Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Лаптев, Условия монотонности одного класса квазилинейных дифференциальных операторов, зависящих от параметров, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 405–417

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:58:10

Условия монотонности одного класса квазилинейных дифференциальных операторов, зависящих от параметров

Г. И. Лаптев

Вводится специальный класс квазилинейных дифференциальных операторов, зависящих от конечного набора параметров, и выясняются необходимые и достаточные условия монотонности таких операторов.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm9755

1. Постановка задачи и формулировка результата. Теория монотонных операторов в своей основе создана в шестидесятых годах двадцатого столетия и изложена, например, в монографиях [1]–[4]. При этом основное внимание уделялось абстрактным монотонным операторам, действующим из заданного банахова пространства X в его сопряженное X' . Конкретные классы монотонных операторов изучены в меньшей степени. Ниже вводится специальный класс дифференциальных операторов, зависящих от параметров, и выясняются необходимые и достаточные условия монотонности таких операторов.

Перейдем к формулировке результата. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей Γ рассмотрим краевую задачу для квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными в дивергентной форме:

$$Au \equiv - \sum_{i=1}^n D_i a_i(Du(x)) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_A} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $u = u(x)$ – искомая функция на множестве $x \in \Omega$; $Du = (D_1 u, \dots, D_n u)$, где $D_i u = \partial u(x) / \partial x_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Функции $a_i(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ и $f(x)$, $x \in \Omega$, считаются заданными. Символом $\partial u / \partial n_A$ обозначается производная по конормали к границе Γ . Ввиду нелинейности краевая задача (1.1) редко допускает существование классического решения, что привело к необходимости расширения понятия решения. Один из подходов связан с заменой краевой задачи специально построенным интегральным тождеством. Именно, уравнение (1.1) умножим на функцию $v(x)$ и результат проинтегрируем по области Ω . В тех слагаемых, которые объединены знаком суммы, проинтегрируем по частям. Предполагая, что все операции допустимы, получим равенство

$$- \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n n_i(x) a_i(Du(x)) v(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(Du(x)) D_i v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (1.2)$$

Здесь $n_i(x)$ – координаты внешней нормали к границе Γ . Первый интеграл в (1.2) имеет вид $-\int_{\Gamma}(\partial u/\partial n_A)v(x)dx$ и в силу граничного условия обращается в нуль. В результате остается соотношение

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(Du(x))D_i v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad (1.3)$$

которое называется *интегральным тождеством* для краевой задачи (1.1). Решение интегрального тождества, если оно существует, называется *слабым решением* краевой задачи. Чтобы придать смысл полученному интегральному тождеству, введем подходящие функциональные пространства. Для фиксированного числа $p > 1$ через $L_p(\Omega)$ обозначим пространство Лебега измеримых в Ω функций, для которых конечна норма $\|u\|_p = (\int_{\Omega} |u(x)|^p dx)^{1/p}$. Введем также пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ как множество измеримых в Ω функций, которые допускают обобщенные частные производные $D_i u(x)$ для $i = 1, \dots, n$, и для которых конечна норма

$$\|u\|_{1,p} = \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p + \|u\|_p.$$

Пусть $X = W_p^1(\Omega)$, X' – сопряженное пространство. Значение функционала $f \in X'$ на элементе $u \in X$ обозначим символом $\langle f, u \rangle$. Опираясь на левую часть интегрального тождества (1.3), введем интегральную форму

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(Du(x))D_i v(x)dx. \quad (1.4)$$

Следующее утверждение есть частный случай теоремы 14.2 книги [4; с. 79]. Можно использовать также теорему 2.1 главы 1 монографии Скрышника [2; с. 15].

ЛЕММА 1. Пусть функции $a_i(y)$ непрерывны для $y \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют ограничениям

$$|a_i(y)| \leq 1 + c \sum_{j=1}^n |y_j|^{p-1}, \quad c > 0, \quad p > 1. \quad (1.5)$$

Тогда интегральная форма (1.4) определяет оператор A , отображающий пространство $X = W_p^1(\Omega)$ в сопряженное пространство X' . Этот оператор является ограниченным и непрерывным.

