Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Чехлов, Квазисервантно инъективные группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 587–592

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm979>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:10:35

УДК 512.541

КВАЗИСЕРВАНТНО ИНЪЕКТИВНЫЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С НЕРАЗЛОЖИМЫМИ СЕРВАНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. Р. Чехлов

Показано, что в абелевой квазисервантно инъективной группе без кручения с сильно неразложимыми сервантными подгруппами все ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами. Результаты статьи вместе с полученными ранее описывают квазисервантно инъективные группы без кручения. В качестве следствия доказывается, что квазисервантно инъективная группа без кручения транзитивна.

Библиография: 10 названий.

Абелева группа A называется *квазисервантно инъективной* (сокращенно QPI -группой), если всякий гомоморфизм $G \rightarrow A$ любой ее сервантной подгруппы G продолжается до эндоморфизма группы A . Исследованию QPI -групп посвящены работы ряда авторов (см., например, [1]–[8]). Обозначим через L класс всех редуцированных групп без кручения, тип любого ненулевого элемента которых сравним с некоторым максимальным типом в множестве всех ненулевых элементов группы. Класс L содержит все группы без кручения конечного ранга, однородные группы без кручения, алгебраически компактные группы без кручения и др. В [1], [2] дано структурное описание QPI -групп без кручения из класса L . Независимо QPI -группы без кручения конечного ранга были описаны в [3]. В [4] построены примеры QPI -групп, не принадлежащих L . В [5] доказано, что редуцированная QPI -группа без кручения является сервантной вполне характеристической межпрямой суммой своих квазиоднородных компонент, каждая из которых либо однородная группа, либо группа с сильно неразложимыми сервантными подгруппами. В [6] получена характеристика квазиоднородных QPI -групп, все ненулевые эндоморфизмы которых являются мономорфизмами. В [8] дан обзор результатов о QPI -группах и близких к ним классах групп.

В данной работе показано, что у квазиоднородной QPI -группы с сильно неразложимыми сервантными подгруппами все ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами. Таким образом, результаты статьи завершают описание QPI -групп без кручения (см. [9, проблема 17 а)).

Терминология и обозначения соответствуют [9], [10]. Так, если A – группа без кручения, то $h_p^A(a)$ – p -высота, $\chi_A(a)$ – характеристика, $t_A(a)$ – тип элемента a в группе A ; если $G \subseteq A$, то $\langle G \rangle_*^A$ – сервантная подгруппа в A , порожденная G (индекс A иногда опускаем); $A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}$; $\Pi(A)$ – множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов A ; если p – простое число, то p -*рангом* A называется ранг ее факторгруппы A/pA ; $T(A)$ – множество типов всех ненулевых элементов

группы A . Группа без кручения A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(G) = \Pi(A)$ для любой ее ненулевой сервантной подгруппы G ; *вполне транзитивной*, если для любых ее элементов a, b условие $\chi_A(a) \leq \chi_A(b)$ влечет существование ее эндоморфизма f со свойством $f(a) = b$; *квазиразложимой*, если существуют ее ненулевые подгруппы B, G такие, что $nA \subseteq B \oplus G$ для некоторого натурального числа n , в противном случае A называется *сильно неразложимой*. Отметим, что все QPI -группы без кручения являются вполне транзитивными. Свойство, что все ненулевые эндоморфизмы есть мономорфизмы для QPI -группы A без кручения эквивалентно тому, что для любых ее элементов $0 \neq a, b, c$ выполнено условие $t_{A/\langle a \rangle_*}(b + \langle a \rangle_*) \not\leq t_A(c)$.

ЛЕММА 1 [2]. Пусть A – группа без кручения с сильно неразложимыми сервантными подгруппами. Тогда $t_{A/\langle a \rangle_*}(g + \langle a \rangle_*) > t_A(g)$ для любых ее ненулевых элементов a, g . В частности, если f – гомоморфизм A в группу без кручения B с ненулевым ядром, то $t_A(g) < t_B(f(g))$ для любого $g \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сильная неразложимость подгруппы $\langle a, g \rangle_*$ в A влечет разрешимость в A уравнения $tx = b + g$, где $b \in \langle a \rangle_*$ и $g \notin tA$ для бесконечного множества натуральных t . Отсюда вытекает справедливость указанного неравенства типов.

