций на $\mathbb{R}$, имеет место сходимость

$$(\log n)^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{f(S_j/\sqrt{j})}{j} \xrightarrow{\text{п.н.}} Ef(\xi) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

здесь $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. В [1] и [2] этот результат был доказан при условии конечности $E|X_j|^{2+\delta}$ для некоторого $\delta > 0$, которое впоследствии было снято. Новый подход к доказательству сильных версий предельных теорем был предложен недавно Ибрагимовым и Лифшицем (см. [3], [4]).

В связи с соотношением (1) естественным образом возникает вопрос, нельзя ли нормировать разность

$$\sum_{j=1}^n \frac{f(S_j/\sqrt{j}) - Ef(\xi)}{j}$$

каким-либо образом, чтобы получить невырожденный предельный закон? В работе [5] Чоргё и Хорват получили результат, из которого, в частности, следует, что если дополнительно потребовать, чтобы $EX_1^2(\log(1 + |X_1|))^{1+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то для

любой неубывающей функции $f \in \text{Lip}(\mathbb{R})$ имеет место сходимость

$$(\log n)^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{f(S_j/\sqrt{j}) - \mathbb{E}f(\xi)}{j} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, A^2(f)),$$

где

$$A^2(f) = \int_{\mathbb{R}} \text{cov}(f(\zeta(t)), f(\zeta(0))) dt, \quad (2)$$

где $\zeta(t)$ – стандартный процесс Орнштейна–Уленбека (с ковариационной функцией $B(s, t) = e^{-|t-s|/2}$).

В этой заметке мы получим аналоги этих утверждений для более широкого класса, нежели независимые слагаемые, а именно для последовательности ассоциированных случайных величин. Напомним (см., например, [6]), что последовательность $\{Y_n\}$ действительных случайных величин называется *ассоциированной*, если для любого конечного набора $Y_1, \dots, Y_d$ и любых ограниченных по координатам неубывающих функций $g, h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\text{cov}(g(Y_1, \dots, Y_d), h(Y_1, \dots, Y_d)) \geq 0.$$

Для ассоциированного процесса $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ коэффициент Кокса–Гриммета [7] определяется формулой

$$u_Y(m) = \sup_j \sum_{|q-j| \geq m} \text{cov}(Y_j, Y_q). \quad (3)$$

В замечательной работе Ньюмена [8] было установлено, что для центрированного стационарного ассоциированного процесса $\{Y_j\}$ с $0 < u_Y(0) < \infty$ выполняется центральная предельная теорема в форме

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, u_Y(0)).$$

Заметим, что для стационарного ассоциированного процесса имеет место равенство

$$u_Y(0) = \sigma^2 = \mathbb{D}Y_1 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \text{cov}(Y_1, Y_j).$$

Результат Ньюмена допускает обобщение на нестационарный случай (с соответствующим завышением моментных требований). Нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 0.1 (см., например, [7], [9]). Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ – последовательность ассоциированных центрированных величин, удовлетворяющая условиям:

- 1) $u_Y(0) < \infty$, $u_Y(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$;
- 2) $\sup_j \mathbb{E}|Y_j|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$;
- 3) $\varliminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathbb{D}(Y_1 + \dots + Y_n) > 0$.

Тогда имеет место сходимость

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{\mathbb{D}(Y_1 + \dots + Y_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Мы также будем пользоваться частным случаем леммы из [10] об оценке ковариаций липшицевых функций от ассоциированных величин.

ЛЕММА 0.2. Пусть X, Y – ассоциированные случайные величины, функции $g, h \in \text{Lip}(\mathbb{R})$ с константами Липшица L_g и L_h соответственно. Тогда выполняется оценка

$$\text{cov}(g(X), h(Y)) \leq L_g L_h \text{cov}(X, Y).$$

Всюду ниже будем обозначать буквой C положительные константы (которые могут быть разными в различных выражениях).

1. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\{X_j, j \in \mathbb{N}\}$ – стационарный ассоциированный центрированный процесс с $0 < u_X(0) = \sigma^2 < \infty$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда для любой $f \in \text{Lip}(\mathbb{R})$ имеет место сходимость

$$(\log n)^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{f(S_j/\sqrt{j})}{j} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}f(\xi) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

здесь $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

ТЕОРЕМА 1.2. В условиях предыдущей теоремы для любой монотонной ограниченной $f \in \text{Lip}(\mathbb{R})$, не равной тождественно константе, имеет место сходимость

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n \frac{f(S_j/\sqrt{j}) - \mathbb{E}f(S_j/\sqrt{j})}{j} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma_n^2 = \mathbb{D} \sum_{j=1}^n \frac{f(S_j/\sqrt{j}) - \mathbb{E}f(S_j/\sqrt{j})}{j}. \quad (5)$$

Кроме того, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{\log n} = A^2(f, \sigma) > 0,$$

здесь $A^2(f, \sigma)$ вычисляется по формуле (2) с заменой $\zeta(t)$ на $\sigma\zeta(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Теоремы 1.1 и 1.2 справедливы и для нестационарного случая. Достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия теоремы 0.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. В работе [11] теорема 1.1 была получена (для нестационарного случая) при ограничении $u_X(m) = O(m^{-\alpha})$, $\alpha > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. С помощью теоремы 1.2 можно усилить результат Чоргё и Хорвата, потребовав для независимых одинаково распределенных величин конечности $\mathbb{E}X_1^2 \times \sqrt{\log(|\bar{X}_1| + 1)}$ (это условие нужно, чтобы $\mathbb{E}f(S_j/\sqrt{j})$ было близко к $\mathbb{E}f(\xi)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$). Эффект здесь, по-видимому, заключается в том, что в [5] использовался сильный принцип инвариантности, для справедливости которого требуются дополнительные моментные условия на случайные величины. В то же время кажется естественным, что операция усреднения должна “улучшать” свойства последовательности.

2. Доказательство теоремы 1.1. Обозначим $\xi_n = S_n/\sqrt{n}$. Заметим сначала, что любая $f \in \text{Lip}(\mathbb{R})$ растёт не быстрее линейной, и $\mathbb{E}\xi_n^2 \leq \sigma^2$, откуда вытекает, что величины $\{f(\xi_n)\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемы. По центральной предельной теореме Ньюмена (см. введение) для любой такой f

$$\mathbb{E}f(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}f(\xi) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Поэтому из леммы Теплица (см., например, [12, с. 416]) следует, что (4) эквивалентно сходимости

$$Y_n(f) - \mathbb{E}Y_n(f) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0,$$

где мы обозначили $Y_n(f) = (\log n)^{-1} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)/j$. Сначала докажем сходимость в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Имеем

$$\mathbb{E}(Y_n(f) - \mathbb{E}Y_n(f))^2 = D(\log n)^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{f(\xi_j) - \mathbb{E}f(\xi_j)}{j} = (\log n)^{-2} \sigma_n^2.$$

Величину σ_n^2 можно записать следующим образом (см. (5)):

$$\sigma_n^2 = \sum_{j,q=1}^n \frac{\text{cov}(f(\xi_j), f(\xi_q))}{jq}.$$

Поскольку величины ξ_j и ξ_q ассоциированы, то, применяя лемму 0.2, получаем, что

$$\sigma_n^2 \leq (L_f)^2 \sum_{j,q=1}^n \frac{\text{cov}(\xi_j, \xi_q)}{jq},$$

где L_f – константа Липшица для f . Учитывая, что $\text{cov}(\xi_j, \xi_q) \leq \sigma^2(j \wedge q)/\sqrt{jq}$, несложно получить (аналогично [13]), что $\sigma_n^2 \leq C \log n$, откуда следует сходимость в L^2 . Выбирая подпоследовательность $n_k = [e^{k^2}]$, по лемме Бореля–Кантелли получаем, что

$$Y_{n_k}(f) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}f(\xi) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Для $n_k \leq n < n_{k+1}$ имеем