Рассмотрим более конкретный вариант краевой задачи:

$$A_{\lambda} u \equiv - \sum_{i=1}^n D_i (\lambda_i |Du(x)|^{p-2} D_i u(x)) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_A} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – положительные числа, $|Du|^2 = \sum_{i=1}^n (D_i u)^2$. Считаем $p > 2$. Введенной краевой задаче (1.6) соответствует интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i |Du(x)|^{p-2} D_i u(x) D_i v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Сравнение с абстрактным вариантом (1.3) показывает, что

$$a_i(y) = \lambda_i |y|^{p-2} y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Очевидно, что функции $a_i(y)$ непрерывны для $y \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют ограничениям (1.5). Из леммы 1 следует, что интегральная форма

$$\langle A_\lambda u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i |Du(x)|^{p-2} D_i u(x) D_i v(x) dx \quad (1.8)$$

порождает оператор A_λ , который отображает пространство $X = W_p^1(\Omega)$ в сопряженное пространство X' , является ограниченным и непрерывным. Если числа λ_i совпадают для всех $i = 1, \dots, n$, то оператор A_λ является градиентом функционала

$$F(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \lambda |Du(x)|^p dx, \quad u \in W_p^1(\Omega).$$

В этом случае оператор A_λ является монотонным, т.е. удовлетворяет соотношению

$$\langle A_\lambda u - A_\lambda v, u - v \rangle \geq 0, \quad u, v \in W_p^1(\Omega). \quad (1.9)$$

Если не все числа λ_i совпадают, то оператор A_λ не будет потенциальным, но может быть монотонным, если разброс чисел λ_i для $i = 1, \dots, n$ не очень велик. Условия монотонности оператора A_λ указываются в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 2$. Оператор $A_\lambda: X \rightarrow X'$, порожденный формой (1.8), является монотонным тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq c_p^2, \quad c_p = \frac{p + 2\sqrt{p-1}}{p-2}.$$

Здесь $\lambda_{\max}$ есть наибольшее из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\lambda_{\min}$ — наименьшее из них.

Подчеркнем, что теорема сформулирована в терминах необходимых и достаточных условий. Для наглядности приведем небольшую таблицу значений функции c_p из теоремы 1:

p	3	5	10	∞
c_p	$3 + 2\sqrt{2}$	3	2	1

Теорема 1 доказывается через ряд вспомогательных утверждений, которые приводятся далее.

2. Монотонные вектор-функции. Для элементов $y, z \in \mathbb{R}^n$ введем скалярное произведение $(y, z) = \sum_{i=1}^n y_i z_i$. Хорошо известно, что сопряженное пространство $(\mathbb{R}^n)'$ изоморфно $\mathbb{R}^n$, так что $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$. Применим к оператору $a: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)'$ определение монотонности в форме (1.9). В результате приходим к соотношению

$$(a(y) - a(z), y - z) = \sum_{i=1}^n (a_i(y) - a_i(z))(y_i - z_i) \geq 0. \quad (2.1)$$

Учитывая это, введем следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор-функция $a(y)$, определенная для $y \in \mathbb{R}^n$, называется *монотонной*, если для всех $y, z \in \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение (2.1).

Вернемся к оператору $A: X = W_p^1(\Omega) \rightarrow X'$, введенному в лемме 1. Этот оператор определяется через вектор-функцию $a(y) = (a_1(y), \dots, a_n(y))$, в которую следует подставить $y = Du(x)$. Таким образом, нелинейный оператор $A: X \rightarrow X'$ и конечномерный оператор $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ тесно связаны. Эта связь подтверждается следующим важным утверждением.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $a_i(y)$ непрерывны для $i = 1, \dots, n$ и $y \in \mathbb{R}^n$. Оператор $A: X \rightarrow X'$, определенный в (1.4), является монотонным тогда и только тогда, когда монотонна вектор-функция $a(y) = (a_1(y), \dots, a_n(y))$, т.е. когда выполняется соотношение (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть оператор $A: X \rightarrow X'$ вида (1.4) является монотонным, т.е. для него выполняется соотношение

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n [a_i(Du(x)) - a_i(Dv(x))](D_i u(x) - D_i v(x)) dx \geq 0 \quad (2.2)$$

для любых функций $u, v \in W_p^1(\Omega)$. Фиксируем векторы $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ и введем функции $u(x) = \sum_{i=1}^n y_i x_i$, $v(x) = \sum_{i=1}^n z_i x_i$. Эти функции непрерывно дифференцируемы, а так как область Ω ограничена, то $u, v \in W_p^1(\Omega)$ для любого $p > 1$. При этом $Du(x) = y$, $Dv(x) = z$. Подставляя эти соотношения в неравенство (2.2), приведем его к виду

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (a_i(y) - a_i(z))(y_i - z_i) dx \geq 0,$$

откуда

$$|\Omega| \sum_{i=1}^n (a_i(y) - a_i(z))(y_i - z_i) \geq 0, \quad |\Omega| = \int_{\Omega} dx,$$

что соответствует неравенству (2.1) и доказывает монотонность вектор-функции $a(y)$.

