Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Карбоне, Ф. Фаньола, Экспоненциальная сходимость в L^2 квантовых марковских полугрупп на $\mathcal{B}(h)$, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 523–538

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm972>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:44:40

УДК 517

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ В L^2 КВАНТОВЫХ МАРКОВСКИХ ПОЛУГРУПП НА $\mathcal{B}(h)$

Р. Карбоне, Ф. Фаньола

С квантовой марковской полугруппой $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ на $\mathcal{B}(h)$, имеющей точное нормальное инвариантное состояние ρ , мы связываем полугруппу $T^{(s)}$ ($s \in [0, 1]$), действующую на множестве операторов Гильберта–Шмидта на h по правилу $T_t^{(s)}(\rho^{s/2} x \times \rho^{(1-s)/2}) = \rho^{s/2} \mathcal{T}_t(x) \rho^{(1-s)/2}$. Это позволяет использовать спектральную теорию для изучения инфинитезимального генератора $L^{(s)}$ полугруппы $T^{(s)}$ и получить информацию о скорости сходимости к равновесному состоянию из оценок величины спектральной щели оператора $L^{(s)}$. Этот метод применяется для класса квантовых марковских полугрупп на $\mathcal{B}(h)$ с $s = 1/2$. Получены простые, но достаточно общие достаточные условия, а также необходимые и достаточные условия для положительности $\text{gap}(L^{(1/2)})$. Для класса уравнений, представляющих физический или вероятностный интерес, значение $\text{gap}(L^{(1/2)})$ либо вычисляется точно, либо оценивается.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Квантовой динамической полугруппой на алгебре $\mathcal{B}(h)$ всех ограниченных операторов на гильбертовом пространстве h называется w^* -непрерывная полугруппа $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ вполне положительных и w^* -непрерывных операторов на $\mathcal{B}(h)$. Квантовая динамическая полугруппа называется *консервативной*, если $\mathcal{T}_t(1) = 1$ для любого $t \geq 0$, где 1 – единичный оператор на h . В этом случае она называется *квантовой марковской полугруппой* (КМП).

Мы рекомендуем читателю работу [1], посвященную детальному изучению свойства вполне положительности. Здесь мы лишь напомним, что сохраняющие единицу вполне положительные отображения удовлетворяют так называемому *неравенству Шварца*, именно, для любого $x \in \mathcal{B}(h)$ выполнено

$$\mathcal{T}_t(x^*) \mathcal{T}_t(x) \leq \mathcal{T}_t(x^* x).$$

КМП являются естественным обобщением классических марковских полугрупп. Они появились в физической литературе для описания сходимости состояний открытых квантовых систем к равновесию. Равновесное состояние представляется положительным

Второй автор является членом GNIFA-INdAM (Италия).

оператором ρ со следом 1 таким, что $\text{tr}(\rho \mathcal{T}_t(x)) = \text{tr}(\rho x)$ для любого $x \in \mathcal{B}(h)$. Сходимость к равновесному состоянию ρ означает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}(\sigma \mathcal{T}_t(x)) = \text{tr}(\rho x)$$

для любого $x \in \mathcal{B}(h)$ и любого положительного оператора σ с единичным (или конечным) следом. В приложениях иногда делается предположение о том, что такая сходимость имеет место с экспоненциальной скоростью. Однако, строгое доказательство этого факта часто отсутствует.

Скорость сходимости классических марковских полугрупп активно изучалась в различных работах (см. [2]–[4] и приведенные там ссылки). Один из наиболее мощных технических подходов в классическом случае состоит в том, чтобы связать с данной марковской полугруппой $(\mathcal{S}_t)_{t \geq 0}$ на пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ограниченных измеримых функций над $\mathbb{R}^d$ с инвариантной плотностью π другую полугруппу $(S_t)_{t \geq 0}$ на $L^2(\mathbb{R}^d)$, заданную соотношением $S_t(\pi^{1/2} f) = \pi^{1/2} \mathcal{S}_t(f)$. Это позволяет изучать задачу о сходимости, используя спектральный анализ для генератора полугруппы $(S_t)_{t \geq 0}$.

В настоящей статье мы изучаем эту задачу для КМП с точным нормальным инвариантным состоянием ρ . Мы заменяем пространство $L^2(\mathbb{R}^d)$ на пространство $L^2(h)$ операторов Гильберта–Шмидта. Вложение $f \rightarrow \pi^{1/2} f$, отображающее $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, может быть заменено на $x \rightarrow \rho^{s/2} x \rho^{(1-s)/2}$ ($s \in [0, 1]$), отображающее $\mathcal{B}(h)$ в $L^2(h)$. Мы докажем (теорема 2.3), что любая КМП $\mathcal{T}$ порождает сильно непрерывную сжимающую полугруппу $(T_t^{(s)})_{t \geq 0}$ на $L^2(h)$, которая для произвольных $x \in \mathcal{B}(h)$ и $t \geq 0$ характеризуется следующим образом:

$$T_t^{(s)}(\rho^{s/2} x \rho^{(1-s)/2}) = \rho^{s/2} \mathcal{T}_t(x) \rho^{(1-s)/2}.$$

Ниже мы изучаем преимущественно *симметричное вложение*, отвечающее $s = 1/2$, которое сохраняет положительность и просто в применении.

Пусть h – гильбертово пространство $l^2(\mathbb{N})$ комплексных последовательностей, абсолютно суммируемых в квадрате. Рассмотрим КМП $\mathcal{T}$ на $\mathcal{B}(h)$, имеющую формальный инфинитезимальный генератор

$$\begin{aligned} L(x) &= -\frac{1}{2} \{ \mu^2(N)x - 2\mu(N)SxS^*\mu(N) + x\mu^2(N) \} \\ &= -\frac{1}{2} \{ \lambda^2(N)x - 2\lambda(N)S^*xS\lambda(N) + x\lambda^2(N) \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где S и N являются операторами сдвига и числа частиц (оператор умножения N -й компоненты вектора на ее номер) соответственно, λ и μ – две положительные функции, определенные на $\mathbb{N}$.

Инфинитезимальный генератор $L^{(1/2)}$ полугруппы $T^{(1/2)}$, связанной с $\mathcal{T}$, может быть представлен в виде последовательности трехдиагональных матриц. Первый оператор является генератором процессов рождения и уничтожения со скоростями $\lambda(n)$ и $\mu(n)$; остальные члены являются возмущениями.

В качестве основного результата мы получаем достаточно общее достаточное условие (теорема 4.2) на $\lambda(n), \mu(n)$ для того, чтобы щель $\text{gar}(L^{1/2})$ была строго положительной. Более того, при дополнительном предположении мы показываем (теорема 4.4), что щель $\text{gar}(L^{1/2})$ строго положительна, если и только если инвариантное состояние имеет, грубо говоря, экспоненциально убывающие “хвосты”.

В качестве приложения в п. 5 доказано, что КМП для модели Джейнса–Каммингса, используемой в квантовой оптике, имеет строго положительную щель. Мы также приводим результаты для других КМП, связанных с генератором (1).

