Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Хелемский, М. Е. Поляков, Описание морфизмов из гильбертова модуля над C^* -алгеброй в эту алгебру, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 560–567

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm976>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:21:28

ОПИСАНИЕ МОРФИЗМОВ ИЗ ГИЛЬБЕРТОВА МОДУЛЯ НАД C^* -АЛГЕБРОЙ В ЭТУ АЛГЕБРУ

М. Е. Поляков, А. Я. Хелемский

В данной статье предлагается полное описание произвольного морфизма ψ из левого гильбертова модуля H над C^* -алгеброй A в эту алгебру, рассматриваемую как левый A -модуль. Данные морфизмы естественным образом возникают при изучении условия проективности H . Модуль H можно представить в виде суммы $(\bigoplus_{p \in \Sigma} H_p \otimes K_p) \oplus H_0$, где H_p – гильбертовы модули вида Ap , K_p – некоторые гильбертовы пространства, а гильбертов модуль H_0 не содержит ни одного подмодуля, изометрически изоморфного левому модулю вида H_p ни для одного $p \in \Sigma$. Тогда произвольный морфизм ψ однозначно задается системой операторов вида $Q_p: K_p \rightarrow pA$ по формуле $\psi(k_p \otimes h_p) = k_p Q_p(h_p) \in ApA$, $p \in \Sigma$, причем нормы этих операторов ограничены в совокупности.

Библиография: 6 названий.

Предметом этой статьи является полное описание произвольного морфизма ψ из левого гильбертова модуля H над C^* -алгеброй A в эту алгебру, рассматриваемую как левый A -модуль (см. ниже теорему 2). В дальнейшем мы будем называть морфизмы такого вида *характерами* модуля H . Характеры модулей естественным образом возникают при исследовании вопроса о проективности гильбертова модуля H над алгеброй A . Именно, существование ненулевого характера $\psi: H \rightarrow A$ оказывается необходимым условием проективности. (Другие исследования на тему проективности гильбертовых модулей над операторными алгебрами см. [1]–[4]).

Напомним, что проектор $p \in A$ называется *элементарным*, если алгебра pAp одномерна. В этом случае несложно проверить, что левый идеал $H_p = Ap$ является гильбертовым A -модулем со скалярным произведением, корректно определенным формулой $\langle ap, bp \rangle p = pb^*ap$ (ср. [5, гл. IV, 10]). Тогда сопряженный к нему правый A -модуль H_p^* изометрически изоморфен (как модуль) правому идеалу $pA \subset A$.

В данной статье символами $\dot{\otimes}$ и $\dot{\otimes}$ будут обозначаться соответственно *гильбертово* и *проективное* тензорные произведения. Символ $\dot{\otimes}$ будет использоваться также для обозначения *тензорного произведения операторов* ($a \dot{\otimes} b \in \mathcal{B}(H_1 \dot{\otimes} H_2)$).

Множество классов эквивалентности всех элементарных проекторов алгебры A по Мюррею–фон Нойманну [6, с. 154] обозначим через Σ . Тогда, как будет показано ниже (теорема 1), гильбертов модуль H можно разложить в ортогональную сумму левых гильбертовых модулей вида

$$\left(\bigoplus_{p \in \Sigma} H_p \dot{\otimes} K_p \right) \oplus H_0,$$

где H_p – гильбертовы модули вида Ap , K_p – некоторые гильбертовы пространства, а гильбертов модуль H_0 не содержит ни одного подмодуля, изометрически изоморфного

левому модулю вида H_p ни для одного $p \in \Sigma$. Указанное представление гильбертова модуля H в виде прямой суммы его подмодулей мы будем называть *каноническим*.

