Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. З. Шаваровский, О разложимых многочленных матрицах, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 593–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm980>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:42:23

УДК 512.64

О РАЗЛОЖИМЫХ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦАХ

Б.З. Шаваровский

Доказывается, что регулярная многочленная матрица над полем комплексных чисел с не более чем одним элементарным делителем степени 3 и всеми остальными элементарными делителями степени не выше 2 допускает разложение на линейные регулярные множители.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. В настоящей работе исследуется вопрос разложимости регулярных многочленных матриц (ММ) над полем комплексных чисел на линейные регулярные множители.

Вообще, задачам о структуре ММ, в частности их факторизации, посвящено много работ (см., например, монографии [1], [2] и цитированную там литературу). Одним из основных вопросов в построении теории разложения ММ есть поиск общего критерия выделяемости регулярного множителя и практическое построение разложения. Путем многократного применения разработанной методики к вновь получаемым множителям ММ, в конце концов, можно, в принципе, прийти к далее неразложимым, в частности линейным, множителям. Помимо того, возникает и другое направление: выделение классов ММ, разложимых на линейные множители, причем принадлежность к этим классам должна определяться по каким-то внешним признакам. Первым из выделенных был класс K_1 ММ простой структуры [1], т.е. матриц, все элементарные делители которых линейны (см. [3]–[5], а также [2, с. 113]). Казимирский и Петричкович анонсировали в [6] теорему, утверждающую разложимость на линейные регулярные множители квадратичных ММ, степени всех элементарных делителей которых не превышают 2. Далее, возможность разложения на линейные множители была доказана в [7], [8] [9] и [10] соответственно для класса K_2 ММ, все характеристические корни которых имеют кратности, не превышающие 2; для класса K_3 ММ, все коэффициенты которых являются попарно перестановочными матрицами простой структуры; для класса K_4 так называемых ММ квазипростой структуры (определение см. в п. 2) и для класса K_5 ММ степени s порядка n , количество элементарных делителей которых не меньше $s(n-1)$. Наконец, Крупник в [11] (см. также [12]), используя результаты работы [7], доказал в общем случае теорему, сформулированную ранее Казимирским и Петричковичем для квадратичных ММ. Этим выделяется еще один класс K_6 разложимых ММ со всеми элементарными делителями степени не выше 2. Имеет место следующее размещение

найденных классов: $(K_1 \cup K_2) \subset K_4 \subset K_6$, $K_1 \subset K_5$, $K_2 \cap K_5 = K_0 \neq \emptyset$. В K_0 содержится класс K' ММ без кратных характеристических корней, причем $K_3 \cap K' \neq \emptyset$.

В настоящей статье установлена разложимость на линейные регулярные множители регулярных ММ с не более чем одним элементарным делителем степени 3 и со всеми остальными элементарными делителями степени не выше 2. Отмечается, что полученный результат в определенном смысле неулучшаемый. Его можно применить к исследованию разрешимости матричных многочленных односторонних уравнений (численные методы решения матричных уравнений см. в известной книге [13]).

2. Вспомогательные предложения. Будем рассматривать ММ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Согласимся с некоторыми определениями.

ММ называется *простой по характеристическому корню* α , если все ее элементарные делители, соответствующие этому корню, линейны.

Очевидно, что простая по каждому своему характеристическому корню ММ является матрицей простой структуры.

ММ называется матрицей *квазипростой структуры*, если каждый ее характеристический корень, по которому она не является простой, имеет кратность 2.

ММ $A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s$ называют *регулярной*, если $\det A_0 \neq 0$.

Пусть $A(x)$ – регулярная ММ порядка n степени s . Равенство

$$S_1 A(x) = (E_{n-m} \oplus B_1(x)) A_1(x), \quad (1)$$

где $S_1 \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $B_1(x)$ – регулярная $(m \times m)$ -матрица степени d , $m \geq 1$, $1 \leq d < s$, E_{n-m} – единичная матрица порядка $n - m$, называют *разложением* ММ $A(x)$. Если, в частности, $m = n$, то говорят, что из ММ $A(x)$ *выделяется множитель степени d* .

Пусть дано разложение (1) и разложение

$$S_2 A(x) = \left[E_{n-m-p} \oplus \begin{pmatrix} B_2(x) & * \\ 0 & B_1(x) \end{pmatrix} \right] A_2(x), \quad (2)$$

где $B_1(x)$ и $B_2(x)$ – матрицы порядков m и p соответственно, $p > 0$. Тогда говорят, что *разложение (1) можно продолжить до разложения (2)*. Разложение (2) называется *максимальным продолжением разложения (1)*, если число p в этом разложении максимальное.