2. Вложение в L^2 и спектральная щель. Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ – положительная сжимающая полугруппа на $\mathcal{B}(h)$. Все состояния на $\mathcal{B}(h)$ предполагаются нормальными. Состояние ρ называется *инвариантным* относительно $\mathcal{T}$, если $\text{tr}(\rho \mathcal{T}_t(x)) = \text{tr}(\rho x)$ для любого x и любого $t \geq 0$. Кроме того, состояние ρ называется *точным*, если из условия $\text{tr}(\rho x) = 0$ следует, что $x = 0$ для любого неотрицательного x .

Изучение скорости сходимости к инвариантному состоянию может быть выполнено путем естественного перехода в гильбертово пространство $L^2(h)$ операторов Гильберта–Шмидта на h , снабженное скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \text{tr}(x^* y)$. Это позволяет применить технику квадратичных форм.

Для этой цели мы используем следующее вложение:

$$i_s: \mathcal{B}(h) \rightarrow L^2(h), \quad i_s(x) = \rho^{s/2} x \rho^{(1-s)/2},$$

для $s \in [0, 1]$. Вложение, соответствующее $s = 1/2$ (соответственно $s = 0$ или $s = 1$), называется *симметричным* (соответственно *правым* или *левым*).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если $\rho \ddot{E}$ – точное состояние, то i_s является инъективным сжимающим отображением с плотной областью значений. Для $s = 1/2$ оно сохраняет положительность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку состояние ρ точное, отображение i_s инъективно для любого s . Кроме того, его область значений плотна, поскольку она содержит все операторы конечного ранга. По определению отображение $i_{1/2}$, очевидно, сохраняет положительность. Наконец, i_s является сжимающим, поскольку для любого x из $\mathcal{B}(h)$ в силу неравенства Гёльдера для идеалов Шаттена мы имеем

$$\begin{aligned} \|i_s(x)\|_2 &= \sup_{y \in L^2(h), \|y\|_2 \leq 1} \text{tr}(y i_s(x)) \leq \sup_{y \in L^2(h), \|y\|_2 \leq 1} \|\rho^{(1-s)/2} y \rho^{s/2}\|_1 \|x\|_\infty \\ &\leq \sup_{y \in L^2(h), \|y\|_2 \leq 1} \|\rho^{s/2}\|_{2/s} \|\rho^{(1-s)/2}\|_{2/(1-s)} \|y\|_2 \|x\|_\infty = \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Оператору $\mathcal{R}: \mathcal{B}(h) \rightarrow \mathcal{B}(h)$ мы ставим в соответствие оператор $R^{(s)}$, так что

$$R^{(s)} \circ i_s = i_s \circ \mathcal{R}.$$

Заметим, что отображение $R^{(s)}$ корректно определено на плотном подпространстве $i_s(\mathcal{B}(h)) \subset L^2(h)$, поскольку отображение i_s инъективно. Теперь мы докажем, что $R^{(s)}$ имеет ограниченное продолжение на пространство $L^2(h)$. Следующее предложение является обобщением результата [5, с. 18, лемма 1.3] на бесконечномерный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{R}$ – линейный оператор на $\mathcal{B}(h)$, удовлетворяющий неравенству Шварца, и пусть ρ – состояние такое, что $\text{tr}(\rho\mathcal{R}(x)) \leq \text{tr}(\rho x)$ для всех положительных x из $\mathcal{B}(h)$. Тогда соответствующие операторы $R^{(s)}$ на $L^2(h)$ являются сжимающими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ортонормированный базис $(e_k)_{k \geq 0}$, диагонализующий состояние ρ . Введем проекторы $P_n = \sum_{k=0}^n |e_k\rangle\langle e_k|$ и подпространства $\mathcal{B}_n = P_n \mathcal{B}(h) P_n$, $\mathcal{M} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$. Определим оператор

$$V: \mathcal{M} \rightarrow L^2(h), \quad V(x\rho^{1/2}) = \mathcal{R}(x)\rho^{1/2}.$$

Заметим, что V имеет единственное сжимающее продолжение на $L^2(h)$, так как для любого $x \in \mathcal{B}(h)$ выполнено

$$\|V(x\rho^{1/2})\|_2^2 = \text{tr}(\rho^{1/2}\mathcal{R}(x)^*\mathcal{R}(x)\rho^{1/2}) \leq \text{tr}(\rho\mathcal{R}(x^*x)) \leq \text{tr}(\rho x^*x) = \|x\rho^{1/2}\|_2^2.$$

Зафиксируем n из $\mathbb{N}$ и определим операторы

$$\Delta_n: L^2(h) \rightarrow \mathcal{M}, \quad x \rightarrow \rho(P_n x P_n)\rho^{-1}; \quad \Delta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad x \rightarrow \rho x \rho^{-1}.$$

Очевидно, что операторы Δ_n ограничены. Кроме того, они симметричны и положительны, так как проекторы P_n коммутируют с ρ , и поэтому

$$\langle x, \Delta_n x \rangle = \text{tr}(x^* \rho P_n x P_n \rho^{-1}) = \text{tr}(\rho^{-1/2} P_n x^* \rho^{1/2} P_n^2 \rho^{1/2} x P_n \rho^{-1/2}) \geq 0.$$

Эти тождества также выполнены для отображения Δ , поэтому для любого $t \in (0, 1)$ мы имеем $\Delta_n^t(x) = \rho^t(P_n x P_n)\rho^{-t}$. Более того, поскольку подпространства $\mathcal{B}_n$ инвариантны относительно Δ , замыкание Δ является самосопряженным (это можно доказать, например, применяя следствие 1 из [6], или, иначе, рассматривая Δ как оператор умножения на $\mathcal{M}$).

Теперь мы можем заметить, что для всех x из $\mathcal{M}$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \langle V^* \Delta_n V(x\rho^{1/2}), x\rho^{1/2} \rangle &= \langle \Delta_n(\mathcal{R}(x)\rho^{1/2}), \mathcal{R}(x)\rho^{1/2} \rangle = \text{tr}(\rho\mathcal{R}(x)P_n\mathcal{R}(x)^*P_n) \\ &\leq \text{tr}(\rho\mathcal{R}(x)\mathcal{R}(x)^*) \leq \text{tr}(\rho\mathcal{R}(xx^*)) \leq \text{tr}(\rho xx^*) = \langle \Delta(x\rho^{1/2}), x\rho^{1/2} \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство $V^* \Delta_n V \leq \Delta$ доказано. Более того, поскольку V является сжимающим, мы имеем (см. [5, с. 18, лемма 1.2]) $(V^* \Delta_n V)^t \geq V^* \Delta_n^t V$. Таким образом, $\Delta^t \geq V^* \Delta_n^t V$ в силу известного свойства t -корней ($t \in [0, 1]$) положительных операторов. Поэтому для всех $x \in \mathcal{M}$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \|R^{(s)}(i_s(x))\|_2^2 &= \text{tr}(\mathcal{R}(x)^* \rho^s \mathcal{R}(x) \rho^{1-s}) = \lim_n \text{tr}(\mathcal{R}(x)^* \rho^s P_n(\mathcal{R}(x)) P_n \rho^{1-s}) \\ &= \lim_n \langle V^* \Delta_n^s V(x\rho^{1/2}), x\rho^{1/2} \rangle \leq \langle \Delta^s(x\rho^{1/2}), x\rho^{1/2} \rangle = \|i_s(x)\|_2^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{M} = i_s(\mathcal{M})$ плотно в $L^2(h)$, то $R^{(s)}$ имеет сжимающее расширение на $L^2(h)$, которое мы будем обозначать тем же символом $R^{(s)}$.