ЛЕММА 2. Пусть A – группа без кручения, $f \in E(A)$, $0 \neq b \in \text{Ker } f$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) если $h_p(b) \geq h_p(f(a))$, то $h_p(a+b) = h_p(a)$; в частности, если $\chi(b) \geq \chi(f(a))$, то $\chi(a+b) = \chi(a)$;
- 2) если A вполне транзитивна, то $f(A)$ содержится в замыкании в p -адической топологии группы A ее подгруппы $G = A(t(b))$ для каждого $p \in \Pi(G)$; в частности, если $\Pi(A) = \Pi(G)$, то $f(A)$ содержится в замыкании в Z -адической топологии подгруппы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем $h_p(a+b) \geq h_p(a) \cap h_p(b) = h_p(a)$. Далее $h_p(a+b) \leq h_p(f(a+b)) = h_p(f(a)) \leq h_p(b)$, поэтому $h_p(a) = h_p((a+b) - b) \geq h_p(a+b) \cap h_p(b) = h_p(a+b)$. Следовательно, $h_p(a) = h_p(a+b)$.

2) Если $p^m g = b$, где $g \notin pA$, то для любого $a \in A$ и любого натурального n имеем $\chi(p^n a + g) \leq \chi(f(a))$. В силу вполне транзитивности существует эндоморфизм α со свойством $p^n \alpha(a) + \alpha(g) = f(a)$. Утверждение леммы следует из того, что $\alpha(g) \in G$.

ЛЕММА 3. Пусть A – редуцированная вполне транзитивная группа без кручения, $f \in E(A)$ и $G = A(t) \subseteq \text{Ker } f$ для некоторого $t \in T(A)$, причем $\Pi(G) = \Pi(A)$. Тогда $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что $f^2(A)$ является делимой подгруппой. В силу редуцированности $f^2 = 0$. Предположим, что $f(a) \neq 0$, $a \in A$. Согласно лемме 2 $\chi(a + f(a)) = \chi(a)$. Тогда $\chi(p^n a + g) \leq \chi(a)$, где $p^m g = f(a)$, $g \in A \setminus pA$, $n > m$ и $p \in \Pi(A)$. По лемме 2 $f(a)$ принадлежит замыканию в p -адической топологии подгруппы G . В силу сервантности G это замыкание является сервантной подгруппой в A . Поэтому g можно записать в виде $g = x + p^n b$ для некоторых $x \in G$, $b \in A$. Пусть $\alpha \in E(A)$ такой, что $p^n \alpha(a + b) + \alpha(x) = a$. Так как $\alpha(x) \in G \subseteq \text{Ker } f$, то $p^n f(\alpha(a + b)) = f(a)$, что противоречит выбору n . Следовательно, $f = 0$.

Согласно [5, теорема 2.1] неквазиоднородная QPI -группа без кручения разложима. Поэтому QPI -группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами квазиоднородны.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – квазиоднородная группа без кручения с сильно неразложимыми сервантными подгруппами и с условием обрыва возрастающих цепей ядер ее эндоморфизмов. Тогда если A вполне транзитивна, то все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in E(A)$ с максимальным ядром $G \neq 0$ и $f(a) \neq 0, a \in A$. Из леммы 3 следует, что $f(b) \neq 0$ для некоторого $b \in A(t(f(a)))$. Тогда $\chi(nb) \geq \chi(f(a))$ для некоторого натурального n и $\alpha f(a) = nb$, где $\alpha \in E(A)$. Отсюда следует, что $(\alpha f)^2 \neq 0$. Будем считать, что $f^2 \neq 0$, в противном случае в качестве f возьмем αf .

По лемме 1 найдется $p \in \Pi(A)$ со свойством $h_p^{A/G}(f(a) + G) > h_p^A(f(a))$. Отсюда $m = h_p(f^2(a)) - h_p(f(a)) > 0$. Имеем $p^m \varphi f(a) = f^2(a)$ для некоторого $\varphi \in E(A)$. Так как $\langle G, a \rangle \subseteq \text{Ker}(f - p^m \varphi f)$, то $f^2 = p^m \varphi f$. Следовательно, в силу квазиоднородности для каждого $p \in \Pi(A)$ найдутся целое число $n \geq 0$ и эндоморфизм β такие, что $f^2 = p^n \beta$, где β сохраняет p -высоты элементов из $f(A)$ и, следовательно, элементов из $B = \langle f(A) \rangle_*$.

