Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Дистрибутивно порожденные кольца и дистрибутивные модули, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 568–578

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:02:05

УДК 512.55

ДИСТРИБУТИВНО ПОРОЖДЕННЫЕ КОЛЬЦА И ДИСТРИБУТИВНЫЕ МОДУЛИ

А. А. Туганбаев

Модуль называется дистрибутивно порожденным, если он порождается дистрибутивными подмодулями. Доказано, что кольцо эндоморфизмов конечно порожденного проективного правого модуля M над дистрибутивно порожденным справа кольцом является дистрибутивно порожденным справа кольцом. Если M – модуль над кольцом A и $A/J(A)$ – нормальное кольцо со свойством замены, то M – дистрибутивный модуль тогда и только тогда, когда M – модуль Безу.

Библиография: 9 названий

1. Введение. В настоящей статье все кольца предполагаются ассоциативными и (за исключением некоторых оговоренных случаев) с ненулевой единицей. Модуль M называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей дистрибутивна. Модуль называется *дистрибутивно порожденным*, если он порождается дистрибутивными подмодулями. Непосредственно проверяется, что каждая абелева группа является дистрибутивно порожденным модулем над кольцом целых чисел. Прямая сумма дистрибутивных модулей называется *полудистрибутивным* модулем. Каждый полудистрибутивный модуль дистрибутивно порожден. Любая нециклическая и неквазициклическая неразложимая примарная абелева группа является дистрибутивно порожденным полудистрибутивным модулем над кольцом целых чисел. Если F – поле и A – 5-мерная F -алгебра, порожденная всеми (3×3) -матрицами вида

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix}, \quad f_{ij} \in F,$$

то можно проверить, что алгебра A является полудистрибутивным справа полуцепным слева артиновым кольцом, не являющимся полуцепным слева, и все (правые или левые) A -модули дистрибутивно порождены (см., например, [1, пример 1.22]). Полудистрибутивные модули и кольца изучаются в книге [1].

В [2] доказано, что все односторонние ниль-идеалы дистрибутивно порожденного справа кольца A лежат в первичном радикале этого кольца. Первый основной результат данной работы – теорема 1.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – конечно порожденный проективный правый модуль над дистрибутивно порожденным справа кольцом. Тогда $\text{End}(M)$ – дистрибутивно порожденное справа кольцо. Следовательно, все односторонние ниль-идеалы кольца $\text{End}(M)$ лежат в первичном радикале этого кольца.

Кольцо A называется *строго регулярным*, если для любого элемента $a \in A$ существует элемент $b \in A$ такой, что $a = a^2b$. Кольцо A называется *кольцом со свойством замены*, если выполняются следующие два эквивалентных условия (см. [3]):

- (i) для любого элемента $a \in A$ существует идемпотент $e \in aA$ такой, что $1 - e \in (1 - a)A$;
- (ii) для любого элемента $a \in A$ существует идемпотент $e' \in Aa$ такой, что $1 - e' \in A(1 - a)$.

Если M – модуль над кольцом A и $A/J(A)$ – строго регулярное кольцо, то M – дистрибутивный модуль $\iff M$ – модуль Безу [1, 3.33]. Вторым и третьим основными результатами данной работы являются теоремы 2 и 3.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – модуль над кольцом A и $A/J(A)$ – нормальное кольцо со свойством замены. Тогда M – дистрибутивный модуль $\iff M$ – модуль Безу.

В связи с теоремой 2 заметим, что каждое строго регулярное кольцо является нормальным полупрimitивным кольцом со свойством замены. Если A – коммутативное кольцо и все простые идеалы кольца A максимальны, то A – нормальное кольцо со свойством замены. Если A – прямое произведение бесконечного числа полей, то можно проверить, что кольцо формальных степенных рядов $A[[x]]$ является коммутативным дистрибутивным кольцом со свойством замены, содержащим бесконечное множество ортогональных идемпотентов. Кроме того, существует коммутативное полупрimitивное кольцо A со свойством замены, которое не является строго регулярным кольцом. Пусть $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, S – кольцо всех рациональных чисел с нечетными знаменателями, R – прямое произведение счетного множества экземпляров поля $\mathbb{Q}$, A – подкольцо кольца R , образованное всеми последовательностями вида $(q_1, q_2, \dots, q_n, s, s, s, \dots)$, где $n \geq 1$, $q_i \in \mathbb{Q}$, $s \in S$. Тогда A – требуемое кольцо.

