Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Егоров, Разветвленные накрывающие над $\mathbb{C}^2$ и гипотеза о якобиане, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 172–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 03:49:06

УДК 514.7

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ НАКРЫВАЮЩИЕ НАД $\mathbb{C}^2$ И ГИПОТЕЗА О ЯКОБИАНЕ

Г. В. Егоров

В связи с гипотезой о якобиане представляет интерес некоторый класс разветвленных накрывающих над $\mathbb{C}^2$, по традиции называемых экзотическими. В настоящей работе строится серия примеров таких накрывающих; в частности, описываются способы построения накрывающих со сколь угодно большим числом листов, а также с незаузленными кривыми ветвления. Кроме того, посчитаны некоторые их топологические характеристики, что дает возможность ответить на некоторые вопросы о возможном контрпримере к гипотезе о якобиане.

Библиография: 11 названий.

1. Формулировка результата. Гипотеза о якобиане формулируется так: если полиномиальное отображение $\mathbb{C}^2$ в себя локально обратимо, то оно обратимо в целом. Эта проблема была поставлена в работе Келлера [1]. Как известно (см., например, [2]), если контрпример к гипотезе существует, то существует разветвленная аналитическая накрывающая над $\mathbb{C}^2$, обладающая следующими свойствами. Эта накрывающая должна топологически представлять собой дизъюнктное объединение $\mathbb{R}^4$, проецирующегося на $\mathbb{C}^2$ локально гомеоморфно, и нескольких $\mathbb{R}^2$, вдоль которых накрывающая может иметь ветвление конечного порядка. Накрывающие, обладающие всеми указанными свойствами, кроме, быть может, аналитичности, будем называть *экзотическими*.

Одно из многочисленных “доказательств” гипотезы о якобиане, принадлежащее Энгелю [3], существенно опиралось на невозможность существования экзотических накрывающих над $\mathbb{C}^2$. Однако Витушкин [2] построил пример трехлистной накрывающей, который послужил толчком к изучению возможных свойств таких накрывающих, в частности, возможности их аналитической реализации. В результате была построена [4] аналитическая накрывающая над открытым шаром в $\mathbb{C}^2$, гомеоморфная накрывающей Витушкина. Вместе с тем, в работах [5]–[7] Оревков и Домрина показали невозможность аналитической реализации разветвленных накрывающих с числом листов 2, 3 и 4. Это породило необходимость поиска пятилистной экзотической накрывающей, и в статье [9] такой пример построен.

С другой стороны, для понимания структуры имеющихся экзотических накрывающих были вычислены некоторые их топологические характеристики (см. [8], [9]). Группы вторых целочисленных гомологий с компактным носителем оказались соответственно одно- и двумерными. В качестве образующих этих групп оказалось возможным взять сферы, имеющие лишь одно трансверсальное пересечение с индексом пересечения -1 , причем лишь с одной компонентой особой кривой. Значение первого класса Черна на

образующих в каждом случае оказалось равным 1, а индекс самопересечения образующей у накрывающей Витушкина оказался равным -3 , а во втором случае индексы самопересечения оказались равны -3 и -15 (для модификации накрывающей -3 и -9).

В работе [10] показано, что цепочка σ -процессов, приводящая к такой сфере, что у соответствующей ей образующей S индекс самопересечения $S \cdot S = -3$, а значение первого класса Черна $H(S) = 1$, должна иметь вполне определенную структуру. Поэтому если бы все накрывающие с указанными свойствами имели одну из таких кривых ветвления, то это бы дало дополнительную информацию для поиска возможного контрпримера к гипотезе о якобиане или доказательства самой гипотезы. Однако один из результатов настоящей работы состоит в том, что это неверно, и что индексы самопересечения могут принимать широкий диапазон значений. Таким образом, справедливы следующие утверждения (ориентация накрывающих поднимается с $\mathbb{C}^2$, а ориентация графика функции $y = f(x)$ в $\mathbb{C}^2$ – с плоскости X).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существуют трехлистные накрывающие (P, ψ) , состоящие из связного четырехмерного вещественного многообразия P и его проекции ψ на $\mathbb{C}^2$ такие, что*