Обозначим для каждого модуля вида $H_p \dot{\otimes} K_p$ символом A_p образ ассоциированного с этим модулем представления $A \rightarrow \mathcal{B}(H_p \dot{\otimes} K_p)$, символом $\mathcal{K}(H_p)$ алгебру конечно-мерных операторов на H_p , символом $\mathcal{B}(H_p)$ алгебру непрерывных операторов на том же пространстве. Тогда выполняется условие

$$\mathcal{K}(H_p) \dot{\otimes} 1 \subset A_p \subset \mathcal{B}(H_p) \dot{\otimes} 1.$$

В этих терминах характер ψ однозначно задается семейством совместно ограниченных по норме непрерывных операторов $Q_p: K_p \rightarrow (H_p)^*$, $p \in \Sigma$. А именно, на подмодуле H_0 указанный характер всегда равен 0, а на каждом из подмодулей вида $H_p \dot{\otimes} K_p$, $p \in \Sigma$, он определяется следующей формулой:

$$\psi(ap \otimes k) = apQ_p(k), \quad ap \in H_p, \quad k \in K_p.$$

Таким образом, $\text{Im}(H_p \otimes K_p) \subset H_p H_p^* = \{apb : a, b \in A\}$. Кроме того, норма характера ψ оказывается равной точной верхней грани норм операторов Q_p , взятой по всем $p \in \Sigma$.

Обратно, всякое семейство операторов $Q_p: K_p \rightarrow (H_p)^*$, $p \in \Sigma$, нормы которых ограничены в совокупности, задает некоторый характер модуля H .

1. Характеры модуля H и неприводимые подмодули. Итак, пусть $A - C^*$ -алгебра. *Гильбертовым модулем* над ней называется левый A -модуль H , являющийся гильбертовым пространством и такой, что для любых $x, y \in H$, $a \in A$ выполнено условие $\langle a \cdot x, y \rangle = \langle x, a^* \cdot y \rangle$. Тогда ассоциированное с этим модулем представление $T: A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ является $*$ -гомоморфизмом.

Пусть H – гильбертов модуль, ψ – некоторый его ненулевой характер. Оказывается, что сам факт существования такого характера дает полезную информацию о существовании неприводимых подмодулей гильбертова модуля H . Исследование этих вопросов будет содержанием п. 1 статьи.

ЛЕММА 1. Пусть $x \in H$ и $a = \psi(x)$. Предположим, что самосопряженные элементы $u_1, \dots, u_n \in A$ обладают следующими свойствами: $u_i u_j = 0$ при $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, и $\|u_i\| = 1$ при $i = 1, \dots, n$. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ $\|u_i a\| \geq \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$. Тогда число n можно оценить сверху константой, зависящей от ε , $\|x\|$, $\|\psi\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $u_i a = \psi(u_i \cdot x)$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому $\varepsilon \leq \|u_i a\| \leq \|\psi\| \|u_i \cdot x\|$. Следовательно, все числа $\|u_i \cdot x\|$ оцениваются снизу константой C , зависящей от ε , $\|\psi\|$.

С другой стороны, при $i \neq j$ мы имеем $\langle u_i \cdot x, u_j \cdot x \rangle = \langle x, u_i u_j \cdot x \rangle = 0$. Поэтому векторы $u_i \cdot x$, $i = 1, \dots, n$, ортогональны в H . Кроме того, представление $T: A \rightarrow \mathcal{B}(H)$, как известно [6, с. 57], является сжимающим, а потому для любых $a \in A$, $x \in H$ справедлива оценка $\|a \cdot x\| \leq \|a\| \|x\|$. Следовательно,

$$nC^2 \leq \sum_{i=1}^n \|u_i \cdot x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n u_i \cdot x \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 \|x\|^2.$$

Нам осталось оценить сверху норму элемента $\sum_{i=1}^n u_i$. Этот элемент самосопряжен, а в силу определения C^* -алгебры для любого самосопряженного элемента $a \in A$ и любого натурального $m = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо равенство $\|a^m\| = \|a\|^m$. Кроме того,

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^m = \sum_{i=1}^n u_i^m,$$

поскольку $u_i u_j = 0$ при $i \neq j$. Поэтому

$$\left\|\sum_{i=1}^n u_i\right\|^m = \left\|\sum_{i=1}^n u_i^m\right\| \leq n.$$

Отсюда $\|\sum_{i=1}^n u_i\| \leq 1$.