Если теперь $px = b + g$, где $p \in \Pi(A)$, $b \in B$, $g \in G$, то $p\beta(x) = \beta(b)$. Откуда $b \in pB$ в силу условия на β . Это влечет сервантность подгруппы $B \oplus G$ в A , что противоречит условию теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если A – квазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения конечного p -ранга для некоторого $p \in \Pi(A)$ с сильно неразложимыми сервантными подгруппами, то все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу квазиоднородности ядра эндоморфизмов группы A являются замкнутыми сервантными подгруппами в ее p -адической топологии. Поэтому конечность p -ранга влечет условие обрыва возрастающих цепей ядер ее эндоморфизмов, что доказывает справедливость утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Если A – квазиоднородная QPI -группа без кручения, имеющая ненулевые эндоморфизмы с ядрами бесконечного p -ранга для некоторого простого числа p , то A – однородная алгебраически компактная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \text{Ker } f$, p -ранг B бесконечен и F – p -базисная подгруппа в B . Так как F – свободная группа бесконечного ранга, то в F найдется подгруппа K такая, что F/K – редуцированная группа без кручения ранга 1, q -делимая для каждого простого $q \neq p$. Поскольку замыкание F^- в p -адической топологии A p -сервантной подгруппы F является сервантной подгруппой, то $H = K^- \subset F^-$ и, так как $F \not\subseteq H$, то факторгруппа F^-/H содержит сервантную подгруппу $G/H \cong F/K$. Пусть $b+H \in (G/H) \setminus p(G/H)$. Предположим, что $f(a) \neq 0$ для некоторого $a \in A \setminus pA$. В силу квазиоднородности $n = h_p(f(a)) < \infty$. Пусть $D = \langle p^k a + b, H \rangle_*$, где $k > n$. Тогда D/H – группа ранга 1 и $\chi_{A/H}(p^k a + b + H) \leq \chi_A(f(a))$. Если $\pi: D \rightarrow D/H$ – естественный эпиморфизм, $\alpha: \psi: D/H \rightarrow \langle f(a) \rangle_*$ – такой гомоморфизм, что $\psi(p^k a + b + H) = f(a)$, то так как A – QPI -группа, $\psi\pi$ продолжается до некоторого $\alpha \in E(A)$. Имеем

$\alpha(p^k a + b) = f(a)$, причем $\alpha(b) \neq 0$, так как $f(a) \notin p^k A$. Подгруппа $\langle \alpha(b) \rangle_*$ q -делима для каждого простого $q \neq p$. В силу квазиоднородности группа A также q -делима для всех таких q . Следовательно, A – однородная QPI -группа бесконечного p -ранга. Из [1, теорема 1.4] следует, что она алгебраически компактна.

ТЕОРЕМА 7. *Если A – квазиоднородная QPI -группа без кручения с сильно неразложимыми сервантными подгруппами, то все ненулевые эндоморфизмы A являются мономорфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A однородна, то это утверждение доказано в [1, теорема 1.4]. Пусть она неоднородна. Зафиксируем $p \in \Pi(A)$ и пусть $f(a) = 0$, где $a \in A \setminus pA$ и $0 \neq f \in E(A)$. Тогда $\langle a \rangle$ – p -сервантная подгруппа в A и ее можно вложить в p -базисную подгруппу B группы A в качестве прямого слагаемого, $B = \langle a \rangle \oplus G$ [9, § 32, упр. 7]. Если $\bar{A}$ – p -адическое пополнение A , то $\bar{A} = R \oplus \bar{G}$, где $R = \overline{\langle a \rangle}$. В силу p -сервантной инъективности f продолжается до $\bar{f} \in E(\bar{A})$. Ввиду следствия 5 p -ранг A бесконечен, поэтому G является свободной группой бесконечного ранга. Выделим в G такое прямое слагаемое H счетного ранга, что $G = H \oplus D$ и ранг D бесконечен. Имеем $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \langle b_i \rangle$. Группа R имеет ранг мощности континуум, выделим в ней счетную линейно независимую систему элементов g_i ($i = 1, 2, \dots$). Отображение $b_i \rightarrow g_i$ продолжается до гомоморфизма $H \rightarrow R$. Так как R – p -сервантно инъективная группа, а H – p -сервантная подгруппа, то этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма $\varphi: \bar{H} \rightarrow R$. Если π и θ – проекции $M = R \oplus \bar{H}$ на R и $\bar{H}$ соответственно, то $M = R \oplus K$, где $K = (\theta - \pi\varphi\theta)M$ [9, лемма 9.5]. Имеем $b_i = (\pi + \pi\varphi\theta)(b_i) + (\theta - \pi\varphi\theta)(b_i) = \varphi(b_i) + (b_i - \varphi(b_i))$, где $b_i - \varphi(b_i) \in K$. Следовательно, $H \cap K = \langle H \rangle_*^A \cap K = 0$. В силу бесконечности ранга D из теоремы 6 следует, что найдется $g \in D \setminus pD$ со свойством $f(g) \neq 0$. Имеем $\bar{D} = \overline{\langle g \rangle} \oplus C$ и $\bar{A} = (R \oplus \overline{\langle g \rangle}) \oplus K \oplus C$. Если α – проекция $\bar{A}$ на $R \oplus \overline{\langle g \rangle}$, то $(\bar{f}\alpha)(\langle H, g \rangle_*^A) \subseteq \langle f(g) \rangle_*^A \subseteq A$. Так как A – QPI -группа, то этот гомоморфизм продолжается до ее эндоморфизма, ядро которого содержит H и, следовательно, имеет бесконечный p -ранг. Полученное противоречие с теоремой 6 заканчивает доказательство.