- 1) *многообразие P состоит из двух попарно непересекающихся частей: P^* , гомеоморфной $\mathbb{R}^4$, и F^* , гомеоморфной $\mathbb{R}^2$;*
- 2) *отображение ψ собственнo, локальнo гомеоморфно на P^* , переводит F^* в график F ограниченной многозначной функции $y = f(x)$ и имеет двулистное ветвление вдоль F^* ;*
- 3) *группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем изоморфна $\mathbb{Z}$; в качестве образующей можно выбрать такую гладко вложенную сферу S , что S пересекает F^* в одной точке, причем $S \cdot F^* = -1$; кроме того, $H(S) = 1$, а $S \cdot S$ может принимать различные значения.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Существуют пятилистные накрывающие (P, ψ) , состоящие из связного четырехмерного вещественного многообразия P и его проекции ψ на $\mathbb{C}^2$ такие, что*

- 1) *многообразие P состоит из трех попарно не пересекающихся частей: P^* , гомеоморфной $\mathbb{R}^4$, и F_1^* и F_2^* , гомеоморфных $\mathbb{R}^2$;*
- 2) *отображение ψ собственнo, локальнo гомеоморфно на P^* , переводит F_1^* и F_2^* в график F ограниченной многозначной функции $y = f(x)$ и имеет двулистное ветвление вдоль F_1^* и F_2^* ;*
- 3) *группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем изоморфна $\mathbb{Z}^2$; в качестве образующих можно выбрать две гладко вложенные сферы S_1 и S_2 такие, что S_i пересекает F_i^* в одной точке, $i = 1, 2$, причем $S_i \cdot F_i^* = -1$, а $S_i \cap F_j^* = \emptyset$ при $i \neq j$; кроме того, $H(S_1) = H(S_2) = 1$, а $S_1 \cdot S_1$ и $S_2 \cdot S_2$ могут принимать различные значения.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Существуют четырехлистные накрывающие вида (P, ψ) , состоящие из связного четырехмерного вещественного многообразия P и его проекции ψ на $\mathbb{C}^2$ такие, что*

- 1) *многообразие P состоит из трех попарно не пересекающихся частей: P^* , гомеоморфной $\mathbb{R}^4$, и F_1^* и F_2^* , гомеоморфных $\mathbb{R}^2$;*

- 2) отображение ψ собственнo, локальнo гомеоморфнo на $P^* \cup F_2^*$, переводит F_1^* в график F ограниченной многозначной функции $y = f(x)$, а F_2^* в множество, ортогональная проекция которого на плоскость Y ограничена; кроме того, ψ имеет двулистное ветвление вдоль F_1^* ;
- 3) группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем изоморфна $\mathbb{Z}^2$; в качестве образующих можно выбрать две гладко вложенные сферы S_1 и S_2 такие, что S_i пересекает F_i^* в одной точке, $i = 1, 2$, причем $S_i \cdot F_i^* = -1$, а $S_i \cap F_j^* = \emptyset$ при $i \neq j$; кроме того, $H(S_1) = 1$, $H(S_2) = 0$, а $S_1 \cdot S_1$ и $S_2 \cdot S_2$ могут принимать различные значения.

С другой стороны, к “недостаткам” известных экзотических накрывающих с точки зрения возможного доказательства того, что и они не могут быть реализованы аналитически, следует отнести то, что проекции кривой ветвления совпадают, а также относительную простоту устройства (малое число листов). В настоящей работе описывается способ по двум имеющимся m - и n -листным накрывающим строить $(m+n-1)$ -листную с нужными свойствами, а также вычислять ее топологические характеристики. Точнее, доказывается

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если P_1 и P_2 – две разветвленные накрывающие над $\mathbb{C}^2$ с m_1 и m_2 листами соответственно, причем каждая состоит из четырехмерной клетки, на которой проекция локально гомеоморфна и нескольким двумерным клеткам, вдоль которых накрывающая может иметь ветвление, причем все двумерные клетки проецируются на плоскость Y в ограниченные множества, то существует $(m_1 + m_2 - 1)$ -листная накрывающая (P, ψ) над $\mathbb{C}^2$ со следующими свойствами:

- 1) многообразие P состоит из четырехмерной клетки, проецирующейся локально гомеоморфно, и двумерных клеток, число которых есть сумма чисел двумерных клеток у имеющих накрывающих, кратность ветвления вдоль которых равна кратности ветвления вдоль соответствующих клеток у исходных накрывающих;
- 2) группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем изоморфна прямому произведению соответствующих групп исходных накрывающих, причем в качестве образующих можно взять гладко вложенные сферы, указанные топологические характеристики которых совпадают с соответствующими характеристиками исходных накрывающих.