Теперь мы рассмотрим свойства полугрупп.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathcal{T}$ – полугруппа отображений Шварца $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ на $\mathcal{B}(h)$. Предположим, что существует точное состояние ρ такое, что $\text{tr}(\rho \times \mathcal{T}_t(x)) \leq \text{tr}(\rho x)$ для всех $x \geq 0$ и всех $t \geq 0$. Тогда для любого s из $[0, 1]$ существует единственная сжимающая полугруппа $T^{(s)} = (T_t^{(s)})_{t \geq 0}$ на $L^2(h)$ такая, что для всех $x \in \mathcal{B}(h)$ выполнено соотношение

$$T_t^{(s)}(i_s(x)) = i_s(\mathcal{T}_t(x)). \quad (2)$$

Кроме того, если полугруппа $\mathcal{T}$ w^* -непрерывна, то полугруппа $T^{(s)}$ сильно непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы $T_t^{(s)}$ являются корректно определенными и сжимающими согласно предложению 2.2. Единственность следует из (2) и плотности $i_s(\mathcal{B}(h))$ в $L^2(h)$.

Мы можем легко проверить полугрупповое свойство. Действительно, мы имеем соотношение

$$T_{r+t}^{(s)}(i_s(x)) = i_s \circ \mathcal{T}_{r+t}(x) = i_s \circ \mathcal{T}_r \circ \mathcal{T}_t(x) = T_r^{(s)} \circ i_s \circ \mathcal{T}_t(x) = T_r^{(s)} T_t^{(s)}(i_s(x))$$

для всех $x \in \mathcal{B}(h)$, $t, r > 0$, и дополнительно $T_0^{(s)}(i_s(x)) = i_s(\mathcal{T}_0(x)) = i_s(x)$.

Предположим теперь, что полугруппа $\mathcal{T}$ w^* -непрерывна и докажем, что $T^{(s)}$ сильно непрерывна. Пусть $\mathcal{M}$ является линейным многообразием операторов конечного ранга и пусть $\tilde{x} = i_s(x)$ с $x \in \mathcal{M}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T_t^{(s)}(\tilde{x}) - \tilde{x}\|_2^2 &= \|T_t^{(s)}(\tilde{x})\|_2^2 + \|\tilde{x}\|_2^2 - \text{tr}(T_t^{(s)}(\tilde{x})^* \tilde{x} + \tilde{x}^* T_t^{(s)}(\tilde{x})) \\ &\leq 2\|\tilde{x}\|_2^2 - \text{tr}(T_t^{(s)}(\tilde{x})^* \tilde{x} + \tilde{x}^* T_t^{(s)}(\tilde{x})) = 2 \text{Re}(\text{tr}(\rho^{1-s} x^* \rho^s (x - \mathcal{T}_t(x)))). \end{aligned}$$

Правая часть обращается в нуль при t , стремящемся к 0, в силу w^* -непрерывности $\mathcal{T}$. Это доказывает, что $T^{(s)}$ сильно непрерывна на $\mathcal{M}$. Используя плотность $\mathcal{M}$ в $L^2(h)$ и свойство сжимаемости операторов $T_t^{(s)}$, мы завершаем доказательство.

Пусть $L^{(s)}$ является инфинитезимальным генератором полугруппы $T^{(s)}$. Тогда (с доказательством таким же как и в приводимом далее предложении 3.2(1)) для любого x из $D(\mathcal{L})$ выполнено $i_s(x) \in D(L^{(s)})$ и $L^{(s)}(i_s(x)) = i_s(\mathcal{L}(x))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть L – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной сжимающей полугруппы $T = (T_t)_{t \geq 0}$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с инвариантным вектором v . Мы называем *спектральной целью* оператора L неотрицательное число

$$\text{gap}(L) = \inf \{ -\text{Re}\langle x, Lx \rangle \mid x \in D(L), \|x\| = 1, \langle v, x \rangle = 0 \}.$$

Следующее предложение может быть доказано по аналогии с [3, с. 410, теорема 2.3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. При наложенных выше предположениях спектральная щель оператора L равна максимальному положительному значению ε , удовлетворяющему неравенству

$$\|T_t x - \langle v, x \rangle v\| \leq e^{-\varepsilon t} \|x - \langle v, x \rangle v\|$$

для любых x из $\mathcal{H}$ и $t \geq 0$.

Мы применим этот результат для $\mathcal{H} = L^2(h)$ и $v = \rho^{1/2}$.

Приведенное выше утверждение обобщает классические идеи (см., например, работы Чена [2] и Лиггета [3]), посвященные изучению сходимости к равновесным состояниям полугрупп на коммутативных алгебрах фон Неймана. Квантовый случай, однако, является более сложным, поскольку ρ и $\mathcal{I}_t(x)$ не коммутируют (см., например, утверждение предложения 2.2).

Обобщения на произвольные алгебры фон Неймана изучались в работах [7], [8]. Здесь, однако, мы не затрагиваем универсальный подход и напомним лишь некоторые результаты из [3], используемые в дальнейшем.

Рассмотрим инфинитезимальный генератор $\mathcal{A}$ марковской полугруппы $(\mathcal{S}_t)_{t \geq 0}$ на $l^\infty(\mathbb{N})$ с инвариантной мерой $\pi = \sum_{k \geq 0} \pi_k e_k$ такой, что $\pi_k > 0$ для любого k . Множество $\{\pi^{1/2} f \mid f \in l^\infty(\mathbb{N})\}$ плотно в $l^2(\mathbb{N})$, и для любого f из $l^\infty(\mathbb{N})$ при $t \geq 0$ мы можем определить $S_t(\pi^{1/2} f) = \pi^{1/2} \mathcal{S}_t f$. В этом случае все вложения с помощью отображений i_s для $s \in [0, 1]$ совпадают.

Если обозначить через A инфинитезимальный генератор полугруппы $(S_t)_{t \geq 0}$ на $l^2(\mathbb{N})$, то $\pi^{1/2} f$ принадлежит $D(A)$ для любого f из $D(\mathcal{A})$ и $A(\pi^{1/2} f) = \pi^{1/2} \mathcal{A} f$. Спектральная щель $\text{gap}(A)$ задается определением 2.4.

