Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Махмудов, И. Э. Ниезов, Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости в бесконечной области, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 548–553

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm974>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:13:02

УДК 517.946

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

О. И. Махмудов, И. Э. Ниезов

Построена матрица Карлемана задачи Коши для уравнения Гельмгольца в неограниченной области $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей.

Библиография: 15 названий.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки трехмерного евклидова пространства E^3 и упругая среда D есть неограниченная односвязная область в E^3 с кусочно-гладкой границей, состоящей из куска Σ гиперплоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, т. е. $\partial D = S \cup \Sigma$.

Пусть вектор-функция $u(y) = (u_1(y), u_2(y), u_3(y))$ в области D удовлетворяет системе уравнений установившихся упругих колебаний, которая в векторной форме может быть записана в виде

$$\mu \Delta u(y) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(y) + \rho \omega^2 u(y) = 0, \quad (1)$$

здесь Δ – оператор Лапласа, λ, μ – постоянные Ламе рассматриваемой упругой среды, ρ – плотность среды, ω – частота колебания.

Постановка задачи. Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S :

$$\begin{cases} u(y) = f(y), & y \in S, \\ T(\partial_y, n)u(y) = g(y), & y \in S, \end{cases} \quad (2)$$

где $T(\partial_y, n)$ – оператор напряжения, т. е.

$$T(\partial_y, n) = \left\| \lambda n_k \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_k} + \mu \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial n} \right\|_{3 \times 3},$$

$n = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к поверхности S , $f = (f_1; f_2, f_3)$, $g = (g_1; g_2, g_3)$ – заданные непрерывные вектор-функции на S , δ_{kj} – символ Кронекера.

Требуется определить функцию $u(y)$ в D , исходя из заданных f и g .

Задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т. е. некорректна (пример Адамара [1], [2]). Однако если сузить класс рассматриваемых решений (класс корректности по Тихонову [1]), то для этого класса задача становится корректной. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах в работах Лаврентьева, Мергеляна и развилось в последствии Ивановым, Ярмухамедовым, Айзенбергом и др. [3]–[9].

Для случая $\omega = 0$ рассматриваемая задача для ограниченных областей исследована в [10]–[12]. В настоящей работе строится приближенное решение задачи (1), (2), основанное на методе Карлемана.

Развивая идею Лаврентьева, Ярмухамедов построил [6], [7], функцию Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и Гельмгольца.

Ранее в работах [9], [13] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве с положительной мерой. Поскольку здесь идет речь о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

В работе строится семейство функций $u(x, f_\delta, g_\delta) = u_{\sigma\delta}(x)$, зависящее от параметра σ и выбора параметра $\sigma(\delta)$; при $\delta \rightarrow 0$ семейство $u_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $u(x)$ задачи (1), (2). Следуя Тихонову [14], семейство функций $u_{\sigma\delta}(x)$ назовем *регуляризованным решением задачи*.

Следуя [2], приведем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрицей Карлемана задачи (1), (2) называется (3×3) -матрица $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

- 1) $\Pi(y, x, \omega, \sigma) = \Gamma(y - x, \omega) + G(y, x, \omega, \sigma)$, где σ – положительный числовой параметр, матрица $G(y, x, \omega, \sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D , $\Gamma(y - x, \omega)$ – матрица фундаментальных решений уравнений (1);
- 2) $\int_\Sigma (|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)|) dS_y \leq \varepsilon(\sigma)$, где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$; здесь и далее $|\Pi|$ означает евклидову норму матрицы $\Pi = \|\Pi_{kj}\|$, т.е. $|\Pi| = (\sum_{k,j=1}^3 \Pi_{kj}^2)^{1/2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор-функция $u(y) = (u_1(y), u_2(y), u_3(y))$ называется *регулярной* в D , если $u_j(y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $j = 1, 2, 3$.

Пусть область $D \subset E^3$ лежит внутри слоя $0 < y_3 < h$, $h = \pi/q$, $q > 0$, и ее граница состоит из гиперплоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S , заданной уравнением $y_3 = f(y_1, y_2)$ и удовлетворяющей условиям $0 < f(y_1, y_2) \leq h$, $|\text{grad } f(y_1, y_2)| \leq \text{const} < \infty$, $(y_1, y_2) \in E^2$.