Кроме того, несомненный интерес представляют и следующие вопросы. Во-первых, возможно ли, что одна из компонент $\mathbb{R}^2$ не является кривой ветвления, т.е. может ли регулярная часть быть больше, чем клетка $\mathbb{R}^4$? Во-вторых, может ли она являться алгебраической кривой? Ответ на первый вопрос содержится в утверждении 3. Очевидно, что отрицательный ответ на второй вопрос доказывает гипотезу о якобиане. Вместе с тем, в настоящей статье показывается, что ответы на оба вопроса утвердительны. Более того, существуют накрывающие, все кривые ветвления которых незаузлены. Такие накрывающие представляют особый интерес, ибо по теореме Абъянкара–Моха [5], [11] любая алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, изоморфная $\mathbb{C}^1$, переводится в комплексную прямую полиномиальным автоморфизмом $\mathbb{C}^2$. Иными словами, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Существует пятилистная накрывающая (P, ψ) , состоящая

из связного четырехмерного вещественного многообразия P и его проекции ψ на $\mathbb{C}^2$ такая, что

- 1) многообразие P состоит из трех попарно непересекающихся частей: P^* , гомеоморфной $\mathbb{R}^4$, и F_1^* и F_2^* , гомеоморфных $\mathbb{R}^2$;
- 2) отображение ψ собственное, локально гомеоморфно на P^* , переводит F_1^* в незаузеланный неособый график F ограниченной многозначной функции $y = f(x)$, а F_2^* — в прямую $y = \text{const}$, и имеет двулистное ветвление вдоль F_1^* и F_2^* ;
- 3) группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем изоморфна $\mathbb{Z}^2$; в качестве образующих можно выбрать две гладко вложенные сферы S_1 и S_2 такие, что S_i пересекает F_i^* в одной точке, $i = 1, 2$, причем $S_i \cdot F_i^* = -1$, а $S_i \cap F_j^* = \emptyset$ при $i \neq j$; кроме того, $H(S_1) = H(S_2) = 1$, $S_1 \cdot S_1 = -3$, а $S_2 \cdot S_2 = -7$.

В п. 2 описывается общая структура накрывающих, используемых для доказательства утверждений 1, 2 и 3. В п. 3 приводятся конкретные примеры накрывающих, а также их топологические характеристики. Пункт 4 посвящен примеру с кривой ветвления, состоящей из двух незаузеланных компонент, т.е. доказательству утверждения 5. В п. 5 описан способ “склеивания” накрывающих, который доказывает утверждение 4.

2. Построение накрывающих. Предлагается способ построения m -листных экзотических накрывающих со следующими дополнительными свойствами: все компоненты связности их особых кривых гомеоморфны $\mathbb{R}^2$ и проецируются на одно и то же множество точек в $\mathbb{C}^2$, представляющее собой график F k -значной функции $y = f(x)$, имеющей лишь двузначные точки ветвления, причем вокруг каждой из компонент особой кривой накрывающая имеет также двулистное ветвление. При этом оказывается, что необходимым условием стягиваемости является наличие ровно одного “чистого листа” над графиком F (т.е. среди прообразов произвольной точки множества F , есть ровно одна точка, окрестность которой на накрывающей проецируется в $\mathbb{C}^2$ гомеоморфно).

Пусть $k \geq 2$. В плоскости Y возьмем k точек $y = -1, -2, \dots, -k$ и положим

$$f(0) = \{-1, -2, \dots, -k\}.$$

В плоскости X возьмем $k-1$ точку ε_j , $1 \leq j < k$, причем $\varepsilon_j^{k-1} = 1$, а точки пронумерованы против часовой стрелки. Затем на плоскости X выберем замкнутые несамопересекающиеся кривые L_j , каждая из которых имеет начало и конец в точке $x = 0$ и обходит соответствующую точку ε_j в положительном направлении. Обозначим через G_j область, ограниченную кривой L_j , $1 \leq j < k$. Очевидно, можно потребовать, чтобы замыкания двух различных областей пересекались лишь в точке $x = 0$, а также чтобы области были выпуклыми. Зададим функцию $f(x)$ на каждой из областей G_j . Потребуем, чтобы все значения функции, кроме двух, были константами (равными соответствующим значениям функции при $x = 0$), а два оставшихся (скажем, $-p$ и $-q$, $p > q$) переставлялись при движении вдоль кривой L_j , двигаясь по траекториям следующего вида. Возьмем на плоскости Y некоторую гладкую несамопересекающуюся кривую M_j , соединяющую точки $-p$ и $-q$ и не проходящую через точки $y \in \{-1, \dots, -k\} \setminus \{-p, -q\}$. Выберем на этой кривой точку, отличную от концов, и малый круг с центром в этой точке (также не содержащий указанных точек). Переставлять два значения функции будем так: точки

движутся по кривой по направлению к кругу и одновременно приходят на его границу, затем переставляются, двигаясь по границе в положительном направлении, после чего одновременно покидают круг и возвращаются в точки $-p$ и $-q$, поменявшись местами.