Для полноты приведем следующий результат.

ТЕОРЕМА 8 [7, теорема 2]. *Пусть квазиоднородная QPI -группа без кручения A имеет квазиразложимые сервантные подгруппы. Тогда она однородна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию A содержит сервантную подгруппу $B \neq 0$ со свойством $n\langle a, B \rangle_* \subseteq \langle a \rangle_* \oplus B$, где n натуральное и $0 \neq a \in A$. Зафиксируем a и n . Множество M всех таких сервантных подгрупп частично упорядочено относительно включения и индуктивно, поэтому оно содержит максимальный элемент G . Пусть $\bar{A}$ есть $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение A . Имеем $\bar{A} = \overline{\langle F \rangle}_* \oplus V$, где $F = \langle a \rangle_* \oplus G$. Далее, $n\overline{\langle F \rangle}_* \subseteq \bar{W} \oplus \bar{G} = \bar{F}$, $n\bar{A} \subseteq \bar{F} \oplus V = N$, где W – замыкание в $\mathbb{Z}$ -адической топологии группы A ее подгруппы $\langle a \rangle_*$. Отметим, что $W = A \cap \bar{W}$. Так как $G \subseteq \langle A \cap (\bar{G} \oplus V) \rangle_* \in M$, то $A \cap (\bar{G} \oplus V) = G$ в силу максимальной G .

Пусть θ – проекция N на V . Тогда $\theta(D)$ – сервантная подгруппа в V , где $D = A \cap N$ сервантна в N . Действительно, если $mx = v \in \theta(D)$, то $b + v \in D$ для некоторого $b \in \bar{F}$. Так как F плотна в $\bar{F}$, то $b - d \in m\bar{F}$ для некоторого $d \in F$. Имеем $(b - d) + v \in D \cap mN = mD$. Поэтому $(b - d) + v = my, y \in D$. Откуда $m\theta(y) = x$.

Из [1, теорема 1.6] вытекает, что квазиоднородная QPI -группа, имеющая максимальный тип в $T(A)$, принадлежит классу L (см. также [7, лемма 2]). По теореме 5.1 из [2] QPI -группа из L с квазиразложимыми сервантными подгруппами однородна. Поэтому предположим, что A не имеет ненулевых элементов максимальных типов.

Пусть $t \in T(A)$ такой, что $t > t(a), t(g)$, где $0 \neq g \in G$. Такой t существует. Действительно, пусть $p \in \Pi(A)$ не делит n . Можно считать, что $h_p(a) = 0$. Так как $\chi_A(pna + g) \leq \chi_A(na)$, то существует $\psi \in E(A)$, $\psi(pna + g) = na$. Имеем $0 \neq \psi(g) = na - p\psi(na) \in A$. Откуда $t(\psi(g)) \geq t(g), t(a)$. Существование t вытекает из условия на типы элементов.

Допустим, что $A(t) \cap W = 0$. Если π – проекция F на $\langle a \rangle_*$, то πn продолжается до $\varphi \in E(A)$, который в силу сервантной инъективности можно считать эндоморфизмом $\bar{A}$. Так как G плотна в $\bar{G}$, то $\varphi(\bar{G}) = 0$, по аналогичной причине φ действует на $\bar{W}$ как умножение на n . Поэтому если $A(t) \subseteq \langle \bar{F} \rangle_*$, то $\varphi(A(t)) \subseteq A(t) \cap W = 0$. По лемме 2 $\varphi = 0$. Противоречие. Следовательно, найдется $0 \neq x = b + g + v \in D(t)$, где $b \in \bar{W}$, $g \in \bar{G}$, $0 \neq v \in V$. Если $b = 0$, то $G \subset \langle G, g + v \rangle_* \in M$. Поэтому $b \neq 0$. Так как $\theta(D(t))$ сервантна в V , то если $v = mv_1$, $v_1 \in V$, существует $y = b_1 + g_1 + v_1 \in D(t)$, где $b_1 \in \bar{W}$, $g_1 \in \bar{G}$. Откуда $x - my = (b - mb_1) + (g - mg_1)$ и $\varphi(x - my) = n(b - mb_1) \in A(t) \cap W = 0$. Следовательно, $b = mb_1$ и, значит, $\chi(b) \geq \chi(v)$. Так как $\bar{W}$ сервантно инъективна, то существует гомоморфизм $f: V \rightarrow \bar{W}$ со свойством $f(v) = -b$. Тогда $N = \bar{F} \oplus V_1$, где $b + v \in V_1$ [9, лемма 9.5]. Откуда $G \subset \langle G, x \rangle_* \in M$, что противоречит максимальнойности G . Итак, $W \cap A(t) \neq 0$ и $G \cap A(t) \neq 0$.

