Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Фоменко, Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 579–586

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:45:55

УДК 517.74

ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ, НЕСУЩИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В. Т. Фоменко

В работе описываются все двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в римановом пространстве постоянной кривизны, геодезические которых имеют постоянную первую кривизну. В частности, показано, что такие поверхности являются поверхностями постоянной внутренней кривизны.

Библиография: 2 названия.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное риманово пространство постоянной кривизны R_0 , заданное в координатах (y^α) метрической формой $ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, где $a_{\alpha\beta} \in C^2$. Пусть $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, ∇_α , $R_{\alpha\beta,\gamma}^\delta$ – соответственно символы Кристоффеля, операция ковариантного дифференцирования, тензор кривизны, вычисленные относительно метрического тензора $a_{\alpha\beta}$. В дальнейшем считаем, что индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ пробегает значения от 1 до n .

Пусть F^2 – двумерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, заданная в окрестности каждой своей точки уравнениями

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2),$$

где $f^\alpha \in C^3$.

Пусть g_{ij} , Γ_{ij}^k , ∇_i , $R_{ij,k}^l$ – соответственно метрический тензор поверхности F^2 , символы Кристоффеля, операция ковариантного дифференцирования и тензор кривизны, вычисленные относительно тензора g_{ij} . Индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения 1 и 2. Касательную плоскость к поверхности F^2 в точке x будем обозначать через $T_x F^2$. Пусть $\{B_i^\alpha\}$, где $B_i^\alpha = \partial y^\alpha / \partial x^i$, – поле реперов касательного оснащения поверхности, порожденное внутренними координатами (x^i) . Тогда метрическая форма поверхности имеет вид: $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, где $g_{ij} = g_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta$.

Рассмотрим нормальное оснащение поверхности F^2 , задаваемое регулярным полем ортонормированных реперов $\{n_\sigma^\alpha\}$ в нормальном расслоении NF^2 поверхности F^2 . В дальнейшем индексы $\sigma, \tau, \lambda, \dots$ принимают значения от 3 до n . Пусть $g_{\sigma\tau}$, $\Gamma_{i\tau}^\sigma$, $\nabla_\perp$, $R_{ij,\sigma}^\tau$ – соответственно метрический тензор слоя $N_x F^2$ нормального расслоения NF^2 в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00814.

точке x , коэффициенты нормальной связности, операция ковариантного дифференцирования и тензор кривизны, вычисленные относительно коэффициентов $\Gamma_{i\tau}^\sigma$.

Для заданного поля ортогональных реперов $\{n_\sigma^\alpha\}$ имеем

$$g_{\sigma\tau} = a_{\alpha\beta} n_\sigma^\alpha n_\tau^\beta, \quad \Gamma_{\sigma,i\tau} = a_{\alpha\beta} n_\sigma^\alpha \nabla_i^* n_\tau^\beta, \quad g^{\sigma\lambda} \Gamma_{\sigma,i\tau} = \Gamma_{i\tau}^\lambda, \quad \|g^{\sigma\lambda}\| = \|g_{\sigma\lambda}\|^{-1}.$$

Линейные формы $\omega_{\sigma\tau} = \Gamma_{\sigma,i\tau} dx^i$ называют *линейными формами кручения* поверхности F^2 .

Обозначим через $II_\sigma = b_{\sigma ij} dx^i dx^j$ вторую квадратичную форму поверхности F^2 относительно нормали n_σ^α , где $b_{\sigma ij}$ вычисляются по формуле $b_{\sigma ij} = a_{\alpha\beta} n_\sigma^\alpha \nabla_i^* B_j^\beta$.