Достаточность. Выберем функции $u, v \in W_p^1(\Omega)$ и оценим выражение

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (a_i(Du(x)) - a_i(Dv(x)))(D_i u(x) - D_i v(x)) dx.$$

Полагая $y(x) = Du(x)$, $z(x) = Dv(x)$, получим

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n [a_i(y(x)) - a_i(z(x))](y_i(x) - z_i(x)) dx.$$

Подинтегральное выражение здесь неотрицательно почти всюду в Ω , так как условие (2.1) выполняется для любых векторов $y, z \in \mathbb{R}^n$. Значит, $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$, что и доказывает монотонность оператора A и завершает доказательство теоремы.

Условие монотонности вектор-функции $a(y)$ можно представить в разнообразных эквивалентных формах. В следующем утверждении собраны некоторые из таких форм.

ЛЕММА 2. Пусть функции $a_i(y)$ непрерывны в $\mathbb{R}^n$ для $i = 1, \dots, n$. Условие монотонности вектор-функции $a(y) = (a_1(y), \dots, a_n(y))$ эквивалентно каждому из следующих соотношений:

- (a) $(a(y) - a(z), y - z) \geq 0, y, z \in \mathbb{R}^n$;
- (b) $(a(z + w), w) \geq (a(z), w), z, w \in \mathbb{R}^n$;
- (c) $(a(z + tw), w) \geq (a(z), w), z, w \in \mathbb{R}^n; t \geq 0$;
- (d) функция $\varphi_{z,w}(t) = (a(z + tw), w)$ монотонно возрастает (нестрого) для $t \geq 0$ при любых фиксированных $z, w \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (a) есть определение монотонности вектор-функции $a(y)$. Пусть неравенство (a) выполнено. Введем замену $y - z = w$, откуда $y = z + w$. Тогда неравенство (a) примет вид $(a(z + w) - a(z), w) \geq 0$, что соответствует (b). Для вывода (c) из (b) фиксируем параметр $t > 0$ и в неравенстве (b) элемент w заменим на tw , так что неравенство примет вид $(a(z + tw), tw) \geq (a(z), tw)$. Сократив на $t > 0$, получим условие (c).

Проверим возрастание функции $\varphi_{z,w}(t)$ при возрастании t , т.е. неравенство

$$a(z + tw), w \geq (a(z + sw), w),$$

где $t > s \geq 0$. Пусть $t = s + \sigma$. Запишем соотношения

$$(a(z + tw), w) = (a(z + sw + \sigma w), w) = \varphi_{z+sw,w}(\sigma) \geq \varphi_{z+sw,w}(0).$$

Здесь использовано неравенство (c) для переменной $\sigma \geq 0$. Так как $\varphi_{z+sw,w}(0) = (a(z + sw), w)$, приходим к соотношению

$$(a(z + tw), w) \geq (a(z + sw), w)$$

для $t > s \geq 0$, что доказывает (d).

Для завершения доказательства проверим, что из (d) следует (a). Итак, пусть функция $\varphi_{z,w}(t) = (a(z + tw), w)$ монотонно возрастает по аргументу $t \geq 0$. В частности, $\varphi_{z,w}(1) \geq \varphi_{z,w}(0)$, или подробнее

$$(a(z + w), w) \geq (a(z), w).$$

Полагая $z + w = y$, откуда $w = y - z$, приходим к неравенству

$$(a(y), y - z) \geq (a(z), y - z),$$

что соответствует неравенству (a). Тем самым проверена эквивалентность всех условий леммы, что завершает ее доказательство.

Для реальной проверки условий монотонности вектор-функций полезно следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть функции $a_i(y)$ непрерывно дифференцируемы по $y \in \mathbb{R}^n$ для $i = 1, \dots, n$. Введем функцию $\varphi_{z,w}(t) = (a(z + tw), w)$ переменной $t \geq 0$ для фиксированных $z, w \in \mathbb{R}^n$. Монотонность вектор-функции $a(y)$ эквивалентна каждому из следующих условий:

- (а) $\varphi'_{z,w}(t) \geq 0$ для $t \geq 0$; $z, w \in \mathbb{R}^n$;
 (б) $\varphi'_{z,w}(0) \geq 0$ для $z, w \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\varphi_{z,w}(t)$ составлена из непрерывно дифференцируемых функций и потому сама непрерывно дифференцируема. По лемме 2(d) эта функция монотонно возрастает по $t \geq 0$, что эквивалентно условию $\varphi'_{z,w}(t) \geq 0$, $t \geq 0$. Это доказывает пункт (а) леммы. В частности, при $t = 0$ получаем условие $\varphi'_{z,w}(0) \geq 0$, так что (б) следует из (а). Остается проверить, что из (б) следует (а), т.е. неравенство $\varphi'_{z,w}(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \geq 0$, если $\varphi'_{z,w}(0) \geq 0$. Согласно определению производной по переменной t

$$\varphi'_{z,w}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(a(z + tw + hw), w) - (a(z + tw), w)].$$