Окончательно, $nC^2 \leq \|x\|^2$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим произвольный элемент $x \in H$. Пусть $v = \psi(x) \neq 0$. Потому и $v^*v \neq 0$. При этом $v^*v = \psi(v^* \cdot x)$. Следовательно, в $\text{Im } \psi$ лежит хотя бы один ненулевой положительный элемент алгебры A .

Обозначим этот положительный элемент через u . Пусть $u = \psi(x')$. Сейчас мы изучим спектр элемента u , воспользовавшись функциональным исчислением на этом спектре.

ЛЕММА 2. *Все точки спектра u изолированы, кроме, быть может, нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда найдется последовательность точек $s_i \in \sigma(u) \subset \mathbb{R}^+$, сходящаяся к некоторой ненулевой точке $s \in \sigma(u) \subset \mathbb{R}^+$, причем для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено условие $s \neq s_i$. Без ограничения общности можно считать, что для любого $i \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $s_i > s/2$. Так как каждая из точек s_i лежит на ненулевом расстоянии от всех остальных, то найдется последовательность положительных непрерывных функций f_i , определенных на $\sigma(u)$, для которых справедливы равенства $f_i(s_i) = 1$, $\|f_i\| = 1$, $f_i f_j \equiv 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим элементы $u_i = f_i(u)$. Они удовлетворяют всем условиям леммы 1 при $\varepsilon = s/2$, а потому число их конечно. Следовательно, мы получили противоречие. Лемма доказана.

Напомним, что элемент $p \in A$ называется *проектором*, если $p^2 = p$ и $p^* = p$.

ЛЕММА 3. *Для любого ненулевого положительного элемента $u = \psi(x')$, $x' \in H$, найдется проектор $p \in A$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что $pu = up = prp = \lambda p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s – ненулевая изолированная точка спектра элемента u , $\delta_s(t)$ – ее индикатор. Тогда проектор $p = \delta_s(u)$ и число $\lambda = s$ удовлетворяют всем перечисленным условиям. Лемма доказана.

Так как $p = (\lambda)^{-1}pu = \psi((\lambda)^{-1}p \cdot x')$, то элемент p также лежит в образе морфизма ψ .

Теперь напомним, что проектор $p \in A$ называется *минимальным*, если любой подчиненный ему проектор совпадает либо с p , либо с 0.

ЛЕММА 4. *В образе ψ лежит хотя бы один ненулевой минимальный проектор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем, что в образе ψ лежит хотя бы один ненулевой проектор $p = \psi(x)$. Пусть $p_n < p_{n-1} < \dots < p_1 < p$ — строго возрастающая последовательность проекторов из A . Так как $p_i p = p_i$, то $p_i = \psi(p_i \cdot x)$, $i = 1, \dots, n$. Итак, все проекторы p_i также лежат в образе ψ .

Применяя к проекторам $q_i = p_i - p_{i-1}$ лемму 1 при $\varepsilon = 1$, получаем, что число их не может быть больше некоторой константы. Лемма доказана.

Назовем ненулевой проектор $q \in A$ *элементарным*, если для любого $v \in A$ элемент qvq пропорционален q .

ЛЕММА 5. *Если проектор $q \in \text{Im } \psi$ минимален, то он элементарен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить, что для любого $v \in A$ элемент qvq пропорционален q . Можно ограничиться случаем, когда v положителен, так как любой элемент алгебры A есть линейная комбинация положительных. Тогда элемент $u = qvq$ также положителен. Если $u = 0$, то все доказано. Пусть $u \neq 0$. Очевидно, $u \in \text{Im } \psi$.

Из леммы 3 вытекает существование ненулевого проектора p , для которого $up = p$, $pup = \lambda p$ при ненулевом λ . Поэтому $\text{Im } p \subset \text{Im } u \subset \text{Im } q$. В силу минимальности проектора q этот проектор совпадает с p . Итак, $quq = \lambda q$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *В образе любого ненулевого характера $\psi: H \rightarrow A$ содержится хотя бы один ненулевой элементарный проектор.*

Однако хорошо известно, что для любого элементарного проектора $p \in A$ левый идеал Ap является замкнутым и минимальным. С учетом этого замечания мы получаем следующий вывод.