На поверхности F^2 имеют место формулы Гаусса–Вейнгартена

$$\nabla_j B_i^\alpha = b_{ij}^\sigma n_\sigma^\alpha, \quad \nabla_j n_\sigma^\alpha = -b_{\sigma j}^k B_k^\alpha,$$

где $\nabla = \nabla^* \oplus \nabla \oplus \nabla^\perp$ обозначает ковариантное дифференцирование в $\mathbb{R}^n$ вдоль F^2 в смысле Ван дер Вардена–Бортолотти, определяемые формулами

$$\nabla_j B_i^\alpha = \partial_j B_i^\alpha - \Gamma_{ji}^k B_k^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^* B_j^\beta B_i^\gamma, \quad (1)$$

$$\nabla_j n_\sigma^\alpha = \partial_j n_\sigma^\alpha - \Gamma_{j\sigma}^\tau n_\tau^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^* B_j^\beta n_\sigma^\gamma. \quad (2)$$

Условия интегрируемости системы (1), (2) в римановом пространстве определяются уравнениями Гаусса–Кодацци–Риччи:

$$\begin{aligned} R_{ij,kl} &= g_{\sigma\tau} b_{[i\bar{k}}^\sigma b_{j]l}^\tau + \dot{R}_{\alpha\beta,\gamma\delta} B_i^\alpha B_j^\beta B_k^\gamma B_l^\delta, \\ \nabla_{[k} b_{\underline{a}i]j} &= \dot{R}_{\alpha\beta,\gamma\delta} B_i^\alpha B_j^\gamma B_k^\delta n_\sigma^\beta, \\ R_{ij,\sigma\tau} &= g^{lh} b_{\sigma[i\bar{l}} b_{j]h}^\tau + \dot{R}_{\alpha\beta,\gamma\delta} B_i^\alpha B_j^\beta n_\sigma^\alpha n_\tau^\beta. \end{aligned}$$

Так как в римановом пространстве $\mathbb{R}^n$ постоянной кривизны R_0 тензор кривизны имеет строение:

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = R_0(a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}),$$

то последняя система для двумерной поверхности принимает вид

$$R_{12,21} = g_{\sigma\tau} b_{1[1}^\sigma b_{2]2}^\tau + R_0 g, \quad (3)$$

$$\nabla_{[1} b_{2]2}^\sigma = 0, \quad \nabla_{[1} b_{2]1}^\sigma = 0, \quad (4)$$

$$R_{12,34} = b_{3l[1} b_{42]h} g^{lh}, \quad (5)$$

где $\|g^{lh}\| = \|g_{lh}\|^{-1}$, $g = \det \|g_{ij}\|$. Известно, что решение системы (3)–(5) относительно g_{ij} , $b_{\sigma ij}$, $\Gamma_{i\tau}^\sigma$ порождает в пространстве $\mathbb{R}^n$ постоянной кривизны поверхность F^2 , для которой эти функции служат соответственно метрическим тензором, тензором вторых квадратичных форм и коэффициентами нормальной связности; при этом поверхность определена с точностью до движения в $\mathbb{R}^n$.

Если $R_{ij,k}^l \equiv 0$, то метрика поверхности называется *плоской*. Поверхности F^2 с плоской метрикой характеризуются тем свойством, что на них и только на них можно выбрать внутренние координаты (x^i) так, что $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$. Метрика поверхности F^2 в этом случае может быть записана в виде $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$. Если $R_{ij,\sigma}^{\tau} \equiv 0$, то нормальная связность поверхности F^2 называется *плоской*. Поверхности с плоской нормальной связностью характеризуются тем свойством, что на них и только на них существует нормальное оснащение с полем ортонормированных реперов $\{n_{\sigma}^{\alpha}\}$, для которого $\Gamma_{i\tau}^{\sigma} \equiv 0$.

Пусть $L: x^i = x^i(s)$ – кривая на поверхности, заданная уравнениями, отнесенными к натуральному параметру. Пусть k^{α} – вектор первой кривизны кривой L в $\mathbb{R}^n$. Составляющая k_g^{α} вектора k^{α} на касательную плоскость $T_x F^2$ называется *вектором геодезической кривизны* кривой L в точке x , а его длина k_g – *геодезической кривизной* кривой L . Если $k_g = 0$ вдоль L , то линия L называется *геодезической* на F^2 и обозначается через L_g . Составляющая k_n^{α} вектора кривизны k^{α} на нормальную плоскость $N_x F^2$ называется *вектором нормальной кривизны* поверхности F^2 в точке x по направлению $t^i = dx^i/(ds)$, а его длина $k_n = \sqrt{a_{\alpha\beta} k_n^{\alpha} k_n^{\beta}}$ – *нормальной кривизной* F^2 в точке по направлению t^{α} . Известно, что k_n не зависит от выбора кривой L и является функцией точки x и направления t^{α} . Известна формула вычисления k_n :

$$k_n = \sqrt{g_{\sigma\tau} b_{ij}^{\sigma} b_{kl}^{\tau} t^i t^j t^k t^l}. \quad (6)$$