В то же время

$$\varphi'_{z+tw,w}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(a(z + tw + hw), w) - (a(z + tw), w)].$$

Так как правые части здесь совпадают, совпадают и левые, т.е.

$$\varphi'_{z,w}(t) = \varphi'_{z+tw,w}(0) \geq 0.$$

Последнее неравенство записано в соответствии с условием (б). Значит, $\varphi'_{z,w}(t) \geq 0$ для $t \geq 0$, т.е. из условия (б) вытекает (а). Это завершает доказательство леммы.

Лемму 3 удобно представить в такой форме.

ЛЕММА 4. Пусть функции $a_i(y)$ непрерывно дифференцируемы по $y \in \mathbb{R}^n$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда монотонность вектор-функции $a(y)$ эквивалентна соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z) w_i w_j \geq 0, \quad z, w \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Здесь $a_{ij}(z) = \partial a_i(z) / \partial z_j$ для $i, j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию

$$\varphi_{z,w}(t) = (a(z + tw), w) = \sum_{i=1}^n a_i(z + tw) w_i,$$

считая $t \geq 0$, и $z, w \in \mathbb{R}^n$ фиксированными. Эта функция составлена из непрерывно дифференцируемых функций и потому сама непрерывно дифференцируема. Используя формулу для производной сложной функции, получим

$$\varphi'_{z,w}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} a_i(z + tw) w_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(z + tw) w_i w_j.$$

В частности, при $t = 0$

$$\varphi'_{z,w}(0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z) w_i w_j.$$

По лемме 3, (б) монотонность вектор-функции $a(y)$ эквивалентна неравенству

$$\varphi'_{z,w}(0) \geq 0,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно (2.3), что соответствует утверждению леммы.

Подведем промежуточный итог. По теореме 2 монотонность оператора $A: X = W_p^1(\Omega) \rightarrow X'$ эквивалентна монотонности порождающей его вектор-функции $a(y) = (a_1(y), \dots, a_n(y))$. В свою очередь по лемме 4 монотонность вектор-функции $a(y)$ эквивалентна неравенству (2.3), если функции $a_i(y)$ непрерывно дифференцируемы. Объединяя приведенные утверждения, приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции $a_i(y)$ непрерывно дифференцируемы по $y \in \mathbb{R}^n$ для всех $i = 1, \dots, n$. Оператор $A: X = W_p^1(\Omega) \rightarrow X'$, порожденный интегральной формой (1.4), является монотонным тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad y, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Здесь $a_{ij}(y) = \partial a_i(y) / \partial y_j$ для $i, j = 1, \dots, n$.

Теорема 3 показывает, что вместо монотонности дифференциального оператора достаточно установить монотонность в форме неравенства (2.4) порождающей его вектор-функции $a(y)$, что существенно проще.

3. Квадратичная форма для оператора A_λ . Применим теорему 3 к оператору A_λ , определенному в (1.8). Функции $a_i(y)$, по которым строится оператор A_λ , указаны в (1.7). Частные производные этих функций имеют вид

$$\begin{aligned} a_{ii}(y) &= \lambda_i |y|^{p-2} + (p-2) \lambda_i |y|^{p-4} y_i^2, \\ a_{ij}(y) &= \lambda_i |y|^{p-4} y_i y_j, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Здесь использована формула $\partial |y| / \partial y_j = y_j / |y|$ для $y \neq 0$. Так как рассматривается случай $p > 2$, представленные функции $a_{ij}(y)$ непрерывны по $y \in \mathbb{R}^n$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Это утверждение очевидно, если $y \neq 0$. Если же $y \rightarrow 0$ в $\mathbb{R}^n$, то функции $a_{ij}(y) \rightarrow 0$, обеспечивая непрерывность в нуле. Следовательно, к рассматриваемому случаю можно применить теорему 3, что приводит к такому утверждению.

ТЕОРЕМА 4. Дифференциальный оператор $A_\lambda: X = W_p^1(\Omega) \rightarrow X'$, определенный в (1.8), является монотонным тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$|y|^{p-2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 + (p-2) |y|^{p-4} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \xi_j y_j \right) \geq 0. \quad (3.1)$$

Заметим, что в этом неравенстве для удобства разделены суммирования по индексам $i, j = 1, \dots, n$.