В дальнейшем мы обозначаем через $q(j, k)$ элемент с индексами (j, k) в матричном представлении $\mathcal{A}$ и предполагаем, что множество C функций, заданных на множестве натуральных чисел и равное постоянным величинам вне некоторого конечного множества, является ядром для $\mathcal{A}$. Мы отсылаем читателя к работе [3, с. 413, предложение 3.5] за доказательством следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Предположим, что $q(x, y) = 0$ при $|x - y| > 1$ и существуют положительные константы c, d и $\gamma \in]0, 1[$ такие, что

$$\sum_{n > k} \pi_n \leq c \pi_k q(k, k+1), \quad \sum_{n > k} \gamma^{-n} \pi_n q(n, n+1) \leq d \pi_k q(k, k+1) \gamma^{-k}.$$

Тогда

$$\text{gap}(A) \geq \frac{1}{cd + c(1 - \gamma)^{-1}}.$$

3. Класс квантовых марковских полугрупп. В этом пункте изучается класс КМП с генераторами $L(x)$ ($x \in \mathcal{B}(h)$), заданными в виде (1) и связанными с полугоралинейными формами.

Зафиксируем $h = l^2(\mathbb{N})$ и каноническую ортонормированную систему $(e_n)_{n \geq 0}$, оператор правого сдвига S , заданный формулой $S e_n = e_{n+1}$, и оператор числа частиц N

$$D(N) = \left\{ u \in h \mid \sum_{n \geq 0} n^2 |u_n|^2 < \infty \right\}, \quad Nu = \sum_{n \geq 0} n u_n e_n.$$

Пусть $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ и $(\mu_n)_{n \geq 1}$ — две последовательности строго положительных вещественных чисел. Положим $\mu_0 = 0$ и обозначим через $\lambda(N)$ и $\mu(N)$ самосопряженные операторы на h , определенные с помощью функций на $\mathbb{N}$, именно $\lambda(N)e_n = \lambda_n e_n$ и $\mu(N)e_n = \mu_n e_n$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ линейное многообразие операторов конечного ранга. Можно доказать, что существуют квантовые динамические полугруппы на $\mathcal{B}(h)$ с генератором $\mathcal{L}$, заданным в виде (1) на $\mathcal{M}$. К сожалению, мы не имеем возможности описать подробно эту конструкцию. В значительно более общей ситуации она описана в работах [9], [1]. Кроме того, общая теория, развиваемая в настоящей работе, позволяет построить выделенный элемент $\mathcal{T}$ из этого класса, порождаемый оператором числа частиц N и называемый *минимальной* квантовой динамической полугруппой, которая сохраняет абелеву алгебру, называемую *диагональной алгеброй*.

Пусть M_f обозначает оператор умножения на функцию $f \in l^\infty(N)$ с финитным носителем. Очевидно, что имеет место равенство $\mathcal{L}(M_f) = M_g$, где

$$g(n) = \mu_n^2(f(n-1) - f(n)) + \lambda_n^2(f(n+1) - f(n)), \quad n \geq 0$$

(значение $f(-1)$ произвольно, поскольку $\mu_0 = 0$). Таким образом, сужение $\mathcal{T}$ на диагональную алгебру совпадает с марковской полугруппой классического процесса рождения-уничтожения.

Известно (см. [10]), что $\mathcal{T}$ является консервативной (марковской), если и только если

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_0^2 \cdots \lambda_{n-1}^2}{\mu_1^2 \cdots \mu_n^2} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_1^2 \cdots \mu_k^2}{\lambda_0^2 \cdots \lambda_k^2} = \infty. \quad (3)$$

Кроме того, классическое сужение имеет инвариантную меру, если и только если

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_0^2 \cdots \lambda_{n-1}^2}{\mu_1^2 \cdots \mu_n^2} < \infty \quad (4)$$

(см. [10]). Поэтому если (4) выполнено, инвариантное состояние для $\mathcal{T}$ задается формулой

$$\rho = \sum_{n \geq 0} \rho_n |e_n\rangle \langle e_n|, \quad \rho_0 = c, \quad \rho_n = c \frac{\lambda_0^2 \cdots \lambda_{n-1}^2}{\mu_1^2 \cdots \mu_n^2} \text{ для } n \geq 1, \quad (5)$$

с подходящей нормировочной постоянной c . Окончательно мы имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Предположим, что $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ и $(\mu_n)_{n \geq 1}$ удовлетворяют условиям (3) и (4). Тогда существует единственная КМП $\mathcal{T}$ с генератором $\mathcal{L}$, заданным условием (1) на $\mathcal{M}$. Точное состояние ρ , заданное (5), инвариантно относительно $\mathcal{T}$.*

Рассмотрим полугруппы, вложенные в $L^2(h)$ с помощью i_s .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Предположим, что $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ и $(\mu_n)_{n \geq 1}$ удовлетворяют условиям (3) и (4). Пусть $T^{(s)}$ является единственной сильно непрерывной полугруппой на $L^2(h)$, удовлетворяющей соотношению (2), и пусть $L^{(s)}$ является ее инфинитезимальным генератором. Тогда*

- (1) *для любого $x \in D(\mathcal{L})$ оператор Гильберта–Шмидта $i_s(x)$ принадлежит области определения $L^{(s)}$ и выполняется соотношение $L^{(s)}(i_s(x)) = i_s(\mathcal{L}(x))$;*
- (2) *линейное многообразие $\mathcal{M}$ содержится в области определения $L^{(s)}$;*
- (3) *сужение на $\mathcal{M}$ оператора $L^{(s)}$ симметрично, если и только если либо $s = 1/2$, либо $s \in [0, 1]$; при этом для любых $j, k \geq 0$ выполнено равенство*

$$l_k \mu_{j+1} = \mu_{k+1} l_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $x \in D(\mathcal{L})$ и любого $\sigma \in L^2(h)$ выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \langle \sigma, (T_t^{(s)}(i_s(x)) - i_s(x)) \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \operatorname{tr}(\rho^{(1-s)/2} \sigma^* \rho^{s/2} (\mathcal{I}_t(x) - x)) \\ &= \operatorname{tr}(i_{1-s}(\sigma^*) \mathcal{L}(x)) = \langle \sigma, i_s(\mathcal{L}(x)) \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку слабые и сильные генераторы *сильно* непрерывных полугрупп в гильбертовом пространстве совпадают (см. [11, с. 43, теорема 1.3]), $i_s(x)$ принадлежат области определения $L^{(s)}$ и $L^{(s)}(i_s(x)) = i_s(\mathcal{L}(x))$. Теперь утверждение 3.2 (2) становится очевидным, поскольку $\mathcal{M}$ инвариантно относительно i_s и содержится в области определения $\mathcal{L}$ согласно предложению 3.1.

Далее, громоздкие, но прямые вычисления доказывают 3.2 (3).