Конец вектора k_n^{α} определяет точку P в нормальной плоскости $N_x F^2$. При изменении направления t^{α} в $T_x F^2$ точка x описывает в $N_x F^2$ кривую, которая называется *индикатрисой* нормальной кривизны поверхности в точке x . Индикатриса нормальной кривизны поверхности F^2 в точке x есть эллипс. Эллипс нормальной кривизны вырождается в отрезок (или точку) тогда и только тогда, когда поверхность F^2 имеет плоскую нормальную связность. В этом и только этом случае на поверхности F^2 существует координатная сеть, для которой $g_{12} = 0$, $b_{\sigma 12} = 0$ при любом выборе $\{n_{\sigma}^{\alpha}\}$. Направления координатных линий в этом случае называют *главными направлениями* на поверхности, а нормальные кривизны поверхности по главным направлениям называют *главными кривизнами* поверхности и обозначают k_{ni} . Если $k_{n1} = k_{n2} = 0$ в точке x , то точка x называется *точкой уплощения*, в случае $k_{n1} = 0$, $k_{n2} \neq 0$ точка называется *параболической* точкой. Длина $E = E(x)$ отрезка вырожденного эллипса нормальной кривизны в точках называется *эйлеровой разностью* поверхности в точке x . Если в точке x имеем $E = 0$, $c^2 = k_{n1}^2 + k_{n2}^2 \neq 0$, то точка x называется *омбилической точкой* с радиусом $1/c$. Очевидно, что в омбилической точке эллипс нормальной кривизны вырождается в точку, не совпадающую с точкой x . Точка называется *аксиальной*, если нормальное оснащение можно выбрать таким, чтобы носитель вектора нормали n_{σ}^{α} проходил через точку x .

2. Формулировка результата.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы на двумерной поверхности F^2 класса C^3 с плоской нормальной связностью в пространстве $\mathbb{R}^n$ постоянной кривизны R_0 каждая геодезическая имела постоянную первую кривизну, необходимо и достаточно, чтобы поверхность принадлежала одному из следующих видов поверхностей:

- 1) вполне геодезические поверхности;

- 2) поверхности постоянной внутренней кривизны K , состоящие из омбилических точек радиуса $1/\sqrt{K - R_0}$, при условии $K > R_0$;
- 3) поверхности нулевой внутренней кривизны $K \equiv 0$ с постоянными ненулевыми главными кривизнами $k_{n1} = c_1 > 0$, $k_{n2} = c_2 > 0$ и постоянной эйлеровой разностью E при условии $c_1^2 + c_2^2 > -2R_0$;
- 4) поверхности нулевой внутренней кривизны $K \equiv 0$ с аксиальными точками и постоянными главными кривизнами $k_{n1} = c_1 \geq 0$, $k_{n2} = c_2 > 0$ при условии $c_1 c_2 = -R_0$.

Каждый из указанных в теореме видов поверхностей является непустым при выполнении отмеченных условий. Укажем некоторые примеры поверхностей каждого из перечисленных видов.

К первому виду следует отнести плоскость Лобачевского кривизны R_0 при $R_0 < 0$; плоскости в евклидовом пространстве при $R_0 = 0$ и сферы кривизны R_0 при $R_0 > 0$.

Ко второму виду поверхностей относятся, в частности, сферы, орисферы и эквидистанты в пространстве Лобачевского.