ТЕОРЕМА 3. Для кольца A со свойством замены равносильны следующие условия:

- (1) A – дистрибутивное справа кольцо;
- (2) A – нормальное правое кольцо Безу;
- (3) A – дистрибутивное слева кольцо;
- (4) A – нормальное левое кольцо Безу;
- (5) для каждого максимального правого или левого идеала M кольца A существует двустороннее кольцо частных ${}_MA_M$, которое является цепным справа кольцом, причем канонический кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow {}_MA_M$ сюръективен.

В связи с теоремой 3 заметим, что первая алгебра Вейля над полем нулевой характеристики является нормальным правым и левым кольцом Безу, которое не является дистрибутивным справа или слева кольцом. Пусть $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, A – подкольцо поля комплексных чисел, образованное числами $a + b\sqrt{5}i$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$. Тогда A – коммутативная дистрибутивная область, не являющаяся кольцом Безу. Кроме того,

для любого максимального идеала M области A канонический кольцевой гомоморфизм из кольца A в кольцо частных A_M не является сюръективным.

В работе доказаны и другие результаты о дистрибутивно порожденных и дистрибутивных модулях. В частности, доказано, что кольцо, эквивалентное в смысле Мориты дистрибутивно порожденному справа кольцу, является дистрибутивно порожденным справа кольцом (следствие 1(1)). Рассматриваются дистрибутивно порожденные справа π -регулярные кольца и дистрибутивные модули над кольцами без единицы (предложения 6 и 7).

2. Определения и обозначения. Через $J(M)$ и $\text{End}(M)$ обозначаются соответственно радикал Джекобсона и кольцо эндоморфизмов модуля M . Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль M называется *модулем Безу*, если каждый конечно порожденный подмодуль модуля M является циклическим модулем. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. Подмножество T кольца A называется *мультипликативным*, если $1 \in T$, $0 \notin T$ и произведение любых элементов множества T принадлежит T . Пусть T – мультипликативное подмножество кольца A такое, что существуют кольцо ${}_T A_T$ и кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow {}_T A_T$ такие, что $f(T) \subseteq U({}_T A_T)$, ${}_T A_T = \{f(a)f(t)^{-1} \mid a \in A, t \in T\} = \{f(t)^{-1}f(a) \mid a \in A, t \in T\}$ и $\text{Ker}(f) = K(T)$. В этом случае кольцо ${}_T A_T$ называется *двусторонним кольцом частных* кольца A относительно T , а гомоморфизм f называется *каноническим гомоморфизмом* для ${}_T A_T$. В том случае, когда $T = A \setminus M$, будем писать ${}_M A_M$ вместо ${}_T A_T$.

Модуль M называется *квазиинвариантным*, если все его максимальные подмодули вполне инвариантны в M . Непосредственно проверяется, что A – квазиинвариантное справа кольцо $\iff$ все правые идеалы кольца A являются идеалами. Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным* кольцом. Кольцо A называется *цорновским*, если $J(A)$ – ниль-идеал и каждый правый идеал кольца A , не лежащий в $J(A)$, содержит ненулевой идемпотент. Кольцо A называется *π -регулярным*, если для любого элемента $a \in A$ существует элемент $b \in A$ такой, что $a^n = a^n b a^n$ для некоторого натурального числа n . Непосредственно проверяется, что каждое π -регулярное кольцо является цорновским кольцом. Кольцо A называется *строго π -регулярным*, если выполнены следующие два эквивалентных условия (см. [4]):

- (i) для любого элемента $a \in A$ существует натуральное число n такое, что $a^n A = a^{n+1} A$;
- (ii) для любого элемента $a \in A$ существует натуральное число m такое, что $A a^m = A a^{m+1}$.

Кольцо A называется *кольцом индекса не более n* , если существует натуральное число n такое, что $a^n = 0$ для любого нильпотентного элемента $a \in A$. Кольцо A называется *полусовершенным*, если $A/J(A)$ – артиново кольцо и все идемпотенты кольца $A/J(A)$ поднимаются до идемпотентов кольца A . Подмножество T кольца A называется *перестановочным справа* (в A), если для любых элементов $a \in A$ и $t \in T$ существуют элементы $b \in A$ и $u \in T$ такие, что $au = tb$. Подмножество T кольца A называется *реверсивным справа*, если для любых элементов $a \in A$ и $t \in T$ таких, что $ta = 0$, существует элемент $u \in T$ такой, что $au = 0$.

Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит

бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Подмодуль N модуля M называется *существенным* (в M), если N имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым подмодулем модуля M . В этом случае мы будем говорить, что M – *существенное расширение* модуля N . Правый модуль M над кольцом A называется *несингулярным*, если правый аннулятор любого ненулевого элемента $t \in M$ не является существенным правым идеалом кольца A . Модуль M называется *нильпотентно инвариантным*, если каждый его нильпотентный эндоморфизм отображает все подмодули модуля M в себя. Циклический модуль M называется *локальным*, если $M/J(M)$ – простой модуль.

3. Доказательство основных результатов.

ЛЕММА 1. (1) Если модуль является суммой дистрибутивно порожденных подмодулей, то этот модуль дистрибутивно порожден.

(2) Если модуль M – сумма дистрибутивных подмодулей M_i ($i \in I$), то M – гомоморфный образ прямой суммы дистрибутивных модулей M_i .

(3) Каждый гомоморфный образ дистрибутивно порожденного модуля является дистрибутивно порожденным модулем.

(4) Каждый правый модуль над дистрибутивно порожденным справа кольцом A дистрибутивно порожден.

(5) Если M – конечно порожденный дистрибутивно порожденный модуль, то существуют дистрибутивные подмодули $M_1, \dots, M_n$ модуля M такие, что $M = \sum_{i=1}^n M_i$ и M – гомоморфный образ модуля $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.

(6) Каждый конечно порожденный правый модуль над дистрибутивно порожденным справа кольцом является гомоморфным образом конечной прямой суммы дистрибутивных правых идеалов этого кольца.

(7) Каждый локальный дистрибутивно порожденный модуль M дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) и (2) проверяются непосредственно.

(3) Пусть $h: M \rightarrow N$ – модульный эпиморфизм и $M = \sum_{i \in I} M_i$, где все M_i – дистрибутивные модули. Тогда все модули $h(M_i)$ являются дистрибутивными и $h(M) = \sum_{i \in I} h(M_i)$.

(4) Согласно (1) каждый свободный правый A -модуль является дистрибутивно порожденным. Поэтому (4) следует из (3) и того, что каждый модуль – гомоморфный образ свободного модуля.

(5) Пусть $M = \sum_{i \in I} M_i$, где все M_i – дистрибутивные модули. Так как M – конечно порожденный модуль, то существует конечное подмножество J в I такое, что $M = \sum_{i \in J} M_i$. Можно считать, что $J = \{1, \dots, n\}$. Теперь (5) следует из (2).

(6) следует из (4) и (5).

(7) Согласно (5) $M = \sum_{i=1}^n M_i$, где все M_i – дистрибутивные модули. Так как M – локальный модуль, то M совпадает с одним из дистрибутивных модулей M_i .

ЛЕММА 2. Пусть e – ненулевой идемпотент кольца A . Тогда имеют место следующие утверждения.

(1) Если N – первичный радикал кольца A , то eNe – первичный радикал кольца eAe .

(2) Если первичный радикал P кольца A содержит все правые ниль-идеалы кольца A , то первичный радикал кольца eAe содержит все правые ниль-идеалы кольца eAe .

(3) Если M – дистрибутивный правый A -модуль, то Me – дистрибутивный правый eAe -модуль.

(4) Если M – дистрибутивный правый идеал кольца A , то eMe – дистрибутивный правый идеал кольца eAe .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Утверждение доказано в [5].

(2) Согласно (1) ePe – первичный радикал кольца eAe . Пусть $X = eXe = eXeAe$ – правый ниль-идеал кольца eAe , a – элемент кольца A и $x = exe \in X$. Так как элемент $exea$ принадлежит правому ниль-идеалу X кольца eAe , то существует натуральное число n такое, что $(exea)^n = 0$. Тогда $(xa)^{n+2} = (exea)^{n+2} = exea(exea)^n exea = exea(exea)^n exea = 0$. Поэтому xA – правый ниль-идеал кольца A . По предположению $xA \subseteq N$. Поэтому $x \in ePe$ и $X \subseteq ePe$.

(3) доказано в [1, 1.48(3)].

(4) Согласно (3) Me – дистрибутивный правый eAe -модуль. Так как eMe – гомоморфный образ дистрибутивного eAe -модуля Me , то eMe – дистрибутивный eAe -модуль.

ЛЕММА 3. Пусть M – прямое слагаемое модуля $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.

(1) Если все модули $M_1, \dots, M_n$ нильпотентно инвариантны, то первичный радикал кольца $\text{End}(M)$ содержит все правые и все левые ниль-идеалы кольца $\text{End}(M)$.