Обозначим через $A(D)$ пространство всех регулярных в D решений системы (1), а через $A_q(D)$ следующее множество:

$$A_q(D) = \{u(y) \in A(D) : |u(y)| + |\text{grad } u(y)| \leq \exp(o(e^q \sqrt{y_1^2 + y_2^2})), y \rightarrow \infty, q > 0\}.$$

С целью построения приближенного решения задачи (1), (2), рассмотрим матрицу

$$\Pi(y, x, \omega, \sigma) = \left\| \frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \Phi(y, x, k_2, \sigma) - \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} [\Phi(y, x, k_1, \sigma) - \Phi(y, x, k_2, \sigma)] \right\|_{3 \times 3}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(y, x, \Lambda, \sigma) &= [-4\pi^2]^{-1} \int_0^\infty \text{Im} \frac{K(\sigma(\omega - x_3)) \cos \Lambda u \cdot du}{\omega - x_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \\ K(\sigma\omega) &= (\omega + 2h)^{-1} \exp(\sigma\omega), \quad \omega = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \\ \alpha^2 &= (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad 0 < x_3 < h. \end{aligned} \quad (4)$$

Из результатов работы [6] вытекает

ЛЕММА 1. Функция $\Phi(y, x, \Lambda, \sigma)$ является функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца, т. е. обладает следующими двумя свойствами:

$$1) \quad \Phi(y, x, \Lambda, \sigma) = \frac{\exp(i\Lambda r)}{4\pi r} + V(y, x, \Lambda, \sigma), \quad r = |x - y|, \quad (5)$$

где $V(y, x, \Lambda, \sigma)$ – некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца $\Delta(\partial/\partial y)V - \Lambda^2 V = 0$, $y \in D$;

$$2) \quad \int_{\Sigma} (|\Phi(y, x, \Lambda, \sigma)| + |\operatorname{grad} \Phi(y, x, \Lambda, \sigma)|) dS_y \leq C(\Lambda, D)\sigma \exp(-\sigma x_3). \quad (6)$$

Докажем аналогичную лемму для системы (1).

ЛЕММА 2. Матрица $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$ является матрицей Карлемана задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенств (3) и (5) имеем

$$\begin{aligned} \Pi(y, x, \omega, \sigma) &= \left\| \frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \left[\frac{\exp(ik_2 r)}{4\pi r} + V(y, x, k_2, \sigma) \right] \right. \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left\{ \left[\frac{\exp(ik_2 r)}{4\pi r} + V(y, x, k_2, \sigma) \right] \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[\frac{\exp(ik_2 r)}{4\pi r} + V(y, x, k_2, \sigma) \right] \right\} \right\| \\ &= \Gamma(y - x, \omega) + \left\| \left[\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} V(y, x, k_2, \sigma) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} [V(y, x, k_1, \sigma) - V(y, x, k_2, \sigma)] \right\| \\ &= \Gamma(y - x, \omega) + \|G_{kj}(y, x, \omega, \sigma)\|_{3 \times 3} = \Gamma(y - x, \omega) + G(y, x, \omega, \sigma). \end{aligned}$$

Докажем, что матрица $G(y, x, \omega, \sigma)$ по переменному y удовлетворяет системе (1) всюду в области D .

Пусть $G^j(y, x, \omega, \sigma) = (G_{1j}, G_{2j}, G_{3j})$, $j = 1, 2, 3$. Вектор $G^j(y, x, \omega, \sigma)$ в каждой точке $y \in D$ удовлетворяет системе (1) при $j = 1, 2, 3$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} &\mu \Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) G^j(y, x, \omega, \sigma) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} G^j(y, x, \omega, \sigma) \\ &= (R_{1j}(y, x, \omega, \sigma), R_{2j}(y, x, \omega, \sigma), R_{3j}(y, x, \omega, \sigma)); \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} &2\pi R_{kj}(y, x, \omega, \sigma) \\ &= \delta_{kj} \Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) V(y, x, k_2, \sigma) \\ &\quad - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) [V(y, x, k_1, \sigma) - V(y, x, k_2, \sigma)] \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} V(y, x, k_2, \sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho\omega^2 \left\{ \frac{\delta_{kj}}{\mu} V(y, x, k_2, \sigma) - \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial^2 V(y, x, k_1, \sigma)}{\partial y_k \partial y_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu\rho\omega^2} \frac{\partial^2 V(y, x, k_2, \sigma)}{\partial y_k \partial y_j} - \frac{\lambda + \mu}{\mu\rho\omega^2} \frac{\partial^2 V(y, x, k_2, \sigma)}{\partial y_k \partial y_j} \right\} \\
&= -\rho\omega^2 \left\{ \frac{\delta_{kj}}{\mu} V(y, x, k_2, \sigma) - \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} [V(y, x, k_1, \sigma) - V(y, x, k_2, \sigma)] \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_{kj}(y, x, \omega, \sigma) = -\rho\omega^2 G_{kj}(y, x, \omega, \sigma),$$

что и требовалось доказать.

Используя формулы (3), (4), (5) и (6), нетрудно получить неравенство

$$\int_{\Sigma} (|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)|) dS_y \leq C(\Lambda, D)\sigma \exp(-\sigma x_3), \quad (7)$$

где константа $C(\Lambda, D)$ не зависит от x . Лемма доказана.