Упростим соотношение (3.1). Функция слева в (3.1) однородна по $y, \xi \in \mathbb{R}^n$, поэтому неравенство (3.1) достаточно рассматривать на множестве $|\xi| = |y| = 1$, где оно имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 + (p-2) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \xi_j y_j \right) \geq 0. \quad (3.2)$$

Введем матрицу Λ размерности $n \times n$, считая, что на ее диагонали стоят числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а вне диагонали – нули. Для вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ имеем: $\Lambda \xi = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \dots, \lambda_n \xi_n)$, а также

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 = (\Lambda \xi, \xi), \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i y_i = (\Lambda \xi, y), \quad \sum_{j=1}^n \xi_j y_j = (\xi, y).$$

Неравенство (3.2) принимает вид

$$(\Lambda\xi, \xi) + (p-2)(\Lambda\xi, y)(\xi, y) \geq 0, \quad |\xi| = |y| = 1.$$

Этому неравенству можно придать геометрический смысл, если разделить его на положительное число $|\Lambda\xi| = (\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \xi_i^2)^{1/2}$:

$$\frac{(\Lambda\xi, \xi)}{|\Lambda\xi|} + (p-2) \frac{(\Lambda\xi, y)}{|\Lambda\xi|} (\xi, y) \geq 0, \quad |\xi| = |y| = 1. \quad (3.3)$$

Считая, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы три вектора ξ , $\Lambda\xi$, y , введем углы между ними: α – угол между ξ и $\Lambda\xi$; β – между $\Lambda\xi$ и y ; γ – между y и ξ . Тогда неравенство (3.3) можно представить в виде

$$\cos \alpha + (p-2) \cos \beta \cos \gamma \geq 0, \quad |\xi| = |y| = 1.$$

Сосредоточим внимание на этом новом неравенстве. Чтобы его проверить, достаточно вычислить наименьшее значение функции

$$\Phi(\xi, y) = \cos \alpha + (p-2) \cos \beta \cos \gamma \quad (3.4)$$

на множестве $|\xi| = |y| = 1$. Так как векторы ξ , y конечномерны, а функция $\Phi(\xi, y)$ непрерывна, можно вычислять экстремумы этой функции последовательно по переменным y и ξ . Заметим, что функция $\Phi(\xi, y)$ состоит из двух слагаемых, из которых только второе зависит от вектора y , поэтому

$$\min_{|y|=1} \Phi(\xi, y) = \cos \alpha + (p-2) \min_{|y|=1} \cos \beta \cos \gamma. \quad (3.5)$$

Учитывая это, введем вспомогательную функцию $\Psi(y) = \cos \beta \cos \gamma$, считая вектор ξ фиксированным. Ищем $\min \Psi(y)$ на множестве $|y| = 1$.

ЛЕММА 5. *Справедлива формула*

$$\min_{|y|=1} \Phi(y) = \min_{|y|=1} \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{2}(\cos \alpha - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала основной случай, предполагая, что три вектора ξ , $\Lambda\xi$, y лежат в одной плоскости $\Pi(\xi)$, натянутой на векторы ξ и $\Lambda\xi$. Тогда можно воспользоваться элементарной формулой

$$\Psi(y) = \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{2}(\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)). \quad (3.6)$$

Рассмотрим возникающие здесь варианты.

Пусть вектор y лежит внутри угла α , между векторами ξ и $\Lambda\xi$. Этот угол считаем острым, так как $\cos \alpha = (\Lambda\xi, \xi)/|\Lambda\xi| > 0$. Из расположения векторов ξ , $\Lambda\xi$, y следует соотношение $\alpha = \beta + \gamma$, откуда $\beta = \alpha - \gamma$. Подставляя эти равенства в формулу (3.6), приведем ее к виду

$$\Psi(y) = \frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\gamma)) \equiv \psi(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq \alpha.$$

Можно считать, что задана функция одной переменной γ . Эта функция обозначена символом $\psi(\gamma)$. Требуется вычислить ее минимум. Найдем экстремальные точки этой функции. Очевидно, что $\psi'(\gamma) = \sin(\alpha - 2\gamma)$. Из условия $\psi'(\gamma) = 0$ находим экстремальную точку $\gamma = \alpha/2$, откуда $\beta = \alpha/2$. При этом $\psi''(\gamma) = -2\cos(\alpha - 2\gamma)$ в точке $\gamma = \alpha/2$ принимает отрицательное значение. Значит, точка $\gamma = \alpha/2$ обеспечивает максимальное значение функции $\Psi(y)$. Поэтому будем считать, что вектор y лежит вне острого угла α . Тогда согласно построению $\beta = \alpha + \gamma$, откуда $\beta - \gamma = \alpha$. При этих условиях формула (3.6) принимает вид

$$\Psi(y) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + 2\gamma) + \cos \alpha) \equiv \psi_0(\gamma), \quad \gamma > 0.$$