(2) Если все модули $M_1, \dots, M_n$ дистрибутивны, то первичный радикал кольца $\text{End}(M)$ содержит все правые и все левые ниль-идеалы кольца $\text{End}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $X \equiv \bigoplus_{i=1}^n M_i$, $R \equiv \text{End}(X)$ и P – первичный радикал кольца R . Так как X – конечная прямая сумма нильпотентно инвариантных модулей, то P содержит все правые или левые ниль-идеалы кольца R [1, 8.28(1)]. Существует идемпотент $e \in R$ такой, что $M = e(X)$ и $\text{End}(M) = eRe$. По лемме 2(2) первичный радикал кольца eRe содержит все правые или левые ниль-идеалы кольца eRe .

(2) следует из (1) и из того, что каждый дистрибутивный модуль является нильпотентно инвариантным по [1, 8.24(5)].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть проективный модуль M порождается подмодулями $M_1, \dots, M_n$ и P – первичный радикал кольца $\text{End}(M)$. Тогда имеют место следующие утверждения.

(1) Модуль M изоморфен прямому слагаемому модуля $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.

(2) Если все модули $M_1, \dots, M_n$ нильпотентно инвариантны, то P содержит все правые и все левые ниль-идеалы кольца $\text{End}(M)$.

(3) Если все модули $M_1, \dots, M_n$ дистрибутивны, то P содержит все правые и все левые ниль-идеалы кольца $\text{End}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из существования эпиморфизма модуля $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ на проективный модуль M .

(2) и (3) следуют из (1) и леммы 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – конечно порожденный проективный дистрибутивно порожденный модуль. Тогда все односторонние ниль-идеалы кольца $\text{End}(M)$ лежат в первичном радикале этого кольца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 2 следует из леммы 1(5) и предложения 1(3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – дистрибутивно порожденное справа кольцо. Тогда имеют место следующие утверждения.

(1) Каждый гомоморфный образ кольца A является дистрибутивно порожденным справа кольцом.

(2) Кольцо eAe является дистрибутивно порожденным справа кольцом для любого идемпотента $e \in A$.

(3) Для любого натурального числа s кольцо матриц A_s является дистрибутивно порожденным справа кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \sum_{i=1}^n M_i$, где все M_i – дистрибутивные правые идеалы кольца A .

(1) проверяется непосредственно.

(2) По лемме 2(4) все $eM_i e$ – дистрибутивные правые идеалы кольца eAe . Кроме того, $eAe = e(\sum_{i=1}^n M_i)e = \sum_{i=1}^n eM_i e$. Поэтому eAe – дистрибутивно порожденное справа кольцо.

(3) Пусть $R \equiv A_s$ и R_k – правый идеал кольца R , образованный всеми матрицами (a_{ij}) , у которых $a_{ij} = 0$ при $i \neq k$ ($k = 1, \dots, s$). Так как R_R – прямая сумма изоморфных правых идеалов R_k ($k = 1, \dots, s$), то достаточно доказать, что R_1 – дистрибутивно порожденный правый R -модуль. Так как $A = \sum_{i=1}^n M_i$, то правый R -модуль R_1 является суммой своих подмодулей $X_1, \dots, X_n$, где X_i – множество всех матриц из R_1 таких, что $a_{1j} \in M_i$ для всех j . Так как все M_i – дистрибутивные правые A -модули, то все X_i – дистрибутивные правые R -модули. Поэтому R_1 – дистрибутивно порожденный правый R -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть n – натуральное число, M – n -порожденный проективный правый модуль над дистрибутивно порожденным справа кольцом A и P – первичный радикал кольца $\text{End}(M)$. По лемме 1(4) M дистрибутивно порожден. По предположению 2 радикал P содержит все правые и все левые ниль-идеалы кольца $\text{End}(M)$. Так как M – n -порожденный проективный A -модуль, то модуль M изоморфен прямому слагаемому прямой суммы n изоморфных копий модуля A_A . Поэтому существует идемпотент e кольца матриц A_n такой, что кольцо $\text{End}(M)$ изоморфно кольцу $eA_n e$. По предположению 3 $\text{End}(M)$ – дистрибутивно порожденное справа кольцо.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – дистрибутивно порожденное справа кольцо. Тогда имеют место следующие утверждения.

(1) Если B – кольцо такое, что категория правых B -модулей эквивалентна категории правых A -модулей, то B – дистрибутивно порожденное справа кольцо.

(2) Если $J(A)$ – ниль-идеал кольца A , то $J(A)$ совпадает с первичным радикалом $P(A)$ кольца A .

(3) Если A – цорновское кольцо, то $J(A)$ совпадает с первичным радикалом $P(A)$ кольца A .

(4) Если A – полупервичное кольцо и $J(A)$ – ниль-идеал, то A – полупримитивное кольцо.