Пусть наряду с (1) существует разложение

$$S_3 A(x) = (E_{n-l} \oplus B_3(x)) A_3(x), \quad (3)$$

где $B_3(x)$ – $(l \times l)$ -матрица, $\deg B_3(x) = \deg B_1(x)$ и $l > m$. Тогда разложение (3) ((1)) называют *большим (меньшим) разложением*, чем разложение (1) ((3)).

В дальнейшем через $d^C(x)$ будем обозначать НОД миноров максимального порядка произвольной матрицы $C(x)$. Запись $H^{(i,j)}(x)$ будет означать матрицу, полученную из произвольной матрицы $H(x)$ вычеркиванием первых i строк и первых j столбцов. Через t и T обозначим операции транспонирования и блочного транспонирования соответственно.

ЛЕММА 1. Пусть имеет место разложение

$$SA(x) = (E_{n-m} \oplus (E_m x - B))G(x), \quad (4)$$

где $G(x) = \|A_0(x) \mid C(x)\|^T$, блок $C(x)$ состоит из m строк. Если существует корень α многочлена $f(x) = (\det G(x))/d^C(x)$ такой, что $\text{def } G(\alpha) > \text{def } C(\alpha)$ (def – дефект), то разложение (4) можно продолжить до разложения

$$S'A(x) = \left[E_{n-m-1} \oplus \left\| \begin{array}{c|ccc} x - \alpha & * & \dots & * \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & & E_m x - B & \\ 0 & & & \end{array} \right\| \right] G'(x). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{def } G(\alpha) = p$, $\text{def } C(\alpha) = q$. Тогда в матрице $C(\alpha)$ существует $m - q$ линейно независимых строк. Пусть без ограничения общности такими будут последние $m - q$. Так как $\text{rank } G(\alpha) = n - p$ и $p > q$, то $n - q > n - p$. Следовательно, система, состоящая из $n - m$ строк матрицы $A_0(\alpha)$ и $m - q$ последних строк матрицы $C(\alpha)$, линейно зависима, причем ее подсистема из $m - q$ последних строк матрицы $C(\alpha)$ линейно независима. Это значит, что существует $S' \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ такая, что имеет место разложение (5).

Из леммы 1 вытекает

ЛЕММА 2. Пусть имеет место разложение (4) и многочлен $f(x)$, определенные условиями леммы 1. Если существует корень α многочлена $f(x)$, по которому матрица $G(x)$ проста, то разложение (4) можно продолжить до разложения (5). Если, в частности, матрица $G(x)$ является простой по каждому корню многочлена $f(x)$, за исключением, возможно, одного корня, кратность которого в многочлене $\det G(x)$ равна 2, то из ММ $A(x)$ выделяется линейный множитель.

ЛЕММА 3. Регулярная ММ $A(x)$ порядка n , каждый характеристический корень α которой удовлетворяет одному из следующих условий:

- а) все элементарные делители, соответствующие корню α , линейны;
- б) кратность корня α равна 2;
- в) не более чем для одного 3-кратного корня α имеем $\text{rank } A(\alpha) = n - 1$,

допускает выделение линейного множителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним [1], что значением произвольной ММ $V(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x)$, заданного своим каноническим разложением $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{s_1} \dots (x - \alpha_l)^{s_l}$, называется числовая матрица

$$M_{V(x)}(\varphi) = M_{V(x)}[\alpha_1^{(s_1)}, \dots, \alpha_l^{(s_l)}] = \|W_1 \dots W_l\|^T,$$

где $W_i = \|V(\alpha_i) \ V^{(1)}(\alpha_i) \ \dots \ V^{(s_i-1)}(\alpha_i)\|^T$ ($i = 1, \dots, l$), $V^{(h)}(x)$ – h -я производная матрицы $V(x)$. Значением ММ $V(x)$, состоящей из строк $\bar{v}_1(x), \dots, \bar{v}_n(x)$, на системе корней элементов матрицы $D(x) = \text{diag}(d_1(x), \dots, d_n(x))$ называют [14] матрицу $M_{V(x)}(D) = \|M_{\bar{v}_1(x)}(d_1) \ \dots \ M_{\bar{v}_n(x)}(d_n)\|^T$, где $M_{\bar{v}_i(x)}(d_i)$ отсутствует, если

$d_i(x) = \text{const}$. Далее через U_g будем обозначать множество корней произвольного многочлена $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, а через $A_*(x)$ – матрицу, взаимную с матрицей $A(x)$.