ЛЕММА 6. *Если морфизм ψ инъективен и переводит элемент $x \in H$ в элементарный проектор $p \in A$, то пространство $Ax \subset H$ является неприводимым подмодулем в H , причем $p \cdot x = x$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку морфизм ψ переводит любое собственное инвариантное подпространство пространства Ax в собственный идеал $J \subset Ap$, то пространство Ax представляет собой неприводимый подмодуль в H .

Так как $\psi(p \cdot x) = p\psi(x) = p = \psi(x)$, то в силу инъективности ψ справедливо равенство $p \cdot x = p$. Лемма доказана.

2. Каноническое разложение модуля H и модульные характеры. Нам потребуются некоторые вспомогательные рассуждения.

Если проектор p является элементарным, то, как было указано во введении, на идеале Ap естественным образом возникает структура гильбертова модуля над алгеброй A . В этом случае

$$\langle ap, ap \rangle = \|\langle ap, ap \rangle p\| = \|pa^*ap\| = \|ap\|^2.$$

Поэтому гильбертова норма элемента ap совпадает с исходной нормой алгебры A . Мы обозначим соответствующий гильбертов модуль через H_p .

Важность модуля H_p для наших целей объясняется следующим предложением.

ЛЕММА 7. *Пусть для проектора $p \in A$ и некоторого ненулевого элемента $x \in H$ справедливо равенство $p \cdot x = x$. Тогда существует естественный изометрический изоморфизм левых A -модулей $Ap = H_p$ и $Ax \subset H$. В частности, пространство Ax замкнуто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = x/\|x\|$. Для любых элементов $a, b \in A$ справедливо равенство $\langle a \cdot y, b \cdot y \rangle p = \langle ap \cdot y, bp \cdot y \rangle p = \langle pb^* ap \cdot y, y \rangle p = \langle y, y \rangle pb^* ap = pb^* ap$. Таким образом, построен изометрический изоморфизм $T: Ap \rightarrow Ax$ такой, что $ap \rightarrow ap \cdot y = a \cdot y$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если существует хотя бы один ненулевой характер $\psi: H \rightarrow A$, то модуль H содержит подмодуль, изометрически изоморфный Ap .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение сразу следует из следствия леммы 5, объединенного с леммами 6 и 7.

Следующая лемма описывает условия, при которых модули H_p и H_q оказываются изоморфными. Доказательство этой леммы можно найти в [4], но мы повторим его здесь ради полноты изложения.

ЛЕММА 8. Для любых двух элементарных проекторов $p, q \in A$ равносильны следующие условия:

- 1) проекторы p и q эквивалентны по Мюррею–фон Нойманну (иными словами, существует элемент $v \in A$ такой, что $p = v^*v$ и $q = vv^*$);
- 2) для некоторого $a \in A$ элемент raq не равен 0;
- 3) левые A -модули H_p и H_q алгебраически изоморфны;
- 4) эти же модули изометрически изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 4) Рассмотрим отображение $\pi: H_p \rightarrow H_q$, задаваемое формулой $a \rightarrow av^*$. Очевидно, это морфизм левых A -модулей. Более того, это изометрия, так как $\|\pi(a)\|^2 = \|(av^*)(av^*)^*\| = \|ava^*\| = \|aa^*\| = \|a\|^2$. Кроме того, обратным к указанному является отображение $(\pi)^{-1}: H_q \rightarrow H_p$, задаваемое формулой $a \rightarrow av$.

4) $\implies$ 3) Очевидно.

3) $\implies$ 2) Пусть отображение $\pi: H_p \rightarrow H_q$ представляет собой алгебраический изоморфизм. Тогда $p\pi(p)q = p\pi(p) = \pi(p \cdot p) = \pi(p) \neq 0$.

2) $\implies$ 1) Пусть для некоторого $a \in A$ элемент $a' = raq$ отличен от 0. Тогда обозначим $v = (a')^*/\|a'\|$. Норма элемента v^*v равна 1, а сам он имеет вид pbr и потому пропорционален p . Следовательно, он равен p . Аналогичным образом получаем равенство $vv^* = q$. Лемма доказана.