ЛЕММА 6. *Функцию f можно продолжить до ограниченной на всем $\mathbb{C}^2$ функции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для этого достаточно продолжить ее в области G_j , чтобы в точках ε_j были двузначные точки ветвления, после чего заполнить множество $\mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j$ гомеоморфами лучей, начальные точки которых пробегают множество $\bigcup_{j=1}^{k-1} L_j$, и определить в каждой точке луча функцию f значением, которое она принимает в его начале.

Для дальнейшего удобно ограничиться рассмотрением траекторий следующих видов (в пп. 2–4 мы обозначаем через r некоторое натуральное число, $1 \leq r \leq k$):

- 1) ломаная $[-p, -p-i, -q]$;
- 2) $q < r < p$, траектория представляет собой ломаную $[-p, -r-1-i, -r+i, -r+1-i, -q]$;
- 3) $r < q$, траектория представляет собой ломаную $[-p, -p-2i, -r+1-2i, -r+i, -r-1-i, -q]$;
- 4) $r > p$, траектория представляет собой ломаную $[-p, -r+1-i, -r+i, -r-1-2i, -q-2i, -q]$.

Условимся обозначать кривую первого типа как $[p, q]$, а кривые последних трех типов – как $[p, q, r]$ (типы различаются взаимным расположением точек $-p, -q, -r$ на прямой $\text{Im } y = 0$).

ЛЕММА 7. *Если связный график F функции f имеет лишь двузначные точки ветвления, причем их количество $k-1$, где k – число листов, то множество F односвязно, т.е. гомеоморфно $\mathbb{R}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Римана–Гурвица достаточно показать, что на бесконечности функция имеет точку ветвления порядка k . Но обход бесконечности можно представить в виде композиции обходов точек ε_j , причем по одному разу и в любом порядке. Тогда при надлежащей нумерации листов и выборе последовательности обхода будет выполняться перестановка $(1\ 2)(2\ 3) \dots (k-1\ k)$, что (перемножая справа налево) есть цикл $(1\ 2\ 3 \dots k)$. Это и означает, что график функции имеет одну точку ветвления порядка k и $k-1$ точек ветвления порядка 2, что завершает доказательство.

Таким образом, достаточно выбирать кривые M_j так, чтобы соединить все значения $f(0)$.

Теперь попытаемся построить накрывающую с данной проекцией особой кривой. Сразу оговоримся, что существование такой накрывающей не гарантируется. Поэтому метод можно в какой-то мере считать методом “проб и ошибок”.

Возьмем на отрицательной полуоси мнимой оси плоскости Y точку y_0 такую, что множество значений функции f на $\mathbb{C}^2$ лежит внутри круга с центром в 0 радиуса $|y_0|$ (это возможно в силу ограниченности f). Выберем на плоскости Y k ориентированных кривых Ω_j , $1 \leq j \leq k$, каждая из которых выходит из точки y_0 , движется по прямой к точке $-j$, затем обходит ее по достаточно малой окружности против часовой стрелки, после чего возвращается в точку y_0 по той же прямой. Зададимся некоторым числом $n \leq m/2$ – числом компонент связности особой кривой, тогда число чистых листов

будет $m - 2n$. Сопоставим каждой точке множества $f(0)$ перестановку π_j множества $1, \dots, t$, состоящую из n циклов длины 2 и $m - 2n$ циклов длины 1. Очевидно, что справедлива

ЛЕММА 8. *Существует накрывающая P_0 над плоскостью Y такая, что при движении вдоль кривой Ω_j выполняется перестановка листов π_j (номера листов фиксируем над точкой y_0).*

Чтобы проверить продолжаемость этой накрывающей до накрывающей P над всем $\mathbb{C}^2$, достаточно проверить согласованность накрывающих P_j , $1 \leq j \leq k-1$, получаемых из P_0 при обходах вдоль кривых L_j , с накрывающей P_0 .