Появилась новая функция $\psi_0(\gamma)$ одной переменной γ . При этом $\psi'_0(\gamma) = -\sin(\alpha + 2\gamma)$. Решая уравнение $\psi'_0(\gamma) = 0$ и считая углы α и γ положительными, получим соотношение $\alpha + 2\gamma = \pi$, откуда $\gamma_m = \pi/2 - \alpha/2$. При этом $\psi''_0(\gamma) = -2\cos(\alpha + 2\gamma)$, так что $\psi''_0(\gamma_m) = 2 > 0$. Это обеспечивает минимум функции $\psi_0(\gamma)$ в точке γ_m и при этом $\psi_0(\gamma_m) = (1/2)(\cos \alpha - 1)$, что доказывает лемму для рассматриваемого случая, когда три вектора ξ , $\Lambda\xi$, y лежат в одной плоскости.

Остается рассмотреть случай, когда указанное условие не выполнено, т.е. вектор y не принадлежит плоскости $\Pi(\xi)$, натянутой на ξ и $\Lambda\xi$. Тогда определена проекция y_Π вектора y на плоскость $\Pi(\xi)$, причем $0 \leq |y_\Pi| < 1$. Если $y_\Pi = 0$, то $\Psi(y) = 0$, тогда как мы ищем ее отрицательные значения. Поэтому считаем $0 < |y_\Pi| < 1$. Представим $y = y_\Pi + y_0$, где y_0 ортогонален плоскости $\Pi(\xi)$, так что $(\xi, y_0) = 0$ и $(\Lambda\xi, y_0) = 0$. Отсюда

$$(\xi, y) = (\xi, y_\Pi + y_0) = (\xi, y_\Pi) = |y_\Pi| \left(\xi, \frac{y_\Pi}{|y_\Pi|} \right) = |y_\Pi|(\xi, y_1).$$

Здесь введен вектор $y_1 = y_\Pi/|y_\Pi|$. Очевидно, что $y_1 \in \Pi(\xi)$ и $|y_1| = 1$. Аналогично вычисляем

$$(\Lambda\xi, y) = (\Lambda\xi, y_\Pi + y_0) = (\Lambda\xi, y_\Pi) = |y_\Pi| \left(\Lambda\xi, \frac{y_\Pi}{|y_\Pi|} \right) = |y_\Pi|(\Lambda\xi, y_1).$$

Вычислим функцию

$$\Psi(y) = \frac{(\Lambda\xi, y)}{|\Lambda\xi|}(\xi, y) = |y_\Pi|^2 \frac{(\Lambda\xi, y_1)}{|\Lambda\xi|}(\xi, y_1) = |y_\Pi|^2 \Psi(y_1).$$

Так как $|y_\Pi| < 1$, значение функции $\Psi(y)$ уменьшается по модулю в сравнении с $\Psi(y_1)$. Нас интересует случай $\Psi(y) < 0$; тогда

$$\Psi(y_1) = \frac{1}{|y_\Pi|^2} \Psi(y) < \Psi(y) < 0.$$

Это значит, что функция $\Psi(y)$ достигает своего минимума на плоскости $\Pi(\xi)$. Но этот случай уже рассмотрен ранее и привел к утверждению леммы, что завершает ее доказательство.

Вернемся к функции $\Phi(\xi, y)$, определенной формулой (3.4), и представим ее в виде $\Phi(\xi, y) = \cos \alpha + (p - 2)\Psi(y)$. Отсюда

$$\min_{|y|=1} \Psi(\xi, y) = \cos \alpha + (p - 2) \min_{|y|=1} \Psi(y).$$

С учетом леммы 5 получаем

$$\min_{|y|=1} \Phi(\xi, y) = \cos \alpha + (p-2) \frac{1}{2} (\cos \alpha - 1) = \frac{p}{2} \cos \alpha - \frac{p-2}{2}.$$

Условие $\min_{|y|=1} \Phi(\xi, y) \geq 0$ принимает вид неравенства

$$\frac{p}{2} \cos \alpha - \frac{p-2}{2} \geq 0,$$

или эквивалентного ему неравенства

$$\cos \alpha \geq \frac{p-2}{p}.$$

Мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 5. *Условие неотрицательности квадратичной формы (3.1) эквивалентно неравенству*

$$F(\xi) = \frac{(\Lambda \xi, \xi)}{|\Lambda \xi|} = \cos \alpha \geq \frac{p-2}{p}, \quad p > 2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