Рассмотрим множество всех классов эквивалентности элементарных проекторов из A по Мюррею–фон Нойманну. Ему соответствует некоторая максимальная система попарно неэквивалентных проекторов A , в дальнейшем обозначаемая Σ .

Теперь фиксируем элементарный проектор $p \in A$ и рассмотрим некоторую систему левых A -модулей, изометрически изоморфных H_p . Обозначим эту систему через H_p^δ , $\delta \in \Delta$, где Δ – произвольное множество индексов. Пусть $\Delta \cdot H_p$ – гильбертова сумма этих модулей.

Эту же сумму можно описать иначе. Для этого напомним [6, с. 230–231], что на алгебраическом тензорном произведении гильбертовых пространств H' и H'' можно ввести скалярное произведение по формуле $\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \langle y_1, y_2 \rangle$. Пополнение гильбертова пространства $H' \otimes H''$ по норме, порожденной этим скалярным произведением, обозначается $H' \dot{\otimes} H''$ и называется *гильбертовым тензорным произведением* пространств H' и H'' .

Теперь рассмотрим гильбертово пространство $\ell^2(\Delta)$ всех функций $f(s)$ на множестве Δ , отличных от нуля лишь в счетном числе точек и удовлетворяющих условию

$\sum_{s \in \Delta} |f(s)|^2 < \infty$. Очевидно, эти функции образуют гильбертово пространство, базисом в котором служат индикаторы всех одноточечных подмножеств Δ .

Непосредственно проверяется следующая простая лемма.

ЛЕММА 9. *Гильбертова сумма $\Delta \cdot H_p$ изометрически изоморфна гильбертову тензорному произведению $H_p \otimes \ell^2(\Delta)$.*

ТЕОРЕМА 1. *Всякий левый гильбертов A -модуль H изометрически изоморфен модулю вида*

$$\left(\bigoplus_{p \in \Sigma} H_p \otimes K_p \right) \oplus H_0,$$

где H_p – левые A -модули вида $A p$, K_p – произвольные гильбертовы пространства, а модуль H_0 не содержит ни одного подмодуля, изометрически изоморфного H_p , ни для какого $p \in \Sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Цорна для модуля H найдется максимальная система Δ ортогональных подмодулей, изометрически изоморфных H_p для некоторых $p \in \Sigma$. Замыкание линейной оболочки этой системы модулей обозначим через H' . Тогда модуль $H_0 = H \ominus H'$ не содержит ни одного подмодуля, изометрически изоморфного H_p , $p \in \Sigma$. Далее, для каждого $p \in \Sigma$ обозначим совокупность подмодулей из Δ , изометрически изоморфных H_p , через Δ_p . По лемме 8 получаем представление модуля H' в виде прямой суммы $H' = \bigoplus_{p \in \Sigma} \Delta_p \cdot H_p$. Воспользовавшись леммой 9, определим множество $K_p = \ell^2(\Delta_p)$, $p \in \Sigma$. Теорема доказана.

Напомним, что указанное представление названо нами во введении к данной статье *каноническим*.

ЛЕММА 10. *На пространстве H_0 любой характер модуля H равен 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение сразу выводится из следствия леммы 7. Лемма доказана.

3. Описание морфизма ψ : необходимое и достаточное условие. В данном пункте завершается полное описание характера ψ .

Рассмотрим произвольный элементарный проектор $p \in \Sigma$ и элемент $k \in K_p$. Тогда $p \cdot (p \otimes k) = p \otimes k$. Поэтому если $\psi(p \otimes k) = b \in A$, то $pb = b$.