ЛЕММА 9. *Для согласованности накрывающей P_j с накрывающей P_0 необходимо и достаточно выполнение равенства $\pi_p = \pi_q$, если $M_j = [p, q]$, и равенства $\pi_p = \pi_r \pi_q \pi_r$, если $M_j = [p, q, r]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проследить, как деформируется петля π_p при продолжении накрывающей вдоль кривой L_j , если M_j имеет тип с 1 по 3, и вдоль кривой $-L_j$, если M_j имеет тип 4. Разница объясняется необходимостью следить за тем, чтобы петля не пересекала траекторию, по которой значение $-q$ движется к $-p$ (см. также [8]). Затем нужно вспомнить, что поскольку у каждой перестановки π_j длина циклов не превосходит двух, то $\pi_j^{-1} = \pi_j$, и получатся указанные формулы.

Итак, действуем следующим образом: выбираем числа k, m, n , кривые M_j , $1 \leq j < k$, и перестановки π_j , $1 \leq j \leq k$, до тех пор, пока не окажутся выполненными все условия (гомеоморфность графика F и $\mathbb{R}^2$, а также указанные соотношения на перестановки). Когда это окажется выполненным, нужно проверить, является ли регулярная часть накрывающей объединением $\mathbb{R}^4$ и нескольких $\mathbb{R}^2$. Для этого предлагается действовать по аналогии с [2], [9]. Единственное новшество состоит в том, что в случае, если регулярная часть состоит не только из клетки $\mathbb{R}^4$, то наша задача будет состоять в том, чтобы в процессе стягивания попытаться “выколоть” из нее нужное число дисков, после чего доказать стягиваемость и гомеоморфность $\mathbb{R}^4$ и оставшейся части. В этом нам поможет следующая

ЛЕММА 10. *Эйлерова характеристика регулярной части P^* накрывающей P равна числу чистых листов накрывающей, т.е. $\chi(P^*) = m - 2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства можно воспользоваться леммой 4.2 из статьи [5]. Также можно, следуя [2], [9], посчитать эйлерову характеристику некоторого двумерного симплициального комплекса, на который регулярная часть стягивается, и доказать, что она равна эйлеровой характеристике самой регулярной части.

Из леммы 10 следует, что если регулярная часть имеет указанную структуру, то число двумерных клеток в ней есть $m - 2n - 1$. Поэтому для получения накрывающих со стягиваемой регулярной частью имеет смысл рассматривать m и n лишь такие, что $m = 2n + 1$, в частности, m следует брать нечетным.

Если все необходимые соотношения оказались выполнены и удалось доказать, что накрывающая имеет нужную структуру, то это дает пример экзотической накрывающей. Именно так были получены примеры накрывающих из следующего пункта, а также многие другие. Если же указанным способом не удастся этого доказать, то из этого априори не следует, что накрывающая нам не подходит (хотя в некоторых случаях это

можно строго доказать). В таких случаях предлагается начинать сначала и пытаться строить новую накрывающую с желаемыми свойствами.

3. Примеры накрывающих. Прежде всего заметим, что при построении накрывающих методом, описанным в предыдущем пункте, функция $f(x)$ и сама накрывающая определяются сначала над плоскостью Y , потом над множествами L_j и G_j , $1 \leq j < k$, и лишь затем над всем пространством $\mathbb{C}^2$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 11. Пусть P – накрывающая, построенная по предложенной схеме, а τ – перестановка чисел от 1 до $k-1$. Потребуем, чтобы обход M_j выполнялся при движении не вдоль кривой L_j , а вдоль кривой $L_{\tau(j)}$. Кроме того, пусть при движении по Ω_j выполняется перестановка $\pi_{\tau(j)}$. Тогда накрывающую P_0 над плоскостью Y можно продолжить до накрывающей P' над всем $\mathbb{C}^2$, имеющей такую же клеточную структуру, включая кратность ветвления вдоль каждой из компонент $\mathbb{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основывается на том, что как накрывающую P , так и накрывающую P' можно стянуть на накрывающую над множеством

$$\bigcup_{j=1}^{k-1} (L_j \cup G_j).$$

А поскольку в обоих случаях для различных j множества $L_j \cup G_j$ пересекаются лишь в точке 0, то топологически накрывающая над их объединением останется такой же. Из этого уже нетрудно получить, что указанные свойства накрывающих P и P' совпадают.