К третьему виду поверхностей относится, например, тор Клиффорда $S^1 x S^1$ в E^n . Однако, этот вид поверхностей не исчерпывается торами Клиффорда. В самом деле, рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ кривизны R_0 поверхность F_k^2 , задаваемую следующими основными формами:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= du^2 + dv^2, \\
 II_3 &= a^2 du^2 - b^2 dv^2, \\
 II_4 &= h(du^2 + dv^2), \quad a^2 b^2 - h^2 = -R_0, \\
 II_\sigma &\equiv 0, \quad \sigma \geq 5, \\
 \omega_{35} &= \varphi(u)du + \phi(v)dv, \quad \omega_{34} \equiv 0, \quad \omega_{3\sigma} \equiv 0, \quad \sigma > 5; \\
 \omega_{45} &= c\omega_{35}, \quad c = \text{const}, \quad \omega_{4\sigma} \equiv 0, \quad \sigma > 5; \\
 \omega_{\sigma\tau} &\equiv 0, \quad \sigma \geq 5, \quad \tau \geq 6,
 \end{aligned}$$

где ϕ, φ — дифференцируемые функции своих аргументов, $a > 0$, $b > 0$, c, h — заданные постоянные. Так как уравнения Гаусса–Кодацци–Риччи для этих форм выполнены, то в $\mathbb{R}^n$ существует поверхность F_k^2 , для которой эти формулы являются основными формулами. Такую поверхность назовем тором Клиффорда с кручением. Отметим, что поворотом репера $\{n_\sigma^\alpha\}$ можно добиться того, чтобы все линейные формы кручения $\omega_{\sigma\tau}$ тождественно обращались в нуль. Но тогда в новом репере квадратичные формы II_σ , $\sigma \geq 5$, не будут тождественно равны нулю.

Отметим, что для указанных в теореме поверхностей третьего вида в евклидовом пространстве E^n индикатриса нормальной кривизны в $N_x F^2$ просматривается из точки $x \in F^2$ под прямым углом. Общее описание поверхностей указанного вида можно найти в [1, разд. III, п. 14, с. 164–169].

К четвертому виду поверхностей относится, например, круглый цилиндр с кручени-

ем в E^n (см., например, [2]), определяемый следующими основными формами:

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + dv^2, \\ II_3 &= \varphi_1(u)du^2, \quad II_\sigma \equiv 0, \quad \sigma \geq 4, \\ \omega_{\sigma\tau} &= \varphi_{\sigma-2}(u)du, \quad \tau = \sigma - 1, \quad \sigma \geq 4, \\ \omega_{\sigma\tau} &\equiv 0, \quad \tau \neq \sigma - 1, \end{aligned}$$

где $\varphi_{\sigma-2}$, $\sigma \geq 3$, – заданные дифференцируемые функции аргумента u . Уравнение поверхности F_c^2 , определяемой указанными формами в E^n , имеет вид $r = \rho(u) + va + b$, где $\rho = \rho(u)$ – уравнения кривой (l) , лежащей в некотором E^{n-1} , и отнесенное к натуральному параметру u ; a – вектор нормали к E^{n-1} , b – некоторый постоянный вектор.

Функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}$ являются кривизнами кривой (l) .

Отметим, что нормальное оснащение поверхности F_c^2 задается $(n-2)$ -гранником Френе кривой (l) , параллельно перенесенным из точек кривой вдоль образующих по всей поверхности F_c^2 . Поверхность F_c^2 при $\varphi_1(u) = k_1 = \text{const}$ называют круглым цилиндром с кручением.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположение, что нормальная связность поверхности является плоской, существенно. Действительно, на поверхности Веронезе V^2 в E^5 геодезические имеют постоянную кривизну, однако нормальная связность на V^2 не является плоской.