4. Доказательство теоремы 1. Дальнейшее изложение посвящено изучению неравенства (3.7). Будем искать наименьшее значение функции $F(\xi)$ на множестве $|\xi| = 1$. Так как получается задача на условный экстремум, введем функцию Лагранжа

$$L(\xi, \mu) = \frac{(\Lambda \xi, \xi)}{|\Lambda \xi|} + \mu(|\xi|^2 - 1),$$

где μ – множитель Лагранжа. Для упрощения вычислений введем обозначения:

$$B = (\Lambda \xi, \xi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2, \quad C = |\Lambda \xi|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \xi_i^2,$$

и представим функцию Лагранжа в виде

$$L(\xi, \mu) = BC^{-1/2} + \mu(|\xi|^2 - 1). \quad (4.1)$$

Вычислим ее частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial B}{\partial \xi_i} C^{-1/2} - \frac{1}{2} BC^{-3/2} \frac{\partial C}{\partial \xi_i} + 2\mu \xi_i, \quad i = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} &= |\xi|^2 - 1. \end{aligned}$$

Так как $\partial B / \partial \xi_i = 2\lambda_i \xi_i$ и $\partial C / \partial \xi_i = 2\lambda_i^2 \xi_i$ для $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 2\lambda_i \xi_i C^{-1/2} - \lambda_i^2 \xi_i BC^{-3/2} + 2\mu \xi_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для поиска точек экстремума полученные выражения приравняем нулю и каждое уравнение умножим на $C^{3/2}$, что дает систему

$$2\lambda_i \xi_i C - \lambda_i^2 \xi_i B + 2\mu \xi_i C^{3/2} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Для дальнейшего полезно следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Предположим, что все числа λ_i различны для $i = 1, \dots, n$. Если координаты точки $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ удовлетворяют системе (4.2), то не более двух координат отличны от нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что три координаты ξ_i, ξ_j, ξ_k отличны от нуля. Выделим уравнения с номерами i, j, k из системы (4.2) и сократим эти уравнения на числа ξ_i, ξ_j, ξ_k соответственно. Получим систему

$$\begin{aligned} 2\lambda_i C - \lambda_i^2 B + 2\mu C^{3/2} &= 0, \\ 2\lambda_j C - \lambda_j^2 B + 2\mu C^{3/2} &= 0, \\ 2\lambda_k C - \lambda_k^2 B + 2\mu C^{3/2} &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения вычтем второе, а из второго – третье. Останутся соотношения

$$\begin{aligned} 2(\lambda_i - \lambda_j)C &= (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)B, \\ 2(\lambda_j - \lambda_k)C &= (\lambda_j^2 - \lambda_k^2)B. \end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений можно сократить на общий множитель, что приводит к системе

$$2C = (\lambda_i + \lambda_j)B, \quad 2C = (\lambda_j + \lambda_k)B.$$

Так как левые части равны, приравняем правые части, что дает равенство $\lambda_i B = \lambda_k B$, откуда $\lambda_i = \lambda_k$. Однако согласно предположению все числа λ_i различны, поэтому равенство $\lambda_i = \lambda_k$ при $i \neq k$ приводит к противоречию, которое и доказывает утверждение.

Продолжим решение системы (4.2). Из леммы 6 следует, что в точке экстремума функции Лагранжа $L(\xi, \mu)$ не более двух координат вектора ξ_m отличны от нуля. Пусть $\xi_i \neq 0$ и $\xi_j \neq 0$. Уравнения с номерами i, j сократим на числа ξ_i, ξ_j ; получим систему

$$\begin{aligned} 2\lambda_i C - \lambda_i^2 B + 2\mu C^{3/2} &= 0, \\ 2\lambda_j C - \lambda_j^2 B + 2\mu C^{3/2} &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения вычтем второе и результат сократим на общий множитель $\lambda_i - \lambda_j$. Указанные действия приводят к равенству $2C = (\lambda_i + \lambda_j)B$, или подробно

$$2(\lambda_i^2 \xi_i^2 + \lambda_j^2 \xi_j^2) = (\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_i \xi_i^2 + \lambda_j \xi_j^2), \quad \xi_i^2 + \xi_j^2 = 1.$$

Здесь вторым записано уравнение связи. Получилась система двух уравнений для определения двух неизвестных ξ_i^2 и ξ_j^2 . Система линейна и легко решается. Ответ имеет вид

$$\xi_i^2 = \frac{\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad \xi_j^2 = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_j}. \quad (4.3)$$

Значение функции $F(\xi)$ в точке экстремума $\xi_{\min}$ имеет вид

$$F(\xi_{\min}) = \frac{2\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}{\lambda_i + \lambda_j}.$$