ТАБЛИЦА 1

№	j	M_j	π_j	τ	$S \cdot S$
1	1	[4, 2, 3]	(1 3)	id	−3
	2	[3, 1]	(1 2)	(2 3)	−3
	3	[4, 1, 2]	(1 3)		
	4		(2 3)		
2	1	[6, 1, 2]	(2 3)	id	−51
	2	[8, 2, 7]	(1 2)	(7 8)	−49
	3	[10, 4]	(1 3)	(6 8)	−41
	4	[3, 1, 5]	(1 2)	(6 9)	−39
	5	[9, 6, 2]	(1 2)	(5 6)	−35
	6	[6, 4, 1]	(1 3)	(5 6 7)	−31
	7	[8, 5, 1]	(2 3)	(5 8)	−21
	8	[7, 5, 6]	(1 3)	(5 9)	−19
	9	[10, 8, 9]	(2 3)	(5 9 7)	−15
	10		(1 2)	(5 9 6 8)	−9

Вместе с тем топологические характеристики накрывающих P и P' могут отличаться.

Очевидно, что перестановка множества $1, \dots, k-1$ по кругу заведомо не может дать топологически отличающуюся накрывающую — накрывающая при этом просто “повернется”. Поэтому у перестановки τ можно считать точку 1 фиксированной. В этих

случаях при перестановках могут получиться накрывающие, негомеоморфные исходным.

Теперь приведем примеры накрывающих с различными индексами самопересечения образующих групп двумерных гомологий. Сам подсчет этих характеристик довольно трудоемок, а потому не приводится. Отметим лишь, что для этого использовался (с некоторыми модификациями) метод, примененный в [8], [9]. Начнем с трехлистных накрывающих (таблица 1). Отметим, что первая накрывающая есть накрывающая Витушкина (см. [2], [8]).

В таблице 2 приведены примеры пятилистных накрывающих. Первая накрывающая есть не что иное, как накрывающая, построенная в [9].

ТАБЛИЦА 2

№	j	M_j	π_j	τ	$S_1 \cdot S_1$	$S_2 \cdot S_2$
1	1	[3, 2, 1]	(2 3)(4 5)	id	-3	-15
	2	[4, 1, 2]	(1 2)(3 4)	(2 3)	-3	-9
	3	[3, 1, 4]	(1 3)(2 5)			
	4		(1 4)(3 5)			
2	1	[9, 7, 3]	(2 3)(4 5)	id	-47	-319
	2	[6, 5, 4]	(1 2)(3 4)	(6 7 8)	-41	-277
	3	[7, 1, 6]	(2 3)(4 5)	(5 6)	-37	-251
	4	[4, 2]	(1 2)(3 4)	(3 5 7 8)	-37	-245
	5	[6, 3, 8]	(2 3)(4 5)	(6 7)	-27	-183
	6	[9, 4]	(1 4)(3 5)	(6 8)	-21	-141
	7	[8, 2]	(1 3)(2 5)	(5 8 7)	-11	-73
	8	[6, 1, 9]	(1 2)(3 4)	(4 8 5 7)	-1	-5
	9		(1 2)(3 4)	(3 5 4 6)(7 8)	-1	+1
				(4 7)(5 6)	+3	+21
				(3 7 4 8)(5 6)	+7	+59

В таблице 3 указаны примеры накрывающих, регулярная часть которых нестягиваема. Чтобы отличать поверхности, пересекающие особую кривую, от непересекающих, будем обозначать первые через S_1 , а вторые – через S_2 .

Стоит обратить внимание на четность индекса самопересечения пробных сфер, целиком лежащих в регулярной части. Понятно, что это соотносится с тем фактом, что их первый класс Черна четен (и равен 0).

Существование накрывающих с указанными свойствами доказывает утверждения 1, 2 и 3.

4. Накрывающая с незаузленными кривыми ветвления. Теперь построим накрывающую, одна из кривых ветвления которой является комплексной прямой. При этом вторая тоже будет незаузлена.

Построим проекции обеих кривых ветвления одновременно, как две связанные компоненты графика одной и той же функции. Положим $k = 7$, т.е. $f(0) = \{-1, -2, \dots, -7\}$. При этом точка -3 будет принадлежать одной компоненте, а все остальные – другой.