3. Доказательство теоремы. Пусть L_g – геодезическая на поверхности F^2 . Условие постоянства первой кривизны кривой L_g в $\mathbb{R}^n$ эквивалентно условию постоянства вдоль L_g нормальной кривизны $k_n(x, t^\alpha)$:

$$\bar{\nabla}_i k_n(x, t^\alpha) t^i = 0, \quad (7)$$

где $t^i = dx^i(s)/ds$. Из формулы (7) в силу (6) находим

$$g_{\sigma\tau} b_{ij}^\sigma \bar{\nabla}_k b_{lp}^\tau t^i t^j t^k t^l t^p = 0. \quad (8)$$

Так как t^1, t^2 в формуле (8) произвольны, то это соотношение имеет место, если коэффициенты его левой части равны нулю. Учитывая формулы Кодацци (4), из (8) находим:

$$g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma \bar{\nabla}_i b_{ii}^\tau = 0, \quad (9)$$

$$g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma \bar{\nabla}_j b_{ii}^\tau = 0, \quad (10)$$

$$3g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma \bar{\nabla}_i b_{jj}^\tau + g_{\sigma\tau} b_{jj}^\sigma \bar{\nabla}_i b_{ii}^\tau = 0. \quad (11)$$

Для поверхностей F^2 с плоской нормальной связностью опишем все решения систем (3)–(5), (9)–(11) относительно g_{ij} , b_{ij}^σ , $\Gamma_{i\tau}^\sigma$. Примем в качестве координатных линий на F^2 в окрестности некоторой ее точки сеть линий кривизны. Тогда для любого регулярного нормального оснащения F^2 в окрестности этой точки с полем реперов $\{n_\sigma^\alpha\}$ будем иметь $g_{12} = 0$, $b_{\sigma 12} = 0$. При этом можно считать, что $g_{ij} \in C^1$, $b_{\sigma ij} \in C^1$, $R_{12,12} \in C$. Выберем нормальное оснащение поверхности F^2 таким образом, чтобы $\Gamma_{i\tau}^\sigma = 0$ в окрестности рассматриваемой точки. Тогда система уравнений (9) приводится к виду:

$$\partial_i \ln g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma b_{ii}^\tau = \partial_i \ln g_{ii}^2, \quad (12)$$

а из системы (10) находим

$$\partial_i \ln g_{\sigma\tau} b_{jj}^\sigma b_{jj}^\tau = \partial_i \ln g_{jj}^2, \quad i \neq j. \quad (13)$$

Система уравнений (12), (13) интегрируется в явном виде; в результате из (12), (13) получаем

$$g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma b_{ii}^\tau = c_i^2 g_{ii}^2, \quad (14)$$

где c_i – произвольные постоянные. Полагая $\Gamma_{i\tau}^\sigma \equiv 0$, перепишем систему (11). Имеем

$$3g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma \partial_i b_{jj}^\tau + g_{\sigma\tau} b_{jj}^\sigma (\partial_i b_{ii}^\tau - b_{ii}^\tau \partial_i \ln(g_{ii} g_{jj}^3)) = 0.$$

Воспользуемся уравнениями Кодацци (4), которые запишем в виде:

$$2\partial_i b_{jj}^\sigma - b_{jj}^\sigma \partial_i \ln g_{22} - \frac{b_{ii}^\sigma}{g_{ii}} \partial_i g_{jj} = 0. \quad (15)$$

Умножим (15) на $g_{\sigma\tau} b_{jj}^\tau$ и просуммируем по σ . Имеем

$$\partial_i (g_{\sigma\tau} b_{jj}^\sigma b_{jj}^\tau) - g_{\sigma\tau} b_{jj}^\sigma b_{jj}^\tau \partial_i \ln g_{jj} - g_{\sigma\tau} \frac{b_{ii}^\sigma}{g_{ii}} b_{jj}^\tau \partial_i g_{jj} = 0. \quad (16)$$

В силу уравнения Гаусса (3), которое в нашем случае записывается в виде $(K - R_0) g_{ii} g_{jj} = g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma b_{jj}^\tau$, $i \neq j$, из (14), (16) находим соотношение

$$\partial_i g_{jj} (c_i^2 - (K - R_0)) = 0, \quad i \neq j. \quad (17)$$

Исследуем соотношение (17).