(5) Если A – цорновское полупервичное кольцо, то A – полупримитивное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) вытекает из теоремы 1 и того, что кольцо B изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного правого A -модуля [6, 12.10].

(2) По теореме 1 $J(A) \subseteq P(A)$. Обратное включение верно для любого кольца.

(3) следует из того, что радикал Джекобсона цорновского кольца является ниль-идеалом.

(4) и (5) следуют из (2) и (3).

ЛЕММА 4. (1) Все регулярные кольца и все фактор-кольца колец со свойством замены являются кольцами со свойством замены.

(2) A – кольцо со свойством замены без нетривиальных идемпотентов $\iff A$ – локальное кольцо.

(3) Каждое нормальное кольцо со свойством замены A является квазиинвариантным справа и слева кольцом.

(4) Пусть A – кольцо такое, что $A/J(A)$ – нормальное кольцо со свойством замены. Тогда A – квазиинвариантное справа и слева кольцо и $A/J(A)$ – редуцированное кольцо. Следовательно, $J(A)$ содержит все нильпотентные элементы кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) и (2) проверяются непосредственно.

(3) Предположим, что максимальный правый идеал M кольца A не является идеалом. Тогда $A = M + AM$. Существуют элементы $m_1, m_2 \in M$ и $a \in A$ такие, что $m_1 + am_2 = 1$. Так как A – нормальное кольцо со свойством замены, то существует центральный идемпотент $e \in m_1A \subseteq M$ такой, что $1 - e \in (1 - m_1)A = am_2A$. Поэтому существует элемент $m_3 \in m_2A \subseteq M$ такой, что $1 - e = am_3$. Тогда m_3a – центральный идемпотент. Поэтому $1 - e = a(m_3a)m_3 = (m_3a)am_3 \in M$. Тогда $1 = e + (1 - e) \in M$; получено противоречие.

(4) Согласно (3) $A/J(A)$ – квазиинвариантное кольцо. Тогда $A/J(A)$ – подпрямое произведение тел, откуда $A/J(A)$ – редуцированное кольцо. Так как $A/J(A)$ квазиинвариантно справа, то и само кольцо A квазиинвариантно справа.

ЛЕММА 5 [1, 1.17, 3.47, 3.26, 8.25(10)]. (1) Правый модуль M над кольцом A дистрибутивен $\iff$ для любых двух элементов m, n модуля M существуют элементы a, b, c, d кольца A такие, что $1 = a + b$, $ma = nc$ и $nb = md$.

(2) Если M – дистрибутивный модуль, то M квазиинвариантен и $\text{End}(M)$ – нормальное кольцо, у которого все односторонние ниль-идеалы лежат в первичном радикале.

(3) Если A – квазиинвариантное справа кольцо, то каждый правый A -модуль Безу является дистрибутивным модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть A – нормальное кольцо со свойством замены и M – правый (левый) A -модуль. Тогда M – дистрибутивный модуль $\iff M$ – модуль Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $m, n \in M_A$. По лемме 5 существует элемент $a \in A$ такой, что $maA + n(1 - a)A \subseteq mA \cap nA$. Так как A – нормальное кольцо со свойством замены, то существует центральный идемпотент $e \in A$ такой, что $e \in aA$ и $1 - e \in (1 - a)A$. Тогда $meA + n(1 - e)A \subseteq mA \cap nA$. Поэтому $me \in neA$, $n(1 - e) \in m(1 - e)A$. Поэтому $N = Ne \oplus N(1 - e) = meA + neA + m(1 - e)A + n(1 - e)A = (ne + m(1 - e))A$.

Достаточность. По лемме 4(3) A – квазиинвариантное кольцо. По лемме 5(3) модуль Безу M_A дистрибутивен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A – нормальное кольцо со свойством замены и M – максимальный правый или левый идеал кольца A . Тогда существует двустороннее кольцо частных ${}_MA_M$, которое является локальным кольцом, и канонический кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow {}_MA_M$ сюръективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – максимальный правый идеал кольца A и $T \equiv A \setminus M$. По лемме 4(3) M – идеал. Тогда A/M – тело, откуда T – мультипликативное множество. Докажем следующие утверждения:

- (1) для любого $t \in T$ существуют элементы $u \in T$ и $m_1, m_2 \in M$ такие, что $tu = 1 - m_1 \in T$ и $ut = 1 - m_2 \in T$;
- (2) T – перестановочное справа множество;
- (3) T – реверсивное справа множество.

(1) следует из того, что A/M – тело.