$$\begin{aligned} |Y_n(f) - Y_{n_k}(f)| &= \left| \left(\frac{\log n_k}{\log n} - 1 \right) Y_{n_k}(f) + \frac{1}{\log n} \sum_{j=n_k}^n \frac{f(\xi_j)}{j} \right| \\ &\leq \left(1 - \frac{\log n_k}{\log n_{k+1}} \right) |Y_{n_k}(f)| + \left(\frac{\log n_{k+1}}{\log n} Y_{n_{k+1}}(|f|) - \frac{\log n_k}{\log n} Y_{n_k}(|f|) \right) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Слагаемое $I_1 \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ как произведение сходящейся почти наверное последовательности на неслучайную, стремящуюся к нулю. Слагаемое $I_2 \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ как разность последовательностей, сходящихся почти наверное к одному и тому же пределу (мы воспользовались тем, что $|f| \in \text{Lip}(\mathbb{R})$, если $f \in \text{Lip}(\mathbb{R})$). Теорема 1.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.2. Введем новый процесс

$$Z_k = \sum_{j=[e^k]}^{[e^{k+1}]-1} \frac{f(\xi_j) - \mathbf{E}f(\xi_j)}{j}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Видно, что он центрированный, ассоциированный и ограниченный (последние свойства следуют из монотонности и ограниченности f). Оценим его ковариационную функцию. Для $k < m$

$$\text{cov}(Z_k, Z_m) = \sum_{j=[e^k]}^{[e^{k+1}]-1} \sum_{q=[e^m]}^{[e^{m+1}]-1} \frac{\text{cov}(f(\xi_j), f(\xi_q))}{jq}.$$

По уже использовавшейся оценке это выражение не превосходит

$$C \sum_{j=[e^k]}^{[e^{k+1}]-1} \sum_{q=[e^m]}^{[e^{m+1}]-1} \frac{1}{j^{1/2}q^{3/2}} \leq C e^{(k+1)/2} e^{-m/2} \leq C e^{-|k-m|/2}.$$

Константа C в последнем выражении зависит только от f и σ^2 . Значит, коэффициент Кокса–Гриммета процесса $\{Z_k, k \in \mathbb{N}\}$ убывает экспоненциально (см. (3)):

$$u_Z(r) \leq C e^{-r/2}.$$

Далее будет доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{\log n} = A^2(f, \sigma) > 0. \quad (6)$$

Тогда $s_m^2 = D(Z_1 + \dots + Z_m) = \sigma_{n_m}^2 \sim A^2(f, \sigma)m$. Значит, последовательность $\{Z_k, k \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы 0.1, т.е.

$$T_m = \frac{Z_1 + \dots + Z_m}{s_m} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ найдем $m = m(n)$ так, чтобы $[e^m] \leq n < [e^{m+1}]$, тогда

$$\sum_{j=1}^n \frac{f(\xi_j) - \mathbf{E}f(\xi_j)}{j}$$

отличается от T_m не больше, чем на константу, зависящую от f . Следовательно, нормированная функцией $\sqrt{\log n} \sim m(n)$ при $n \rightarrow \infty$, эта случайная величина будет сходиться к нормальной.

Итак, осталось доказать (6). Без ограничения общности будем считать $\sigma^2 = 1$. Пусть W_t – стандартный винеровский процесс. Сначала покажем, что

$$\delta_{jq} = \text{cov}(f(\xi_j), f(\xi_q)) - \text{cov}\left(f\left(\frac{W_j}{\sqrt{j}}\right), f\left(\frac{W_q}{\sqrt{q}}\right)\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \wedge q \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Для этого оценим

$$\left| \operatorname{cov}(\exp\{it\xi_j\}, \exp\{is\xi_q\}) - \operatorname{cov}\left(\exp\left\{\frac{itW_j}{\sqrt{j}}\right\}, \exp\left\{\frac{isW_q}{\sqrt{q}}\right\}\right) \right|.$$