Каждому элементу pb правого идеала $pA \subset A$ соответствует функционал на гильбертовом пространстве $A p$, действующий по формуле $f(ap)p = pbap = \langle ap, b^*p \rangle p$. В силу теоремы Рисса построенное отображение $pA \rightarrow H_p^*$ является изометрическим изоморфизмом правых A -модулей. Таким образом, каждому элементарному проектору $p \in \Sigma$ можно сопоставить непрерывный оператор $Q_p: K_p \rightarrow H_p^*$, задаваемый формулой $k \rightarrow \psi(p \otimes k)$. Поскольку $\psi(ap \otimes k) = a\psi(p \otimes k) = aQ_p(k)$, то в силу леммы 10 система операторов Q_p , $p \in \Sigma$, однозначно задает характер ψ . Ясно, что норма каждого оператора Q_p не превосходит нормы характера ψ . Поэтому $\sup_{p \in \Sigma} \|Q_p\| \leq \|\psi\|$. Докажем, что в действительности здесь выполняется точное равенство.

ЛЕММА 11. *Норма характера $\psi: H \rightarrow A$ есть точная верхняя грань норм операторов $Q_p: K_p \rightarrow H_p^*$, взятая по всем элементам $p \in \Sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный элемент $h \in H$. Он может быть представлен в виде суммы

$$h = \sum_{p \in \Sigma} a_p p \otimes k_p + h_0, \quad a_p \in A, \quad k_p \in K_p, \quad h_0 \in H_0.$$

Ясно, что

$$\|h\|^2 = \sum_{p \in \Sigma} \|a_p p\|^2 \|k_p\|^2 + \|h_0\|^2.$$

Но

$$\psi(p) = \sum_{p \in \Sigma} a_p Q_p(k_p).$$

Пусть p и q – два различных проектора из Σ (упомянутого выше максимального множества попарно неэквивалентных проекторов алгебры A). Тогда p и q не эквивалентны. В силу леммы 8 для любого элемента $a \in A$ справедливо равенство $paq = 0$. А так как $Q_p(k_p) = pb_p$, $Q_q(k_q) = pb_q$ для некоторых $b_p, b_q \in A$, то $(a_p Q_p(k_p))^* a_q Q_q(k_q) = b_p^* p a_p^* a_q q b_q = 0$. Отсюда ясно, что

$$\begin{aligned} \|\psi(p)\|^2 &= \|(\psi(p))^* \psi(p)\| = \left\| \sum_{p \in \Sigma} (Q_p(k_p))^* a_p^* a_p Q_p(k_p) \right\| \\ &\leq \sum_{p \in \Sigma} \|(Q_p(k_p))^* a_p^* a_p Q_p(k_p)\|. \end{aligned}$$

Однако проектор p элементарен. Поэтому выполнено равенство $pa_p^* a_p p = \|a_p p\|^2 p$. А так как $Q_p(k_p) = p Q_p(k_p)$, то

$$\|(Q_p(k_p))^* a_p^* a_p Q_p(k_p)\| = \|a_p p\|^2 \|Q_p(k_p)\|^2 \leq \left(\sup_{p \in \Sigma} \|Q_p\|^2 \right) \|a_p p\|^2 \|k_p\|^2.$$

Суммируя полученные неравенства по $p \in \Sigma$ и объединяя с предыдущим, получаем

$$\|\psi(p)\|^2 \leq \left(\sup_{p \in \Sigma} \|Q_p\|^2 \right) \sum_{p \in \Sigma} \|a_p p\|^2 \|k_p\|^2.$$

Отсюда ясно, что $\|\psi\| \leq \sup_{p \in \Sigma} \|Q_p\|$. Лемма доказана.

Рассмотрим действие элемента $a_p Q_p(k_p) \in ApA$ на модуле H подробнее. Пусть q – проектор из A , неэквивалентный p . Тогда в силу леммы 8 для любого $a \in A$ справедливо равенство $paq = 0$. Тем самым, любой элемент из ApA действует на модуле Aq как нулевой оператор. Это справедливо и для модуля H_0 . В самом деле, из леммы 7 сразу же следует, что элементарный проектор p равен 0 на H_0 . Поэтому любой оператор вида $a'' p a' \in ApA$ тоже равен 0 на H_0 . Следовательно, этот оператор равен 0 на ортогональном дополнении к модулю $H_p \otimes K_p$.