(2) Пусть $a \in A$ и $t \in T$. Согласно (1) существуют элементы $u \in T$ и $m \in M$ такие, что $tu = 1 - m \in T$. Так как A – нормальное кольцо со свойством замены, существует центральный идемпотент $e \in mA \subseteq M$ такой, что $1 - e \in (1 - m)A$. Поэтому

$$a(1 - e) = (1 - e)a \in (1 - m)A = tuA \subseteq tA.$$

Кроме того, $1 - e \in T$, поскольку $e \in M$. Поэтому множество T перестановочно справа.

(3) Пусть $a \in A$, $t \in T$ и $ta = 0$. Согласно (1) существуют элементы $u \in T$ и $m \in M$ такие, что $ut = 1 - m \in T$. Тогда $(1 - m)a = 0$. Так как A – нормальное кольцо со свойством замены, то существует центральный идемпотент $e \in Am \subseteq M$ такой, что $1 - e \in A(1 - m)$. Поэтому $a(1 - e) = (1 - e)a \in A(1 - m)a = 0$. Кроме того, $1 - e \in T$, поскольку $e \in M$. Поэтому множество T реверсивно справа.

Из утверждений (1)–(3) следует, что T – перестановочное справа и слева реверсивное справа и слева мультипликативное множество. В силу [1, 5.25, 5.20(14)] существует двустороннее кольцо частных ${}_MA_M$, которое является локальным кольцом, и $J(A_M) = f(M)A_M$, где $f: A \rightarrow A_M$ – канонический кольцевой гомоморфизм. Тогда $f(A)$ – кольцо со свойством замены. Кроме того, $f(A)$ не имеет нетривиальных идемпотентов, поскольку $f(A)$ – подкольцо локального кольца A_M . Поэтому $f(A)$ – локальное кольцо. Кроме того, все элементы из $f(M)$ необратимы в кольце $f(A)$, поскольку $J(A_M) = f(M)A_M$. Поэтому $f(M) = J(f(A))$. Тогда все элементы множества $f(T)$ обратимы в кольце $f(A)$, откуда $A_M = f(A)$ и $f: A \rightarrow A_M$ – сюръективный гомоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость. Пусть $m, n \in M$, $N \equiv mA + nA$, $J \equiv J(A)$ и $h: N \rightarrow N/NJ$ – естественный эпиморфизм. Достаточно доказать, что N – циклический модуль. Так как NJ – малый подмодуль модуля N_A , достаточно доказать, что дистрибутивный правый A/J -модуль $h(N)$ является циклическим. Поэтому можно считать, что $J = 0$ и A – нормальное кольцо со свойством замены. В этом случае утверждение следует из предложения 4.

Достаточность. По лемме 4(3) $A/J(A)$ – квазиинвариантное кольцо. Поэтому A – квазиинвариантное кольцо. По лемме 5(3) модуль Безу M_A является дистрибутивным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Так как условие (5) теоремы лево-право симметрично, то достаточно доказать эквивалентность условий (1), (2) и (5). (1) $\iff$ (2) следует из предложения 4(1) и из того, что все дистрибутивные справа кольца являются нормальными кольцами по лемме 5(2). (5) $\implies$ (1) является частным случаем [1, 7.8].

(1) $\Rightarrow$ (5) По предложению 5 существует двустороннее кольцо частных ${}_MA_M$, которое является локальным кольцом, причем канонический кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow {}_MA_M$ сюръективен. Согласно [1, 7.8] ${}_MA_M$ – цепное справа кольцо.

ЛЕММА 6. Пусть A – первичное кольцо. Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) Каждый дистрибутивный правый идеал кольца A является равномерным правым идеалом.

(2) Если n – натуральное число, то каждый правый идеал кольца A , являющийся суммой n дистрибутивных правых идеалов, является существенным расширением прямой суммы n равномерных правых идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [1, 1.50(2)].

(2) Будем использовать индукцию по числу n . При $n = 1$ утверждение следует из (1). Допустим, что утверждение верно для числа $n - 1$ и B – правый идеал кольца A такой, что $B = \sum_{i=1}^n B_i$, где все B_i – дистрибутивные правые идеалы. Положим $D \equiv \sum_{i=1}^{n-1} B_i$. Тогда B/D – дистрибутивный A -модуль, поскольку $B/D \cong B_n/(B_n \cap D)$. По предположению индукции D – существенное расширение правого идеала D' такого, что $D' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} D_i$, где $k \leq n$ и все D_i – равномерные правые идеалы. Существует правый идеал D_n кольца A такой, что B – существенное расширение правого идеала $D + D_n$ и $D_n \cap D = 0$. Тогда B – существенное расширение правого идеала $D' = \bigoplus_{i=1}^n D_i$. Так как $D_n \cap D = 0$, то A -модуль D_n изоморфен подмодулю дистрибутивного A -модуля B/D . Согласно (1) D_n – равномерный правый идеал.