Предложение 3.2 (3) объясняет основную причину выбора симметричного вложения. Далее мы будем рассматривать исключительно случай $s = 1/2$ и будем обозначать через L генератор, полученный из оператора класса (1) при использовании симметричного вложения ($L = L^{(1/2)}$). Таким образом, для x из $\mathcal{M}$ мы имеем

$$\begin{aligned} L(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k \geq 0} (\lambda_j^2 + \lambda_k^2 + \mu_j^2 + \mu_k^2) x_{jk} |e_j\rangle \langle e_k| \\ &\quad + \sum_{j,k \geq 0} \sqrt{\lambda_j \lambda_k \mu_{j+1} \mu_{k+1}} (x_{j+1,k+1} |e_j\rangle \langle e_k| + x_{jk} |e_{j+1}\rangle \langle e_{k+1}|). \end{aligned} \quad (6)$$

К сожалению, область определения $\mathcal{M}$ не является с необходимостью существенной областью определения операторов $L^{(s)}$ (см. контрпример в [12]). Следующее утверждение дает простое условие на интенсивности процессов рождения и уничтожения, достаточное для того, чтобы генератор $L|_{\mathcal{M}}$ был существенно самосопряженным с существенной областью определения $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Допустим, что выполнены условия (4), достаточные для существования инвариантного состояния, а также выполнено условие консервативности (3) и существует вещественная положительная постоянная c такая, что для любого натурального k выполнено неравенство*

$$\lambda_k^2 + \mu_k^2 \leq c(1+k)^2. \quad (7)$$

Тогда оператор L самосопряжен и $\mathcal{M}$ является его существенной областью определения (ядром).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $L \leq 0$, то согласно теореме Нельсона [13, с. 206, теорема X.40] достаточно доказать, что для всех l и m на множестве полуаналитических векторов выполнено условие

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^k \|L^k(|e_l\rangle\langle e_m|)\|}{(2k)!} < +\infty$$

для некоторого $t > 0$. Простое вычисление (см., например, [14] или [13, разд. X6]) с учетом (6) дает оценку

$$\begin{aligned} \|L^k(|e_l\rangle\langle e_m|)\| &\leq (3c)^k (l+m+2)^2 (l+m+4)^2 \cdots (l+m+2k)^2 \\ &\leq 2^{2k} (3c)^k (\beta+1)^2 \cdots (\beta+k)^2, \end{aligned}$$

где $\beta = [(l+m)/2] + 1$. Поэтому мы имеем

$$\|L^k(|e_l\rangle\langle e_m|)\| \leq (12c)^k (k!)^2 \binom{\beta+k}{\beta}^2 \leq 4^\beta (48c)^k (k!)^2.$$

Утверждение теоремы вытекает отсюда, если учесть, что $(k!)^2 \leq (2k)!$.

4. Основные результаты. В этом пункте мы остановимся на анализе квадратичных форм, связанных с генератором L полугруппы в $L^2(h)$, который получается из генератора $\mathcal{L}$, принадлежащего классу (1), и найдем условия на последовательности (λ_n) и (μ_n) , достаточные для того, чтобы спектральная щель $\text{gap}(L)$ была строго положительна.

В дальнейшем изложении предполагается выполненной следующая

ГИПОТЕЗА Н. *Последовательности $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ и $(\mu_n)_{n \geq 1}$ удовлетворяют условиям (3), (4) и (7).*

Обозначим через $\mathcal{E}$ форму Дирихле, связанную с оператором L , т.е.

$$\mathcal{E}(x, x) = -\langle x, Lx \rangle$$

для $x \in D(L)$. Тогда, используя (6) для x из $\mathcal{M}$, перепишем выражение для $\mathcal{E}(x, x)$ в виде

$$\sum_{j, k \geq 0} \left(\left| \sqrt{\lambda_j \lambda_k} x_{jk} - \sqrt{\mu_{j+1} \mu_{k+1}} x_{j+1, k+1} \right|^2 + \frac{1}{2} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + (\mu_j - \mu_k)^2] |x_{jk}|^2 \right). \quad (8)$$

Поскольку $\mu_0 = 0$ и $\mu_n > 0$ для любого $n > 0$, если x удовлетворяет условию $\mathcal{E}(x, x) = 0$, то, используя предыдущее соотношение, а также равенства $x_{0k} = x_{k0} = 0$ при $k \geq 1$ и

$$\sqrt{\lambda_j \lambda_k} x_{jk} - \sqrt{\mu_{j+1} \mu_{k+1}} x_{j+1, k+1} = 0, \quad j, k \geq 0,$$

мы получаем, что $x = \rho^{1/2}$. Поэтому если L – отрицательный самосопряженный оператор, то $\rho^{1/2}$ есть единственная фиксированная точка полугруппы T в $L^2(h)$.

Для k из $\mathbb{N}$ введем линейные пространства

$$\mathcal{F}_k = \left\{ \sum_{n \geq 0} (y_n |e_n\rangle \langle e_{n+k}| + z_n |e_{n+k}\rangle \langle e_n|) \mid y, z \in l^2(\mathbb{N}) \right\}. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что $L^2(h) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$. Действительно, любой элемент x из $L^2(h)$ можно записать в виде

$$x = \sum_{k \geq 0} \xi_k,$$

где ξ_k – проекция x на $\mathcal{F}_k$, т.е.

$$\xi_0 = \sum_{n \geq 0} x_{nn} |e_n\rangle \langle e_n|, \quad \xi_k = \sum_{n \geq 0} (x_{n, n+k} |e_n\rangle \langle e_{n+k}| + x_{n+k, n} |e_{n+k}\rangle \langle e_n|), \quad k \geq 1.$$

Таким образом, мы получили ортогональное разложение x , поскольку $\text{tr}(\xi_m^* \xi_k) = 0$ для всех $k, m \geq 0$ таких, что $m \neq k$.

Оператор L , заданный формулой (6), корректно определен относительно этого ортогонального разложения, поскольку пространство $\mathcal{F}_k$ является L -инвариантным, и поэтому

$$\mathcal{E}(x, x) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{E}(\xi_k, \xi_k).$$

Спектральная щель строго положительна, если и только если существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех x из $\mathcal{M}$ выполнена оценка

$$\frac{\mathcal{E}(x, x)}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{k \geq 0} \mathcal{E}(\xi_k, \xi_k)}{\sum_{k \geq 0} \|\xi_k\|^2} \geq c.$$

Очевидно, что это неравенство верно, если и только если для любого $k \geq 1$ выполнены следующие условия:

(0D) $\mathcal{E}(\xi_0, \xi_0) \geq c \|\xi_0\|^2$ для любого ξ_0 из $\mathcal{F}_0$, ортогонального $\rho^{1/2}$;

(kD) $\mathcal{E}(\xi_k, \xi_k) \geq c \|\xi_k\|^2$ для любого ξ_k из $\mathcal{F}_k$.