Случай 1. Пусть $\partial_i g_{jj} = 0$, $i \neq j$. Это означает, что $g_{11} = g_{11}(u^1)$, $g_{22} = g_{22}(u^2)$. Переходя к новым координатам $\bar{x}^i$ по формулам

$$\bar{x}^1 = \int \sqrt{g_{11}(x^1)} dx^1, \quad \bar{x}^2 = \int \sqrt{g_{22}(x^2)} dx^2,$$

получим, что координатная сеть не изменилась, но в новых координатах $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = 1$. Будем считать, что в координатах x^i имеем $g_{11} = g_{22} = 1$. Из соотношений (15) находим $\partial_i b_{jj}^\sigma = 0$, $i \neq j$. Это означает, что

$$b_{11}^\sigma = b_{11}^\sigma(x^1), \quad b_{22}^\sigma = b_{22}^\sigma(x^2). \quad (18)$$

Будем рассматривать (b_{11}^σ) и (b_{22}^σ) как векторы $\vec{k}_{1n}$ и $\vec{k}_{2n}$ в $N_x F^2$. Тогда уравнение (14) можно записать в виде скалярных произведений: $(\vec{k}_{1n}, \vec{k}_{1n}) = c_1^2$, $(\vec{k}_{2n}, \vec{k}_{2n}) = c_2^2$. Отсюда следует, что

$$b_{11}^\sigma = c_1 \cos \alpha^\sigma(x^1), \quad b_{22}^\sigma = c_2 \cos \beta^\sigma(x^2), \quad (19)$$

где $\cos \alpha^\sigma$, $\cos \beta^\sigma$ – соответственно направляющие косинусы векторов $\vec{k}_{1n}$, $\vec{k}_{2n}$ в $N_x F^2$. В силу (19) из уравнений (18) находим:

$$g_{\sigma\tau} b_{ii}^\sigma(x^i) \partial_j b_{jj}^\tau(x^j) = 0, \quad i \neq j.$$

Это означает, что должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} c_1 c_2 g_{\sigma\tau} \cos \beta^\sigma(x^2) \sin \alpha^\tau(x^1) \partial_1 \alpha^\tau(x^1) &= 0, \\ c_1 c_2 g_{\sigma\tau} \cos \alpha^\sigma(x^1) \sin \beta^\tau(x^2) \partial_2 \beta^\tau(x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения выполняются тождественно в силу уравнения Гаусса, которое записывается в виде:

$$c_1 c_2 g_{\sigma\tau} \cos \alpha^\sigma \cos \beta^\tau = -R_0. \quad (20)$$

Исследуем уравнение (20).

а) Пусть $c_1 = 0$. Из (20) следует, что $R_0 = 0$, и потому $\mathbb{R}^n = E^n$, где E^n — n -мерное евклидово пространство. Тогда $b_{11}^\sigma \equiv 0$, $b_{22}^\sigma \equiv c_2 \cos \beta^\sigma(x^2)$. Это означает, что индикатриса кривизны есть отрезок с началом в точке x , $x \in F^2$, т.е. x — параболическая точка. Повернем $\{\vec{n}_\sigma\}$ в положение $\{\vec{n}_\sigma^*\}$ так, чтобы $\vec{n}_3^*$ совпал с направлением индикатрисы. Тогда $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$,

$$II_3 = c_2(dx^2)^2, \quad II_\sigma \equiv 0, \quad \sigma = 3, \dots, n, \quad \omega_{\sigma\tau} = \Gamma_{2\sigma\tau} dx^2,$$

где $\Gamma_{2\sigma\tau}$, вообще говоря, отличны от нуля. Как показано в пункте 2, к таким поверхностям относится круглый цилиндр с кручением при $c_2 = \text{const} \neq 0$.

В случае $c_2 = 0$ имеем двумерную плоскость в E^n , ибо можно выбрать поле реперов $\{\vec{n}_\sigma\}$ с условием $b_{\sigma ij} = 0$, $\Gamma_{i\sigma}^\tau = 0$.