Возьмем пять петель L_j . Определим соответствующие траектории M_j , $1 \leq j \leq k-1$. Пусть ломаная M_2 имеет тип $[6, 1, 2]$, ломаная M_3 – тип $[7, 1, 3]$, а ломаная M_5 – тип $[7,$

ТАБЛИЦА 3

№	j	M_j	π_j	τ	$S_1 \cdot S_1$	$S_2 \cdot S_2$
1	1	[6, 3, 4]	(2 3)	id	-3	-6
	2	[4, 1]	(1 2)	(3 5)	-3	-4
	3	[6, 1, 3]	(2 4)	(2 6)	-3	-8
	4	[7, 3, 5]	(2 3)			
	5	[5, 2]	(1 2)			
	6	[7, 2, 3]	(3 4)			
	7		(1 4)			
3	1	[4, 1]	(2 3)	id	-29	-10
	2	[6, 1, 3]	(1 2)	(3 4)	-25	-8
	3	[5, 2, 6]	(3 4)	(5 6)	-21	-6
	4	[7, 4, 8]	(2 3)	(4 5 7)	-17	-6
	5	[8, 6, 1]	(1 4)	(5 7)	-13	-6
	6	[7, 2, 5]	(2 4)	(3 4 7)	-11	-6
	7	[7, 3, 4]	(2 4)	(4 7)	-9	-6
	8		(3 4)	(3 4 6)	-7	-4
				(4 6)	-5	-2
				(2 3)(4 6)	-3	-2
				(2 3 6)(4 5)	-3	0
				(4 7 5 6)	-1	-2
				(2 3)(4 7 5 6)	+1	-2
				(2 3 7)(4 6)	+1	0
				(2 6)(3 5)	+3	0

5, 4]. Что касается траекторий M_1 и M_4 , определим их как ломаные

$$\left[-5, -5 - 4i, -4i, 4i, -2 - i, -3 + i, -\frac{7}{2} - 2i, -2 - 2i, -1 + i, -\frac{1}{2} - 3i, -4 - 3i, -4\right]$$

и

$$\left[-7, -6 + 2i, -5 - i, -\frac{5}{2} + i, -\frac{5}{2} - 2i, -5 - 2i, -6 + i, -7 - 3i, -2 - 3i, -2\right]$$

соответственно.

Доопределим функцию до всего $\mathbb{C}^2$ так, чтобы в каждой точке одно из ее значений было равно -3 . Тогда график будет состоять из двух связанных компонент, одна из которых является комплексной прямой $y = -3$.

ЛЕММА 12. *Каждая из компонент связности графика незаузлена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Незаузленность компоненты, являющейся комплексной прямой, очевидна. Теперь докажем то, что фундаментальная группа дополнения второй компоненты изоморфна $\mathbb{Z}$. Для этого заметим, что она порождена шестью петлями, лежащими в плоскости Y , исходящими из точки y_0 , где y_0 — достаточно большое по модулю число, лежащее на отрицательной полуоси мнимой оси, и делающими обходы вокруг каждой из точек $-1, -2, -4, \dots, -7$ (точке $-j$ соответствует петля Ω_j). Заметим, что поскольку точки с $y = -3$ принадлежат дополнению рассматриваемой компоненты графика, то при движении по кривой L_1 петля Ω_5 переходит в Ω_4 , а при движении по L_3

Ω_1 переходит в Ω_7 , которая, в свою очередь, при движении по L_4 переходит в Ω_2 . Итак, $\Omega_4 = \Omega_5$, а $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_7$. Но тогда при обходе L_2 петля Ω_6 переходит в цепочку $-\Omega_2 + \Omega_1 + \Omega_2$ (порядок прохождения – слева направо), что в фундаментальной группе есть просто Ω_2 . Аналогично, при движении по L_5 петля Ω_7 переходит в $\Omega_4 + \Omega_5 - \Omega_4$, что есть Ω_4 . Итак, все петли в фундаментальной группе совпадают. Из этого уже следует, что и вторая компонента графика незаузлена.

Теперь определим пятилистную накрывающую над $\mathbb{C}^2$. Для этого возьмем пять листов, и потребуем, чтобы при обходе Ω_1 выполнялась перестановка (1 2), при обходе Ω_2 – перестановка (2 4), при обходе Ω_3 – (1 5), при обходе Ω_4 – (2 3), при обходе Ω_5 – (3 5), при обходе Ω_6 – (1 4), при обходе Ω_7 – (2 5). Тогда, применяя стандартную технику, можно доказать, что регулярная часть накрывающей гомеоморфна $\mathbb{R}^4$. Что касается образующих группы двумерных гомологий, то одна из них (та, которая пересекает кривую ветвления $y = -3$) имеет индекс самопересечения -7 , а другая имеет индекс самопересечения -3 . Это завершает доказательство утверждения 5.