Это выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \exp\{it\xi_j + is\xi_q\} - \mathbb{E} \exp\left\{\frac{itW_j}{\sqrt{j}} + \frac{isW_q}{\sqrt{q}}\right\} \right| \\ & + \left| \mathbb{E} \exp\{it\xi_j\} - \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \right| + \left| \mathbb{E} \exp\{it\xi_q\} - \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \right| = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Здесь $I_2, I_3 \rightarrow 0$ при $j \wedge q \rightarrow \infty$ по ЦПТ Ньюмена (мы воспользовались тем, что характеристическая функция по модулю не превосходит единицы). Если $q = j \rightarrow \infty$, то из ЦПТ Ньюмена следует, что $I_1 \rightarrow 0$. Предположим, что $q > j$. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{t}{\sqrt{j}} + \frac{s}{\sqrt{q}}\right)S_j + i\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)(S_q - S_j)\right\} \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{t}{\sqrt{j}} + \frac{s}{\sqrt{q}}\right)W_j + i\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)(W_q - W_j)\right\} \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{t}{\sqrt{j}} + \frac{s}{\sqrt{q}}\right)S_j + i\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)(S_q - S_j)\right\} \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{t}{\sqrt{j}} + \frac{s}{\sqrt{q}}\right)S_j\right\} \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)(S_q - S_j)\right\} \right| \\ & \quad + \left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{t}{\sqrt{j}} + \frac{s}{\sqrt{q}}\right)S_j\right\} \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)(S_q - S_j)\right\} \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{t}{\sqrt{j}} + \frac{s}{\sqrt{q}}\right)W_j\right\} \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)(W_q - W_j)\right\} \right|. \end{aligned}$$

Применяя лемму 0.2 (и неравенство $|ab - cd| \leq |a - c| + |b - d|$, справедливое для $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, не превосходящих по модулю единицы), получаем, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 4 \left| \frac{t}{\sqrt{j}} + \frac{s}{\sqrt{q}} \right| \cdot \left| \frac{s}{\sqrt{q}} \right| \cdot \operatorname{cov}(S_j, S_q - S_j) \\ & \quad + \left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(t + s\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{q}}\right)\frac{S_j}{\sqrt{j}}\right\} - \mathbb{E} \exp\left\{i\left(t + s\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{q}}\right)\frac{W_j}{\sqrt{j}}\right\} \right| \\ & \quad + \left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(s\frac{\sqrt{q-j}}{\sqrt{q}}\right)\frac{S_{q-j}}{\sqrt{q-j}}\right\} - \mathbb{E} \exp\left\{i\left(s\frac{\sqrt{q-j}}{\sqrt{q}}\right)\frac{W_{q-j}}{\sqrt{q-j}}\right\} \right| \\ & = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

В J_1 появляется множитель 4, поскольку лемма 0.2 справедлива, вообще говоря, для действительных функций. Для фиксированных $s, t \in \mathbb{R}$ имеем

$$J_1 \leq 4 \frac{\sum_{r=1}^j u_X(r)}{j} \cdot \left| t + s\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{q}} \right| \cdot \left| s\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{q}} \right| \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$ равномерно по всем $q > j$, поскольку $u_X(r)$ – коэффициент Кокса–Гриммета процесса $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ – стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Далее, $J_2 \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно по $q > j$, поскольку $S_j/\sqrt{j} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$, а сходимость соответствующих характеристических функций равномерна на компактах. Аналогично $J_3 \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно по $q > j + \sqrt{j}$, а при $j < q \leq j + \sqrt{j}$

$$J_3 \leq s^2(\mathbb{E}S_{q-j}^2 + \mathbb{E}W_{q-j}^2)q^{-1} \leq 2s^2j^{-1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Далее, за счет того, что система величин $\{\xi_j, W_q/\sqrt{q}, j, q \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема, сводим доказательство (7) к случаю функции f с компактным носителем. Приближая функцию с компактным носителем тригонометрическим полиномом равномерно на этом носителе, выводим (7).