Таким образом, найдутся $0 \neq y \in G$ и $0 \neq x \in W$ со свойствами $t(x) > t(y) > t(a)$, $\chi(x) > \chi(y) > \chi(a)$. Рассмотрим подгруппу $E = \langle x, a + y \rangle_*^N$. Имеем $\chi(\bar{x}) \leq \chi_N(x)$, где $\bar{x} = x + \langle a + y \rangle_*^N$ – смежный класс. Действительно, это вытекает из того, что для любого простого числа q и любого рационального числа r выполняется $h_q^N(x + r(a + y)) \leq h_q^N(ry)$, $h_q^N(x + ra)$. Поэтому если $\delta: E \rightarrow E/\langle a + y \rangle_*^N$ – естественный эпиморфизм на группу ранга 1, то существует гомоморфизм $\alpha: E/\langle a + y \rangle_*^N \rightarrow \langle x \rangle_*^A$ со свойством $\alpha(\bar{x}) = x$. Имеем $\alpha\delta n(x) = nx$, где $\alpha\delta n: \langle E \rangle_*^A \rightarrow \langle x \rangle_*^A$. Следовательно, существует $\beta \in E(A)$, продолжающий $\alpha\delta n$, он действует на W как умножение на n . Из $a + y \in \text{Ker } \beta$ следует, что $\beta(a) = na = -\beta(y)$. Отсюда $t(a) = t(\beta y) \geq t(y)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Напомним, что группа без кручения A называется *транзитивной*, если для любых ее элементов $0 \neq a, b$ условие $\chi_A(a) = \chi_A(b)$ влечет существование ее автоморфизма f со свойством $f(a) = b$. Из полученных результатов следует, что вопрос 1 из [8, § 6] имеет положительное решение.

СЛЕДСТВИЕ 9. *QPI -группа без кручения является транзитивной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Редуцированная группа без кручения транзитивна тогда и только тогда, когда транзитивна ее редуцированная часть. Редуцированная QPI -группа без кручения является сервантной вполне характеристической межпрямой суммой своих квазиоднородных компонент [5, теорема 2.1]. Вопрос об ее транзитивности сводится к вопросу о транзитивности квазиоднородных компонент. Если квазиоднородная QPI -группа однородна, то она транзитивна [2, следствие 3.3]. По теореме 7 в неоднородной QPI -группе A все ненулевые эндоморфизмы – мономорфизмы, поэтому A транзитивна.

Действительно, если $\chi(a) = \chi(b)$, где $0 \neq a, b \in A$, и $\varphi, \psi \in E(A)$ такие, что $\varphi(a) = b$, $\psi(b) = a$, то $\psi\varphi(a) = a$, $\varphi\psi(b) = b$. Отсюда $\psi\varphi = \varphi\psi = 1$, т.е. φ и ψ – автоморфизмы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные группы // Абелевы группы и модули. Томск, 1979. С. 45–63.
- [2] Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1980. С. 45–69.
- [3] Arnold D.M., O'Brien, Reid J.D. Quasi-pure injective and projective torsion-free abelian groups of finite rank // Proc. London Math. Soc. 1979. V. 38. № 3. P. 532–544.
- [4] Крылов П. А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. № 7. Томск, 1988. С. 81–99.
- [5] Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 93–99.
- [6] Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения конечного p -ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. № 10. Томск, 1991. С. 157–178.
- [7] Чехлов А.Р. Об абелевых QCS -группах без кручения // Абелевы группы и модули. № 11, 12. Томск, 1994. С. 240–245.
- [8] Беккер И.Х., Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. № 11, 12. Томск, 1994. С. 3–52.
- [9] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [10] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.

Томский государственный университет

Поступило

10.06.1998

Исправленный вариант

21.03.2000