5. Склейка накрывающих по листу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4. Суть метода состоит в том, что берутся две накрывающие, построенные ранее, и “склеиваются” друг с другом.

Точнее, заметим прежде всего, что поскольку у обоих накрывающих проекции всех двумерных клеток на плоскость Y ограничены, то можно подправить накрывающие так, чтобы для одной накрывающей они лежали в области $\text{Im } y < -i$, а для другой – в области $\text{Im } y > i$.

Пусть накрывающие P_1 и P_2 имеют m_1 и m_2 листов соответственно. Занумеруем листы над гиперплоскостью $\text{Im } y = 0$ (над ней у обеих накрывающих нет ветвления) в произвольном порядке и будем считать, что накрывающая P_1 имеет листы с номерами от 1 до m_1 , а накрывающая P_2 – от m_1 до $m_1 + m_2 - 1$. Таким образом, у обеих накрывающих есть лист с номером m_1 . Сделаем следующее: возьмем накрывающую P_1 , а вместо части $\text{Im } y > 0$ листа m_1 подклеим соответствующую часть листа m_1 накрывающей P_2 . Таким образом, у нас получилась $(m_1 + m_2 - 1)$ -листная разветвленная накрывающая P .

Первое, что необходимо отметить – это то, что новая накрывающая наследует топологические свойства исходных. Доказательство этого очень просто. А именно, выкинем из полученной накрывающей все двумерные клетки исходных накрывающих и докажем, что оставшаяся часть гомеоморфна $\mathbb{R}^4$. Но она получается из двух четырехмерных клеток путем склеивания по лежащей над гиперплоскостью $\text{Im } y = 0$ трехмерной клетке. Из этого уже следует, что клеточная структура накрывающей P такая, какая требуется.

Можно также заметить, что если одна или две из накрывающих получились склейкой накрывающих по только что описанному методу, то и их можно склеить. Это дает возможность строить сколь угодно сложные накрывающие из одной-единственной исходной, склеивая ее саму с собой достаточно большое число раз.

Что же касается топологических характеристик накрывающей, то ее группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем является прямым произведением групп каждой из склеенных накрывающих. Ее образующие получаются теоретико-множественным объединением образующих обеих групп, поскольку можно считать, что эти образующие лежали в отрезанных частях накрывающих. По этой же причине

утверждения о первых классах Черна и об индексах самопересечения каждой из образующих остаются верными и для новой накрывающей. Более того, из этого же следует, что взаимные индексы пересечения образующих, относящихся к одной накрывающей, не изменяются после склейки, а взаимные индексы пересечения образующих, относящихся к разным сферам, равны 0 (их можно выбрать вообще не пересекающимися). Это и завершает доказательство утверждения 4.

Описанным методом можно построить (например, используя таблицы 1–3) накрывающие с различными топологическими свойствами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Keller O. H. Ganze Cremona-Transformationen // Monats. Math. Physik. 1939. V. 47. P. 299–306.
- [2] Витушкин А. Г. Некоторые примеры в связи с задачей полиномиальных преобразований $\mathbb{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 269–279.
- [3] Engel W. Ein Satz über ganze Cremona-Transformationen der Ebene // Math. Ann. 1955. V. 130. P. 11–19.
- [4] Оревкин С. Ю. Диаграммы Рудольфа и аналитическая реализация накрытия Витушкина // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 206–224.
- [5] Оревкин С. Ю. О трехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 6. С. 1231–1240.
- [6] Домрина А. В., Оревкин С. Ю. О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. I. Случай неприводимой кривой ветвления // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 847–862.
- [7] Домрина А. В. О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. Общий случай // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 3. С. 464–467.
- [8] Витушкин А. Г. Описание гомологий разветвленной накрывающей над $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 839–846.
- [9] Егоров Г. В. Пример пятилистной экзотической накрывающей над $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 4. С. 532–547.
- [10] Витушкин А. Г. Критерий представимости цепочки σ -процессов композицией треугольных цепочек // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 5. С. 643–653.
- [11] Abhyankar S. S., Moh T. T. Embeddings of the line in the plane. // J. Reine Angew. Math. 1975. V. 276. P. 148–166.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: egorovg@online.ru

Поступило
22.12.2003