Теперь докажем, что

$$(\log n)^{-1} \sum_{j,q=1}^n \frac{|\delta_{jq}|}{jq} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Из леммы 0.2 следует, что для любых $j \leq q$ справедливо неравенство $|\delta_{jq}| \leq C\sqrt{j/q}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем k такое, что при $j \wedge q \geq k$ выполняется $|\delta_{jq}| \leq \varepsilon$ (это можно сделать по (7)). Тогда

$$\sum_{j,q=1}^n \frac{|\delta_{jq}|}{jq} \leq \sum_{j,q=k}^n \frac{|\delta_{jq}|}{jq} + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{q=j}^n j^{-1/2} q^{-3/2}.$$

Вторая сумма эквивалентна $\log k$ и после деления на $\log n$ может быть с ростом n сделана сколь угодно малой. Оценим первую. Она не превосходит

$$2 \sum_{k \leq j \leq q \leq n} \frac{\varepsilon \wedge \sqrt{j/q}}{jq} = 2 \sum_{q=k}^n \sum_{1 \leq j \leq \varepsilon^2 q} \frac{\sqrt{j/q}}{jq} + 2 \sum_{q=k}^n \sum_{\varepsilon^2 q \leq j \leq q} \frac{\varepsilon}{jq} = I_1 + I_2.$$

Далее,

$$I_1 \leq C \sum_{q=k}^n \sqrt{\varepsilon^2 q} q^{-3/2} \sim C\varepsilon \log n,$$

$$I_2 \leq C \sum_{q=k}^n \varepsilon q^{-1} (\log q - \log(\varepsilon^2 q)) \sim C\varepsilon (-\log \varepsilon) \log n.$$

Итак, I_1 и I_2 , деленные на $\log n$, могут быть сделаны сколь угодно малыми. Тем самым, сходимость к нулю в (8) доказана. Значит, предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{\log n},$$

если он существует, совпадает с

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{j, q=1}^n \frac{\text{cov}(f(W_j/\sqrt{j}), f(W_q/\sqrt{q}))}{jq} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{j, q=1}^n \frac{\text{cov}(f(\zeta(\log j - \log q)), f(\zeta(0)))}{jq} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{j, q=1}^n \frac{h(\log j - \log q)}{jq}, \end{aligned}$$

здесь $\zeta(t) = e^{-t/2} W_{e^t}$ – процесс Орнштейна–Уленбека, а

$$h(t) = \text{cov}(f(\zeta(t)), f(\zeta(0))). \quad (9)$$

Сходимость в (6) вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $h(t)$ – положительная, четная функция, удовлетворяющая для $t, y \in \mathbb{R}$ неравенствам

$$|h(t+y) - h(t)| \leq C|y|^{1/2}, \quad h(t) \leq C \exp\left\{-\frac{|t|}{2}\right\}. \quad (10)$$

Тогда

$$\frac{1}{\log n} \sum_{j, q=1}^n \frac{h(\log(j/q))}{jq} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Доказательство этой леммы для полноты изложения дано в виде приложения. Ясно, что определенная в (9) функция $h(t)$ четна, положительность следует из ассоциированности процесса $\zeta(t)$. Неравенства (10) следуют из липшицевости f и леммы 0.2 соответственно. Положительность предельного интеграла легко вытекает из того, что в противном случае должно выполняться условие $Df(\zeta(0)) = 0$. Теорема 1.2 доказана.

Приложение. Докажем (11). Оценим по модулю разность

$$\Delta_{jq} = h(\log j - \log q) \cdot j^{-1} - \int_{\log j}^{\log(j+1)} h(t - \log q) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_{jq}| &\leq |h(\log j - \log q) \cdot j^{-1} - h(\log j - \log q) \cdot (\log(j+1) - \log j)| \\ &\quad + \left| h(\log j - \log q) (\log(j+1) - \log j) - \int_{\log j}^{\log(j+1)} h(t - \log q) dt \right| \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого можно написать оценку

$$I_1 \leq C \cdot \frac{1}{j^2} \cdot \left(\left(\frac{j}{q} \right)^{1/2} \wedge \left(\frac{q}{j} \right)^{1/2} \right),$$