Для каждого левого A -модуля $H_p \otimes K_p$ обозначим символом A_p образ ассоциированного с ним представления $A \rightarrow \mathcal{B}(H_p \otimes K_p)$. Нетрудно видеть, что $A_p \subset \mathcal{B}(H_p) \otimes 1$. Покажем, что $\mathcal{K}(H_p) \otimes 1 \subset A_p$, где $\mathcal{K}(H_p)$ – алгебра конечномерных операторов.

Нам достаточно проверить, что для любого одномерного оператора $u \in \mathcal{K}(H_p)$ элемент $u \otimes 1$ лежит в A_p . Но общий вид одномерных операторов в гильбертовом пространстве хорошо известен. Именно, существуют фиксированные элементы $h', h'' \in H_p = Ap$

такие, что оператор u переводит элемент $h \in H_p$ в $h''\langle h, h' \rangle \in H_p$. Пусть $h' = a'p$, $h'' = a''p$, где $a', a'' \in A$. Тогда оператор $u \otimes 1$ действует на модуле $H_p \dot{\otimes} K_p$ как умножение слева на элемент $a''pa' \in A$ и потому принадлежит A .

Как было показано выше, любой оператор вида $a''pa'$, $a', a'' \in A$, действует как 0 на ортогональном дополнении к модулю $H_p \dot{\otimes} K_p$. Таким образом, если мы обозначим символом $h' \diamond h''$ оператор из $\mathcal{B}(H)$, переводящий элемент $h \otimes k \in H_p \dot{\otimes} K_p$ в $h''\langle h, h' \rangle \otimes k$ и равный 0 на ортогональном дополнении к $H_p \dot{\otimes} K_p$, то этот оператор лежит в A_p .

Множество операторов в A вида $h' \diamond h''$ при фиксированном $h'' \in H_p$ мы будем называть *столбцом одномерных операторов*. Таким образом, алгебра A содержит столбец одномерных операторов над каждым из модулей $H_p \dot{\otimes} K_p$, $p \in \Sigma$. Этот факт сыграет свою роль при рассмотрении пространственной проективности операторных алгебр.

Резюмируем основные итоги статьи в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi: H \rightarrow A$ – характер модуля H . Тогда он однозначно задается системой непрерывных линейных операторов $Q_p: K_p \rightarrow H_p^*$, точная верхняя грань норм которых равна норме ψ . Именно, на подмодуле H_0 данный характер равен нулю, а на подмодулях вида $H_p \dot{\otimes} K_p$ он действует как отображение, переводящее $ap \otimes k \in H_p \dot{\otimes} K_p$ в $apQ_p(k) \in A$.

Обратно, всякая система непрерывных операторов $Q_p: K_p \rightarrow H_p^*$, нормы которых ограничены в совокупности, задает характер модуля

$$H = \left(\bigoplus_{p \in \Sigma} H_p \dot{\otimes} K_p \right) \oplus H_0$$

по формуле

$$\psi \left(\sum_{p \in \Sigma} a_p p \otimes k_p + h_0 \right) = \sum_{p \in \Sigma} a_p p Q_p(k_p).$$

Здесь $a_p \in A$, $k_p \in K_p$, $h_0 \in H_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения уже доказана; докажем вторую часть. Введенное в условии теоремы отображение, очевидно, линейно и является морфизмом A -модулей. Непрерывность его проверяется при помощи рассуждений, в точности совпадающих с доказательством леммы 11. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Helemskii A. Ya. A description of spatially projective von Neumann algebras // J. Operator Theory. 1994. V. 32. P. 391–398.
- [2] Хелемский А. Я. Гомологическая характеристика факторов типа I // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 4. С. 454–456.
- [3] Хелемский А. Я. Аппроксимативно конечномерные C^* -алгебры с проективными гильбертовыми модулями, их диаграммы Браттели и K_0 -группы // Матем. сб. 1997. V. 188. № 10. P. 131–148.
- [4] Helemskii A. Ya. Projective homological classification of C^* -algebras // Comm. Algebra. 1998. V. 26(3). P. 977–996.
- [5] Rickart C. E. General Theory of Banach algebras. New York: Van Nostrand, 1960.
- [6] Мерфи Дж. C^* -алгебры и теория операторов. М.: Изд-во Факториал, 1997.