ЛЕММА 7. Пусть n – натуральное число и A – первичное кольцо, являющееся суммой n дистрибутивных правых идеалов $A_1, \dots, A_n$. Тогда имеют место следующие утверждения.

(1) A – конечномерное справа кольцо и правая размерность Голди кольца A не превосходит числа n .

(2) Если каждый правый идеал кольца A либо лежит в $J(A)$, либо содержит ненулевой идемпотент, то A – полусовершенное кольцо.

(3) Если A – несингулярное справа кольцо, то A – кольцо индекса не более n .

(4) Если A – цорновское кольцо, то A – простое артиново кольцо индекса не более n , изоморфное кольцу всех $(k \times k)$ -матриц над телом, где $k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 6(2).

(2) следует из (1) и следующего утверждения (см. [7, 4.3]): если A – конечномерное справа кольцо и каждый правый идеал кольца A либо лежит в $J(A)$, либо содержит ненулевой идемпотент, то A – полусовершенное кольцо.

(3) Согласно (1) правая размерность Голди кольца A не превосходит числа n . Кроме того, A – несингулярное справа первичное кольцо. Тогда A имеет простое артиново классическое правое кольцо частных Q [1, 5.10(3)]. Кроме того, правая размерность Голди кольца Q не превосходит числа n и кольцо Q изоморфно кольцу матриц над телом. Поэтому Q – кольцо индекса не более n . Тогда A – кольцо индекса не более n .

(4) Согласно (2) A – полусовершенное кольцо. По следствию 1(5) A – полупрimitивное кольцо. Тогда A – полупростое артиново первичное кольцо. Поэтому A – простое кольцо, изоморфное кольцу всех $(k \times k)$ -матриц над телом. Согласно (3) A – кольцо индекса не более n . Поэтому $k \leq n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть A – π -регулярное полупервичное кольцо, являющееся суммой n дистрибутивных правых идеалов. Тогда A – строго π -регулярное полупрimitивное кольцо индекса не более n , каждое первичное фактор-кольцо кольца A изоморфно кольцу всех $(k \times k)$ -матриц над телом ($k \leq n$) и $a^n A = a^{n+1} A$, $Aa^n = Aa^{n+1}$ для любого элемента a кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое факторкольцо π -регулярного кольца A является цорновским кольцом и порождается n дистрибутивными правыми идеалами. По следствию 1(5) A полупрimitивно. По лемме 7(4) каждое первичное факторкольцо кольца A является простым артиновым кольцом индекса не более n и изоморфно кольцу всех $(k \times k)$ -матриц над телом, где $k \leq n$. Тогда полупервичное кольцо A является подпрямым произведением колец индекса не более n . Поэтому A – кольцо индекса не более n . Так как A – π -регулярное кольцо индекса не более n , то A – строго π -регулярное кольцо и $a^n A = a^{n+1} A$, $Aa^n = Aa^{n+1}$ для любого элемента a кольца A [8].

СЛЕДСТВИЕ 2. Каждое дистрибутивно порожденное справа π -регулярное кольцо строго π -регулярно.

Следствие 2 вытекает из предложения 6 и того, что A – строго π -регулярное кольцо $\iff$ все первичные факторкольца кольца A строго π -регулярны [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [1, 6.24(14)]. Пусть N – модуль над коммутативным кольцом A . Тогда N – дистрибутивный A -модуль $\iff$ для любого максимального идеала M кольца A модуль частных N_M является дистрибутивным модулем над кольцом частных A_M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Каждое коммутативное дистрибутивно порожденное кольцо A является дистрибутивным кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 1 достаточно доказать, что кольцо частных A_M дистрибутивно для любого максимального идеала M кольца A . Пусть A – сумма дистрибутивных идеалов $A_1, \dots, A_n$ и B_i – локализация идеала A_i относительно M ($i = 1, \dots, n$). По замечанию 1 все A_M -модули B_i дистрибутивны. Кроме того, $A_M = \sum_{i=1}^n B_i$. Тогда A_M – локальное дистрибутивно порожденное кольцо. По лемме 1(7) A_M – дистрибутивное кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть A – кольцо без единицы, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел и A^1 – прямое произведение аддитивных групп колец A и $\mathbb{Z}$. Определим умножение пар $(a_1, z_1), (a_2, z_2) \in A^1$ правилом

$$(a_1, z_1) \cdot (a_2, z_2) = (a_1 a_2 + z_2 a_1 + z_1 a_2, z_1 z_2).$$

Группа A^1 является кольцом с единицей $(0, 1)$.