б) Пусть $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $R_0 = 0$. Тогда из уравнения Гаусса находим $(\vec{k}_{1n}, \vec{k}_{2n}) = 0$. Это означает, что индикатриса нормальной кривизны просматривается под прямым углом, при этом длина перпендикуляра, опущенного из точки x на индикатрису, постоянна в окрестности рассматриваемой точки. Выберем $\{\vec{n}_\sigma\}$ таким образом, чтобы носители $\vec{n}_3$ и $\vec{n}_4$ лежали в плоскости, проходящей через точку x и индикатрису, а их носители были параллельны и ортогональны индикатрисе соответственно. Тогда основные формы поверхности F^2 примут вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2, \\ II_3 &= a_1(dx^1)^2 + a_2(dx^2)^2, \\ II_4 &= b((dx^1)^2 + (dx^2)^2), \quad b = \text{const}, \\ a_1^2 &= c_1^2 - b^2, \quad a_2^2 = c_2^2 - b^2, \\ II_\sigma &\equiv 0, \quad \sigma \geq 5, \end{aligned}$$

при этом линейные формы кручения $\omega_{\sigma\tau} = \Gamma_{\sigma i\tau} dx^i$, вообще говоря, не равны нулю тождественно. Это означает, что эйлерова разность E постоянна на F^2 , отлична от нуля (в общем случае) и рассматриваемую поверхность можно считать обобщением тора Клиффорда в E^n . Пример такой поверхности дан в пункте 2 (тор Клиффорда F_k^2 с кручением).

в) Пусть $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $R_0 \neq 0$. Тогда угол φ , под которым просматривается отрезок индикатрисы нормальной кривизны из точки x , постоянен в окрестности точки x . В самом деле, выберем $\{\vec{n}_\sigma\}$ таким образом, чтобы носители $\vec{n}_3$ и $\vec{n}_4$ лежали в одной плоскости с точкой x и отрезком индикатрисы и были соответственно параллельны и

ортогональны индикатрисе. Тогда вторые квадратичные формы II_σ поверхности F^2 примут вид:

$$\begin{aligned} II_3 &= b_{311}(dx^1)^2 + b_{322}(dx^2)^2, \\ II_4 &= b_{411}((dx^1)^2 + (dx^2)^2), \\ II_\sigma &\equiv 0, \quad \sigma \geq 5. \end{aligned}$$

Если точка x – аксиальная, то $b_{411} = 0$ и тогда $II_4 \equiv 0$. Из уравнения Гаусса имеем $b_{311}b_{322} = -R_0$. Из (14) следует, что $b_{311} = c_1 = \text{const}$, $b_{322} = c_2 = \text{const}$, при этом $c_1c_2 = -R_0$. Если точка x не является аксиальной, то из уравнения Гаусса следует, что угол между $\vec{k}_{1n}$ и $\vec{k}_{2n}$, т. е. угол, под которым просматривается индикатриса кривизны, постоянен в окрестности точки и вычисляется по формуле $\cos \varphi = (-R_0)/(c_1c_2)$. Это означает, что эйлерова разность поверхности F^2 постоянна: $E = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2R_0}$.

Случай 2. Пусть $c_i^2 - (K - R_0) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда $c_1^2 = c_2^2$. Это означает, что главные кривизны k_{1n} и k_{2n} поверхности F^2 совпадают, $k_{1n} = k_{2n} = c_1$. Из уравнения Гаусса следует, что $(\vec{k}_{1n}, \vec{k}_{2n}) = K - R_0$, т. е. $c_1c_2 \cos(\vec{k}_{1n}, \vec{k}_{2n}) = c_1^2$. Это означает, что векторы $\vec{k}_{1n}$ и $\vec{k}_{2n}$ коллинеарны и сонаправлены. Следовательно, индикатриса кривизны есть точка, поэтому все точки поверхности являются омбилическими радиуса $1/c_1$. Отсюда вытекает, что $K = \text{const}$, $K = c_1^2 + R_0$, где c_1 – произвольно заданное положительное число, что и доказывает теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Эйзенхарт Л. Т. Риманова геометрия. М.: Гос. изд. ИН., 1948.
- [2] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.

Таганрогский государственный педагогический институт
E-mail: tspi@online.taganrog.ru

Поступило
12.05.1999