Предыдущее замечание позволяет упростить задачу, поскольку мы можем использовать разложение

$$L^2(h) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}_k, \quad L = \bigoplus_{k \geq 0} L_k,$$

где $\mathcal{F}_k$ являются копиями $l^2(\mathbb{N})$ и $L_k = L|_{\mathcal{F}_k}$ сходны с генераторами процессов рождения и уничтожения. Таким образом, мы получаем последовательность задач: одна из них, а именно (0D), является задачей вычисления классической спектральной щели, а остальные являются задачами нахождения минимума квадратичных форм на $l^2(\mathbb{N})$, связанных с трехдиагональными операторами.

Следующее предложение показывает, что решения задач минимизации можно искать на подмножествах, меньших чем $\mathcal{F}_k$ с $k \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\mathcal{F}_k^+$ ($k \geq 1$) – подмножество элементов из $\mathcal{F}_k$, представимых в виде (9) с $y = z$ и $y_n \geq 0$ для любого $n \geq 0$. Тогда

$$\inf\{\mathcal{E}(\xi, \xi) \mid \xi \in \mathcal{F}_k, \|\xi\| = 1\} = \inf\{\mathcal{E}(\xi, \xi) \mid \xi \in \mathcal{F}_k^+, \|\xi\| = 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого ξ из $\mathcal{F}_k$ определим два самосопряженных элемента $\mathcal{F}_k$: $\operatorname{Re} \xi = (\xi + \xi^*)/2$ и $\operatorname{Im} \xi = (\xi - \xi^*)/(2i)$. Нетрудно видеть, что $\|\xi\|^2 = \|\operatorname{Re} \xi\|^2 + \|\operatorname{Im} \xi\|^2$ и, кроме того, выполняется соотношение

$$4\mathcal{E}(\xi, \xi) = 4\mathcal{E}(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Re} \xi) + 4\mathcal{E}(\operatorname{Im} \xi, \operatorname{Im} \xi) + 2i(\langle \xi, L\xi \rangle - \langle \xi^*, L\xi^* \rangle).$$

Поскольку L – самосопряженный оператор (в частности, квадратичная форма $\langle \xi, L\xi \rangle$ вещественна), то из условий предположения следует, что $L(\xi^*) = (L\xi)^*$, $\mathcal{E}(\xi, \xi) = \mathcal{E}(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Re} \xi) + \mathcal{E}(\operatorname{Im} \xi, \operatorname{Im} \xi)$. Отсюда следует, что

$$\frac{\mathcal{E}(\xi, \xi)}{\|\xi\|^2} \geq \min\left\{\frac{\mathcal{E}(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Re} \xi)}{\|\operatorname{Re} \xi\|^2}, \frac{\mathcal{E}(\operatorname{Im} \xi, \operatorname{Im} \xi)}{\|\operatorname{Im} \xi\|^2}\right\}.$$

Поэтому достаточно найти нижнюю грань $\mathcal{E}(\xi, \xi)/\|\xi\|^2$ с самосопряженным $\xi \in \mathcal{F}_k$. Кроме того, для любого $\xi \in \mathcal{F}_k$, представимого в виде (9), полагая

$$\xi' = \sum_{n \geq 0} (|y_n| |e_n\rangle \langle e_{n+k}| + |z_n| |e_{n+k}\rangle \langle e_n|),$$

из (8) получим $\|\xi'\| = \|\xi\|$ и $\mathcal{E}(\xi', \xi') \leq \mathcal{E}(\xi, \xi)$. Используя это неравенство для $\operatorname{Re} \xi$ и $\operatorname{Im} \xi$, мы получаем требуемый результат.

Таким образом, вычисляя $\inf\{\mathcal{E}(\xi, \xi) \mid \xi \in \mathcal{F}_k, \|\xi_k\|_2 = 1\}$ для $k \geq 1$, можно предполагать, что $y_n = z_n \geq 0$. Это неверно при $k = 0$, так как в этом случае следует также учитывать условие $\xi_0 \perp \rho^{1/2}$.

Теперь мы можем указать условия, достаточные для положительности спектральной щели.

ТЕОРЕМА 4.2. Предположим, что λ и μ удовлетворяют гипотезе H и

$$\inf_{k \geq 1} (\mu_k^2 + (\lambda_k - \lambda_0)^2) > 0;$$

пусть также существуют γ из $]0, 1[$ и $c, d \in \mathbb{R}_+$ такие, что для всех $k, m \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\sum_{j > m} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \leq c \sqrt{\rho_m \rho_{m+k}} \lambda_m \lambda_{m+k}, \quad (10)$$

$$\sum_{j > m} \gamma^{-j} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \lambda_j \lambda_{j+k} \leq d \gamma^{-m} \sqrt{\rho_m \rho_{m+k}} \lambda_m \lambda_{m+k}. \quad (11)$$

Тогда спектральная щель оператора L строго положительна и удовлетворяет оценке

$$\operatorname{gap}(L) \geq \min\left\{\frac{1}{c} \left(d + 1 + \frac{\gamma}{1 - \gamma}\right)^{-1}, \inf_{k > 0} \frac{\mu_k^2 + (\lambda_k - \lambda_0)^2}{1 + c \lambda_0 \lambda_k (1 + (d + 1)/\gamma)}\right\}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 2.6 обеспечивает требуемую оценку в случае (0D), поэтому мы рассмотрим случай $k \geq 1$. В силу предложения 4.1 достаточно проверить условия (kD) для элементов $\mathcal{F}_k^+$. Пусть $y \in l^\infty(\mathbb{N})$ с неотрицательными y_j . Рассмотрим

$$\begin{aligned}\xi_k &= \rho^{1/4} \left(\sum_{j \geq 0} y_j (|e_j\rangle\langle e_{j+k}| + |e_{j+k}\rangle\langle e_j|) \right) \rho^{1/4} \\ &= \sum_{j \geq 0} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} y_j (|e_j\rangle\langle e_{j+k}| + |e_{j+k}\rangle\langle e_j|).\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{E}(\xi_k, \xi_k) = 2 \sum_{j \geq 0} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \{ \lambda_j \lambda_{j+k} |y_j - y_{j+1}|^2 + ((\lambda_j - \lambda_{j+k})^2 + (\mu_j - \mu_{j+k})^2) y_j^2 \}$$

и согласно неравенству Шварца

$$\begin{aligned}\|\xi_k\|^2 &= 2 \sum_{j \geq 0} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} y_j^2 \\ &< 2 \sum_{j \geq 0} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \left(y_0^2 + \sum_{m=1}^j (y_m - y_{m-1})^2 \gamma^m \right) \left(\sum_{n=0}^j \gamma^{-n} \right) \\ &= 2 y_0^2 A_k + \sum_{m \geq 0} |y_{m+1} - y_m|^2 B_{m,k},\end{aligned}$$