Непосредственно проверяется, что кольцо A изоморфно подкольцу $(A, 0)$ кольца A^1 , $(A, 0)$ – идеал кольца A^1 и каждый правый A -модуль M можно рассматривать как правый модуль над кольцом A^1 с единицей, если определить умножение $m \cdot (a, z)$ правилом $m \cdot (a, z) = ma + zm$.

(1) Для каждого A -модуля M решетка всех A -подмодулей модуля M совпадает с решеткой всех A^1 -подмодулей модуля M . Следовательно, M – дистрибутивный A -модуль $\iff M$ – дистрибутивный A^1 -модуль.

(2) Для любых двух правых A -модулей M и N множество всех A -гомоморфизмов $M \rightarrow N$ совпадает с множеством всех A^1 -гомоморфизмов $M \rightarrow N$. Следовательно, $\text{End}(M_A) = \text{End}(M_{A^1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть A – кольцо без единицы и пусть A^1 – кольцо с единицей, построенное в замечании 3. Тогда имеют место следующие утверждения.

(1) Если M – правый A -модуль, то M_A дистрибутивен $\iff$ для любых двух элементов $m_1, m_2 \in M$ существуют целые числа z, y_1, y_2 и элементы $a, b_1, b_2 \in A$ такие, что $m_1a + zm_1 = m_2b_2 + y_2m_2$, $m_2 - m_2a - zm_2 = m_1b_1 + y_1m_1$.

(2) A^1 – дистрибутивное справа кольцо $\iff A^1$ – дистрибутивный правый A -модуль $\iff$ для любых элементов $a_1, a_2 \in A$ и любых целых чисел x_1, x_2 существуют целые числа z, x_1, x_2, y_1, y_2 и элементы $a, b_1, b_2 \in A$ такие, что $a_1a + x_1a + za_1 = a_2b_2 + x_2b_2 + y_2a_2$, $a_2 - a_2a - x_2a - za_2 = a_1b_1 + x_1b_1 + y_1a_1$, $zx_1 = y_2x_2$, $x_2 - zx_2 = y_1x_1$.

(3) Если M – дистрибутивный A -модуль, то $\text{End}(M)$ – нормальное кольцо, у которого все односторонние ниль-идеалы лежат в первичном радикале.

(4) Если B – дистрибутивный правый идеал кольца A и X, Y – правые идеалы кольца A такие, что $X \subseteq B$, $Y \subseteq B$ и $X \cap Y = 0$, то $XY + YX + XY = 0$.

(5) Если B – дистрибутивный правый идеал кольца A и M – максимальный подмодуль модуля B_A , то M – идеал кольца B без единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из замечания 3(1) и леммы 5(1).

(2) следует из (1) и замечания 3(1).

(3) следует из леммы 5(2) и замечания 3.

(4) следует из замечания 3(1) и того, что $(XA^1)(YA^1) = 0$ в силу [1, 1.50(1)].

(5) Для каждого элемента $b \in B$ существует эндоморфизм $f_b \in \text{End}(B_A)$ такой, что $f_b(x) = bx$ для всех $x \in B$. По лемме 5(2) и замечанию 3 M – вполне инвариантный подмодуль модуля B_A . Поэтому $BM \subseteq M$ и M – идеал кольца B .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tuganbaev A. A. Semidistributive Rings and Modules. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1998.
- [2] Mazurek R., Puczyłowski E. R. On semidistributive rings // Comm. Algebra. 1997. V. 25. № 11. P. 3463–3471.
- [3] Warfield R. B. Exchange rings and decompositions of modules // Math. Ann. 1972. V. 199. P. 31–36.
- [4] Dischinger F. Sur les anneaux fortement π -réguliers // C. R. Acad. Sci. 1976. V. 283. № 8. P. A571–A573.
- [5] Кириченко В. В. О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1982. Т. 114. С. 137–146.
- [6] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории 1. М.: Мир, 1977.
- [7] Nicholson W. K. I -rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 207. P. 361–373.
- [8] Azumaya G. Strongly π -regular rings // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1954. V. 13. P. 659–672.
- [9] Fisher J. W., Snider R. L. On the Von Neumann regularity of rings with regular prime factor rings // Pacific J. Math. 1974. V. 54. № 1. P. 135–144.