Предположим теперь, что функция $u(y) \in A(D)$ ограничена вместе с нормальной производной на поверхности Σ :

$$|u(y)| + |T(\partial_y, n)u(y)| \leq M, \quad y \in \Sigma. \quad (8)$$

В этих предположениях верна формула Грина–Купрадзе [15].

$$2u(x) = \int_{\partial D} [\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{T(\partial_y, n)u(y)\} - u(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)\}] dS_y, \quad x \in D. \quad (9)$$

Положим

$$2u_{\sigma}(x) = \int_S [\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{T(\partial_y, n)u(y)\} - u(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)\}] dS_y, \quad x \in D.$$

Верна следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x) \in A_q(D)$ удовлетворяет граничному условию (8). Тогда имеет место оценка

$$|u(x) - u_{\sigma}(x)| \leq MC_1(x, \Lambda, D)\sigma^3 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D, \quad (10)$$

где $C_1(x, \Lambda, D) = C(\lambda, \mu, \Lambda, q) \int_{\Sigma} |r^{-1} + r^{-2}| dS_y$, $r = |y - x|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу (9) перепишем в виде

$$u(x) - u_{\sigma}(x) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} [\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{T(\partial_y, n)u(y)\} - u(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)\}] dS_y.$$

Из последнего равенства и из неравенств (7) и (8) получим (10). Теорема доказана.

Приведем результат, который позволяет вычислить $u(y)$ приближенно, когда на S вместо $u(y)$ и $T(\partial_y, n)u(y)$ заданы их непрерывные приближения $f_{\delta}(y)$ и $g_{\delta}(y)$ соответственно, т. е.

$$\max_S |u(y) - f_{\delta}(y)| + \max_S |T(\partial_y, n)u(y) - g_{\delta}(y)| < \delta, \quad 0 < \delta < 1. \quad (11)$$

Функцию $u_{\sigma\delta}(x)$ определим формулой

$$2u_{\sigma\delta}(x) = \int_S [\Pi(y, x, \omega, \sigma)g_{\delta}(y) - f_{\delta}(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)\}] dS_y, \quad x \in D. \quad (12)$$

Верна следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(y) \in A_q(D)$ удовлетворяет граничному условию (8). Тогда выполнена оценка

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq C(x, \Lambda, D) \delta^{x_3/h} \ln \left(\frac{M}{\delta} \right)^3, \quad (13)$$

где $\sigma = h^{-1} \ln(M/\delta)$,

$$C(x, \Lambda, D) = \frac{2M^{1-x_3/h}}{h^2} C(\lambda, \mu, \Lambda, q) \int_{\partial D} |r^{-1} + r^{-2}| dS_y, \quad r = |y - x|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегральных представлений (9) и (12) имеем

$$\begin{aligned} u(x) - u_{\sigma\delta}(x) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} [\Pi(y, x, \omega, \sigma) \{T(\partial_y, n)u(y)\} - u(y) \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)\}] dS_y \\ &+ \int_S [\Pi(y, x, \omega, \sigma) \{T(\partial_y, n)u(y) - g(y)\} - (u(y) - f_\delta(y)) \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)\}] dS_y. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 1 из условия (11) и условий теоремы получим неравенство

$$\begin{aligned} |u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| &\leq MC_1(x, \Lambda, D) \sigma^3 \exp(-\sigma x_3) + \delta \int_S [|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| \\ &+ |T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)|] dS_y. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\int_S [|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \omega, \sigma)|] dS_y \leq C_2(x, \Lambda, D) \sigma^3 \exp \sigma(h - x_3).$$

Объединяя эти последние два неравенства и положив $\sigma = h^{-1} \ln(M/\delta)$, получим неравенство (13). Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Предельные равенства*

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} u_\sigma(x) = u(x), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\sigma\delta}(x) = u(x)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D .

В заключение авторы выражают признательность академику М. М. Лаврентьеву и профессору Ш. Я. Ярмухамедову за постановку задачи и обсуждения в процессе ее решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
- [2] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
- [3] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 6. С. 819–842.
- [4] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. С. 195–197.
- [5] Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. 1956. Т. 11. № 5. С. 3–26.
- [6] Ярмухамедов Ш. Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.
- [7] Ярмухамедов Ш. Я., Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И. О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 1. С. 186–190.
- [8] Иванов В. К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. С. 131–136.
- [9] Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н. Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1292–1296.
- [10] Махмудов О. И. Задача Коши для системы упругости в пространстве. Дисс. . . к.ф.-м.н. Новосибирск, 1990.
- [11] Махмудов О. И. Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях // Изв. вузов. 1994. № 1(380). С. 54–61.
- [12] Махмудов О. И., Ниезов И. Э. Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений теории упругости в перемещениях // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 2. С. 369–376.
- [13] Тарханов Н. Н. О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 294–297.
- [14] Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
- [15] Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В., Гегелиа Т. Г. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.