где два члена A_k и $B_{m,k}$ (определение которых дано ниже) могут быть мажорированы при использовании (10) и (11) соответственно. Действительно,

$$\begin{aligned}A_k &= \sum_{j \geq 0} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \sum_{n=0}^j \gamma^{-n} = \sum_{n \geq 0} \gamma^{-n} \sum_{j \geq n} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} + c \gamma^{-1} \sum_{n \geq 0} \gamma^{-n} \sqrt{\rho_n \rho_{n+k}} \lambda_n \lambda_{n+k} \\ &\leq \sqrt{\rho_0 \rho_k} (1 + c \lambda_0 \lambda_k) + c \gamma^{-1} \sqrt{\rho_0 \rho_k} \lambda_0 \lambda_k (d+1) \\ &= \sqrt{\rho_0 \rho_k} [1 + c \lambda_0 \lambda_k (1 + \gamma^{-1} + d \gamma^{-1})] \\ &= \left(\sup_{j > 0} \frac{1 + c \lambda_0 \lambda_j (1 + \gamma^{-1} + d \gamma^{-1})}{\mu_j^2 + (\lambda_j - \lambda_0)^2} \right) \sqrt{\rho_0 \rho_k} (\mu_k^2 + (\lambda_k - \lambda_0)^2).\end{aligned}$$

Кроме того, вновь используя (10) и (11), получаем, что величины

$$B_{m,k} = \gamma^{m+1} \sum_{j > m} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \sum_{n=0}^j \gamma^{-n}$$

могут быть оценены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_{m,k} &= \gamma^{m+1} \left(\sum_{n=0}^m \gamma^{-n} \sum_{j>m} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} + \sum_{n \geq m+1} \gamma^{-n} \sum_{j \geq n} \sqrt{\rho_j \rho_{j+k}} \right) \\
 &\leq c \gamma^{m+1} \left(\frac{1 - \gamma^{-m-1}}{1 - \gamma^{-1}} \lambda_m \lambda_{m+k} \sqrt{\rho_m \rho_{m+k}} + \gamma^{-1} \sum_{n \geq m} \gamma^{-n} \lambda_n \lambda_{n+k} \sqrt{\rho_n \rho_{n+k}} \right) \\
 &\leq c \lambda_m \lambda_{m+k} \sqrt{\rho_m \rho_{m+k}} ((1 - \gamma^{m+1})(\gamma^{-1} - 1)^{-1} + \gamma^m (d + 1)) \\
 &\leq c (d + 1 + (\gamma^{-1} - 1)^{-1}) \sqrt{\rho_m \rho_{m+k}} \lambda_m \lambda_{m+k}.
 \end{aligned}$$

Теперь отсюда следует неравенство (12).

В заключение мы покажем, что эта нижняя оценка всегда строго положительна. Действительно, полагая

$$g_k = \frac{\mu_k^2 + (\lambda_k - \lambda_0)^2}{1 + c \lambda_0 \lambda_k (1 + (d + 1) \gamma^{-1})},$$

мы видим, что $g_k > 0$ для всех $k > 0$, поскольку $\mu_k > 0$. Предположим теперь, что $\inf_{k>0} g_k = 0$. Тогда $\liminf g_k = 0$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность $(g_{k_m})_{m \geq 1}$, стремящаяся к нулю при m , стремящемся к бесконечности. В то же время, с учетом сделанного предположения $\inf_{k>0} (\mu_k^2 + (\lambda_k - \lambda_0)^2) > 0$, поэтому последовательность $c \lambda_0 \lambda_{k_m} (1 + (d + 1) \gamma^{-1})$ расходится. Отсюда следует, что последовательность $(\lambda_{k_m})_{m \geq 1}$ также расходится, что противоречит $\lim_{m \rightarrow \infty} g_{k_m} = 0$.

Поэтому $\inf_{k>0} g_k > 0$, что завершает доказательство.

Напомним следующий технический результат (см. [3, с. 413, лемма 3.5]).

ЛЕММА 4.3. Пусть α является неотрицательной функцией на $\mathbb{N}$ такой, что

$$\sum_{u>v} \alpha(u) \leq b \alpha(v)$$

для всех v из $\mathbb{N}$ и некоторого $b > 0$. Тогда для всех γ из отрезка $(b/(b + 1), 1)$ выполнено

$$\sum_{u>v} \gamma^{-u} \alpha(u) \leq \frac{b \gamma^{-v} \alpha(v)}{\gamma - b(1 - \gamma)}.$$

Поэтому условие (11) из теоремы 4.2 можно заменить на следующее: существует (положительная) постоянная $\tilde{d}$ такая, что для всех k и m выполнено неравенство

$$\sum_{j>k} \sqrt{\rho_j \rho_{j+m}} \lambda_j \lambda_{j+m} \leq \tilde{d} \sqrt{\rho_k \rho_{k+m}} \lambda_k \lambda_{k+m}. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 4.4. *Предположим, что*

$$0 < \inf_{j \geq 0} \lambda_j \leq \sup_{j \geq 0} \lambda_j < \infty, \quad \inf_{j > 0} (\mu_j^2 + (\lambda_j - \lambda_0)^2) > 0.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $\text{gap}(L) > 0$;
 (b) *существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $\sum_{j > k} \rho_j < \alpha \rho_k$ для всех k из $\mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\Rightarrow$ (b). Если условие (a) выполнено, то спектральная щель диагонального сужения L также положительна и (b) вытекает из [3, с. 414, следствие 3.8].

(b) $\Rightarrow$ (a). Если (b) выполнено, то для всех натуральных k и m имеет место оценка

$$\frac{\sum_{j > k} \sqrt{\rho_j \rho_{j+m}}}{\sqrt{\rho_k \rho_{k+m}}} \leq \frac{1}{2} \sum_{j > k} \left(\frac{\rho_j}{\rho_k} + \frac{\rho_{j+m}}{\rho_{k+m}} \right) \leq \alpha,$$

и, следовательно, обозначая $\Lambda = (\sup_n \lambda_n / \inf_n \lambda_n)^2$, мы получаем

$$\sum_{j > k} \sqrt{\rho_j \rho_{j+m}} \lambda_j \lambda_{j+m} \leq (\sup_n \lambda_n)^2 \alpha \sqrt{\rho_k \rho_{k+m}} \leq \alpha \Lambda \sqrt{\rho_k \rho_{k+m}} \lambda_k \lambda_{k+m}.$$

Таким образом, все условия теоремы 4.2 выполнены (включая (13) вместо (11)) и спектральная щель положительна.

5. Приложения. Мы нашли оценки спектральной щели для некоторых генераторов из описанного ранее класса с известной спектральной щелью для соответствующих классических генераторов процесса рождения-уничтожения.