а для второго –

$$I_2 \leq C(\log(j+1) - \log j)^{3/2} \wedge \left((\log(j+1) - \log j) \left(\frac{j+1}{q} \right)^{1/2} \right)$$

(мы воспользовались неравенствами (10)). Значит,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n |\Delta_{jq}| &\leq C \frac{1}{\log n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \left(\sum_{j=1}^q \frac{1}{j^2} \frac{j^{1/2}}{q^{1/2}} + \sum_{j=q+1}^n \frac{1}{j^2} \frac{q^{1/2}}{j^{1/2}} \right) \\ &\quad + C \frac{1}{\log n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor q^{1/2} \rfloor} \frac{1}{j} \frac{(1+j)^{1/2}}{q^{1/2}} + \sum_{j=\lfloor q^{1/2} \rfloor + 1}^n \frac{1}{j^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} \leq C, \quad \sum_{n=k}^{\infty} n^{-1-\delta} \leq Ck^{-\delta}, \quad \sum_{n=1}^k n^{\delta-1} \leq Ck^{\delta}$$

для $\delta > 0$, получаем, что (12) не превосходит

$$\frac{C}{\log n} \left(\sum_{q=1}^n \frac{1}{q^{3/2}} + \sum_{q=1}^n \frac{q^{1/2}}{q} \frac{1}{q^{3/2}} + \sum_{q=1}^n \frac{1}{q^{3/2}} q^{1/4} + \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \frac{1}{q^{1/4}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

поскольку все суммы в скобках в правой части последнего выражения ограничены константами. Значит, искомый предел (если он существует) совпадает с пределом выражения

$$\frac{1}{\log n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n \int_{\log j}^{\log(j+1)} h(t - \log q) dt = \frac{1}{\log n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \int_{-\log q}^{\log n - \log q} h(u) du.$$

А это выражение, в свою очередь, отличается от

$$\frac{\sum_{q=1}^n 1/q}{\log n} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \sim \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

по модулю на величину

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\log n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{-\log q} h(t) dt + \int_{\log n - \log q}^{\infty} h(t) dt \\ &\leq \frac{C}{\log n} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} (e^{-\log q/2} + e^{(\log q - \log n)/2}) \\ &\leq \frac{C}{\log n} \left(\sum_{q=1}^n q^{-3/2} + n^{-1/2} \sum_{q=1}^n q^{-1/2} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.

Автор благодарен профессору А.В. Булинскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brosamler G. A. An almost everywhere central limit theorem // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1988. V. 104. P. 561–574.
- [2] Shatte P. On the central limit theorem with almost sure convergence // Probab. Math. Statist. 1991. V. 11. № 2. P. 237–246.
- [3] Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А. О предельных теоремах типа “почти на верное” // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 2. С. 328–350.
- [4] Ibragimov I., Lifshits M. On the convergence of generalized moments in almost sure central limit theorem // Statist. Probab. Letters. 1998. V. 40. P. 343–351.
- [5] Csörgö M., Hórvath L. Invariance principles for logarithmic averages // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1992. V. 112. № 1. P. 195–205.
- [6] Esary J., Proschan F., Walkup D. Association of random variables with applications // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 1466–1474.
- [7] Cox J. T., Grimmett G. Central limit theorem for associated random variables and the percolation model // Ann. Probab. 1984. V. 12. P. 514–528.
- [8] Newman C. M. Normal fluctuations and FKG inequalities // Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 119–128.
- [9] Bulinski A. V., Keane M. S. Invariance principle for associated fields // J. of Math. 1996. V. 1. № 3. P. 10–17.
- [10] Булинский А. В., Шабанович Э. Асимптотическое поведение некоторых функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 2. С. 479–492.
- [11] Matula P. On the almost sure central limit theorem for associated random variables // Probab. Math. Statist. 1998. V. 18. № 2. P. 411–416.
- [12] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
- [13] Булинский А. В., Вронский М. А. Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 4. С. 999–1018.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mvronski@mail.ru

Поступило
29.10.1999