Заметим, что $F(\xi_{\min}) < 1$, так как $2\sqrt{\lambda_i \lambda_j} < \lambda_i + \lambda_j$, если $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Остается рассмотреть случай, когда всего одна координата ξ_i вектора ξ отлична от нуля и при этом удовлетворяется система (4.2). Из условия $|\xi| = 1$ следует, что $\xi_i = 1$, а также

$$(\Lambda\xi, \xi) = \lambda_i, \quad |\Lambda\xi| = \lambda_i, \quad F(\xi) = (\Lambda\xi, \xi)/|\Lambda\xi| = 1.$$

Так как $F(\xi) = \cos \alpha$, в рассматриваемом случае функция $F(\xi)$ достигает своего наибольшего значения.

Изложенное выше приводит к такому заключению.

ТЕОРЕМА 6. Пусть числа λ_i различны для $i = 1, \dots, n$. Тогда все локальные минимумы функции $F(\xi) = (\Lambda\xi, \xi)/|\Lambda\xi|$ достигаются на двумерных координатных плоскостях и вычисляются по формулам

$$2 \frac{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Теперь есть возможность завершить доказательство теоремы 1. Согласно теореме 4 дифференциальный оператор A_λ , определенный в (1.8), является монотонным тогда и только тогда, когда выполняется условие неотрицательности для квадратичной формы (3.1). По теореме 5 указанное условие неотрицательности эквивалентно неравенству (3.7), которое имеет вид $F(\xi) \geq (p-2)/p$, $|\xi| = 1$. Это условие должно выполняться для всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$, в том числе на векторах, где функция $F(\xi)$ достигает локальных минимумов. Другими словами, согласно теореме 6, если все числа λ_i различны, то для всех $i, j = 1, \dots, n$ должны выполняться соотношения

$$\frac{2\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}{\lambda_i + \lambda_j} \geq \frac{p-2}{p}.$$

В этих неравенствах перейдем к обратным величинам:

$$\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \leq \frac{2p}{p-2}$$

или

$$\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} + \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \leq \frac{2p}{p-2}. \quad (4.4)$$

Введем переменную $k = \sqrt{\lambda_i/\lambda_j}$; тогда неравенство (4.4) примет вид $k + 1/k \leq 2p/(p-2)$.

Это неравенство решается через квадратное уравнение $k^2 - 2pk/(p-2) + 1 = 0$, корни которого имеют вид $k_{1,2} = (p \pm 2\sqrt{p-1})/(p-2)$. Отсюда следует, что $k_1 \leq k \leq k_2$, или в терминах чисел λ_i

$$\frac{p-2\sqrt{p-1}}{p-2} \leq \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \leq \frac{p+2\sqrt{p-1}}{p-2}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Этому двойному неравенству можно придать более наглядный вид:

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq c_p^2, \quad c_p = \frac{p+2\sqrt{p-1}}{p-2}, \quad (4.5)$$

где $\lambda_{\max}$ есть наибольшее из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\lambda_{\min}$ – наименьшее из них. Неравенство (4.5) есть утверждение теоремы 1. Оно доказано для случая различных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Если же некоторые из этих чисел совпадают, то следует ввести малые возмущения этих чисел таким способом, чтобы новые числа стали различными. Тогда станет возможным применить формулу (4.5), после чего следует перейти к пределу в возмущениях. Так как неравенства (4.5) очень просты, то предельный переход осуществляется без труда. Пусть, например,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n.$$

Введем новые числа

$$\lambda'_2 = \lambda_2 + \varepsilon, \quad \dots, \quad \lambda'_k = \lambda_k + (k-1)\varepsilon.$$

Если выбрать число $\varepsilon > 0$ достаточно малым, то все числа становятся различными, причем

$$\lambda_1 < \lambda'_2 < \dots < \lambda'_k < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n.$$

Это дает возможность применить соотношение (4.5), которое принимает вид

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq c_p^2.$$

Так как здесь нет явной зависимости от параметра ε , то указанное соотношение сохраняется после предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это доказывает теорему 1 в полном объеме.

Заметим, что частный случай изложенной выше теории, когда размерность $n = 2$, изучен в работе [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [2] И. В. Скрышник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, Наука, М., 1990.
- [3] Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [4] А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.
- [5] Г. И. Лаптев, “Условия монотонности операторов Немыцкого со степенными нелинейностями”, *Уч. зап. Российского гос. соц. ун-та*, Часть 1, 2009, 223–228.

Г. И. Лаптев

Российский государственный социальный
университет, г. Москва
E-mail: glaptev@yandex.ru

Поступило

20.06.2012

Исправленный вариант

20.04.2014