λ_n	μ_n	классическая щель	квантовая щель
λ	μ	$(\mu - \lambda)^2$	$\text{gap}(L) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu^2 - \lambda^2, & \text{если } 2\lambda < \mu, \\ (\mu - \lambda)^2, & \text{если } \lambda < \mu < 2\lambda \end{cases}$
λ	$\mu\sqrt{n}$	μ^2	$\frac{1}{2}\mu^2(\sqrt{1+\theta^2} - \theta)^2 \leq \text{gap}(L) < \frac{1}{2}\mu^2 \frac{1-e^{-\theta^2}}{\theta^2}$
$\lambda\sqrt{n+1}$	$\mu\sqrt{n}$	$\mu^2 - \lambda^2$	$\text{gap}(L) = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2)$
$\lambda\sqrt{n+r}$	$\mu\sqrt{n}$	$\mu^2 - \lambda^2$	$\text{gap}(L) \geq \frac{1}{2}\mu^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\right)^r$
r, λ и μ – положительные постоянные такие, что $\lambda < \mu, \theta = \lambda/\mu$			

Оценки классических спектральных щелей можно найти в [2], квантовые оценки получены в [12] и [14].

Приведенные выше точные значения и оценки $\text{gap}(L)$ в сочетании с естественным обобщением классических результатов для квадратичных форм (см. [4]) позволяют оценить $\text{gap}(L)$ для более сложных функций λ_n и μ_n .

Рассмотрим генератор, используемый в квантовой оптике. Генератор КМП для модели Джейнса–Каммингса (см. [15]) имеет интенсивность

$$\lambda_n = \sqrt{\lambda^2(n+1) + R^2 \sin^2(\varphi\sqrt{n+1})}, \quad \mu_n = \mu\sqrt{n}.$$

Чтобы показать, что он имеет строго положительную спектральную щель для любых значений параметров $0 < \lambda < \mu$ и $R \geq 0$, мы найдем постоянные c и d и применим теорему 4.2.

Пусть $\beta = 1 + R^2/\lambda^2$. Поскольку $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ для $t > 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda^2(j+1) + R^2)}{\mu^{2n} n!} &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right)^n \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(1+\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} t^{n+\beta} \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right)^n \frac{1}{n!} e^{-t} dt = \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right)^{-\beta-1}. \end{aligned}$$

Положим $\tilde{\lambda}_j = \sqrt{\lambda^2(j+1) + R^2}$. Используя приведенное выше тождество, мы можем найти две подходящих постоянных c и d . Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j > k} \sqrt{\frac{\rho_j \rho_{j+m}}{\rho_k \rho_{k+m}}} \frac{1}{\lambda_k \lambda_{k+m}} &\leq \frac{1}{\mu_{k+1} \mu_{k+m+1}} \left(1 + \sum_{j > k+1} \frac{\tilde{\lambda}_{k+1} \cdots \tilde{\lambda}_{j-1} \tilde{\lambda}_{k+m+1} \cdots \tilde{\lambda}_{j+m-1}}{\mu_{k+1} \cdots \mu_j \mu_{k+m+1} \cdots \mu_{j+m}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\mu_{k+1}^2} \left(1 + \sum_{j > k+1} \frac{\tilde{\lambda}_{k+1}^2 \cdots \tilde{\lambda}_{j-1}^2}{\mu_{k+1}^2 \cdots \mu_j^2} \right) \leq \frac{1}{\mu^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right)^{-2-R^2/\lambda^2} =: c, \end{aligned}$$

и выберем

$$d = \left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2 \gamma} \right)^{-2-R^2/\lambda^2} - 1 \right]$$

с γ из $[\lambda^2/\mu^2, 1]$, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{j > k} \sqrt{\frac{\rho_j \rho_{j+m}}{\rho_k \rho_{k+m}}} \frac{\lambda_j \lambda_{j+m}}{\lambda_k \lambda_{k+m}} \gamma^{-(j-k)} &= \sum_{j > k} \gamma^{-(j-k)} \frac{\lambda_{k+1} \cdots \lambda_j \lambda_{k+m+1} \cdots \lambda_{j+m}}{\mu_{k+1} \cdots \mu_j \mu_{k+m+1} \cdots \mu_{j+m}} \\ &\leq \sum_{j > k} \gamma^{-(j-k)} \frac{\tilde{\lambda}_{k+1}^2 \cdots \tilde{\lambda}_j^2}{\mu_{k+1}^2 \cdots \mu_j^2} \leq \sum_{j > 0} \gamma^{-j} \frac{\tilde{\lambda}_1^2 \cdots \tilde{\lambda}_j^2}{\mu_1^2 \cdots \mu_j^2} = d. \end{aligned}$$

Предложение 2.6 и теорема 4.2 дают оценку снизу спектральной щели. Мы опускаем ее явную форму из-за громоздкости вычислений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fagnola F. Quantum Markov Semigroups and Quantum Markov Flows // *Proyecciones*. (to appear).
- [2] Chen M. F. Estimation of spectral gap for Markov chains // *Acta Math. Sinica* (N. S.). 1996. V. 12. №4. P. 337–360.
- [3] Liggett T. Exponential L_2 convergence of attractive reversible nearest particle systems // *Ann. Probab.* 1989. V. 17. P. 403–432.
- [4] Saloff-Coste L. Lectures on finite Markov chains // *Lectures on Probability Theory and Statistics* (St. Flour, 1996). *Lecture Notes in Math.* V. 1665. New York: Springer, 1997. P. 301–413.
- [5] Ohya M., Petz D. *Quantum Entropy and Its Use*. New York: Springer, 1995.
- [6] Jorgensen P. E. T. Approximately reducing subspaces for unbounded operators // *J. Funct. Anal.* 1976. V. 23. P. 392–414.
- [7] Goldstein S., Lindsay J. M. KMS-symmetric semigroups // *Math. Z.* 1995. V. 219. P. 591–608.
- [8] Majewsky W. A., Streater R. F. Detailed balance and quantum dynamical maps // *J. Phys. A*. 1998. V. 31. P. 7981–7995.
- [9] Chebotarev A. M. The theory of dynamical semigroups and its applications // *Probability Theory and Mathematical Statistics* (Vilnius, 1989). V. I. Vilnius: Mokslas, 1990. P. 217–227.
- [10] Karlin S., Taylor H. M. *A First Course on Stochastic Processes*. New York: Acad. Press, 1975.
- [11] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer Verlag, 1975.
- [12] Carbone R. Exponential L^2 -convergence of some quantum Markov semigroups related to birth-death processes // *Stochastic Analysis and Mathematical Physics ANESTOC'98* (Santiago, 1998) (to appear).
- [13] Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II. Fourier Analysis. Self-Adjointness*. New York: Acad. Press, 1975.
- [14] Cipriani F., Fagnola F., Lindsay J. M. Feller property and Poincaré inequality for the quantum Ornstein–Uhlenbeck semigroups // *Comm. Math. Phys.* (to appear); Preprint, Nottingham, June 1996.
- [15] Fagnola F., Rebolledo R., Saavedra C. Quantum flows associated to master equations in quantum optics // *J. Math. Phys.* 1994. V. 35. P. 1–12.

(Р. Карбоне) Università di Milano
 (Ф. Фаньола) Università di Genova
E-mail: raffaella@socrates.mat.unimi.it,
 fagnola@dim.unige.it

Поступило
 09.02.2000