Если ММ $A(x)$ имеет простую структуру, то доказательство леммы 3 следует из леммы 2.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ – все (попарно различные) корни последнего инвариантного множителя $\varphi_n(x)$ ММ $A(x)$ и пусть $\varphi(x) = \varphi_n(x)/((x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_u))$, $k = \deg \varphi$, $m = \text{rank } M_{A_*(x)}(\varphi)$. Далее возможны два случая:

- 1) $m = \min(k, n)$;
- 2) $m < \min(k, n)$.

Рассмотрим случай 1). Если $k \geq n$, то для некоторого делителя $\psi(x)$ степени n многочлена $\varphi(x)$ имеем $\text{rank } M_{A_*(x)}(\psi) = n$, что согласно теореме 2 из [1, разд. II, § 3] доказывает нашу лемму. Если $k < n$, то согласно теореме 1 из [1, разд. II, § 3] существует разложение $RA(x) = (E_{n-k} \oplus (E_k x - B))D(x)$, где $\det(E_k x - B) = \varphi(x)$. Как легко видеть, к этому разложению можно применить лемму 2 и, таким образом, получить доказательство леммы 3.

Покажем, что в случае 2) из ММ $A(x)$ выделяется линейный множитель. Доказательство этого проведем от противного.

По теореме 4 из [1, разд. II, § 4] существует разложение

$$RA(x) = (E_{n-m} \oplus (E_m x - B)) \| * \mid C(x) \|^T, \quad m < n, \quad (6)$$

где

$$\det(E_m x - B) \mid \varphi(x) \mid \det(E_m x - B) d^C(x) \quad (7)$$

($\mid$ – делит). Каждому разложению вида (6) с условиями (7) соответствует некоторое максимальное продолжение. Из всех таких продолжений выбираем наибольшее. Пусть это будет разложение

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c} E_{n-m-p} & & \\ \hline & E_p x - B_1 & B_0 \\ \hline & & E_m x - B \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ F(x) \\ C(x) \end{array} \right\| \quad (m + p < n). \quad (8)$$

Обозначим через β тот характеристический 3-кратный корень ММ $A(x)$, для которого $\text{rank } A(\beta) = n - 1$ (если такой существует). И пусть ν_1 и ν_2 – кратности этого корня в характеристическом многочлене левого сомножителя разложения (8) и в многочлене $d^C(x)$ соответственно. Далее возможны следующие случаи:

- а) $\nu_1 = 3, \nu_2 = 0$;
- б) $\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$;
- в) $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$ (или $\nu_2 = 2$);
- г) $\nu_1 = 0, \nu_2 = 2$ (или $\nu_2 = 3$);
- д) $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0$ (т.е. такой корень β в многочлене $\det A(x)$ отсутствует).

Случай, когда $\nu_1 = 2, \nu_2 = 0$, приводится, как легко убедиться, к случаю а). Мы можем предполагать, не ограничивая общности, что в каждом из случаев а)–е) разложение (8) имеет один из следующих видов: случай а)

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|ccc|c} E_r & & & & & A_0(x) \\ \hline & H_1(x) & & E_v & & F_1(x) \\ & & H_2(x) & & & F_2(x) \\ & & & H_1(x) & 1 & \\ & & & & x - \beta & \\ & & & & & H_0(x) \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ F_1(x) \\ F_2(x) \\ C_1(x) \\ C_0(x) \end{array} \right\|; \quad (9)$$

случай б)

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|ccc|cc|c} E_r & & & & & & A_0(x) \\ \hline & H_1(x) & & E_v & & & F_1(x) \\ & & H_2(x) & & & & F_2(x) \\ & & & H_1(x) & & & C_1(x) \\ & & & & x - \beta & 0 & \\ & & & & 1 & x - \beta & \\ & & & & & & H_0(x) \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ F_1(x) \\ F_2(x) \\ C_1(x) \\ C_0(x) \end{array} \right\|; \quad (9')$$

случай с)

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|ccc|c} E_r & & & & A_0(x) \\ \hline & H_1(x) & & E_v & F_1(x) \\ & & H_2(x) & & F_2(x) \\ & & & H_1(x) & \\ & & & & x - \beta & C_1(x) \\ & & & & & H_0(x) \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ F_1(x) \\ F_2(x) \\ C_1(x) \\ C_0(x) \end{array} \right\|; \quad (9'')$$

случаи d), e)

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|ccc|c} E_r & & & & A_0(x) \\ \hline & H_1(x) & & E_v & F_1(x) \\ & & H_2(x) & & F_2(x) \\ & & & H_1(x) & C_1(x) \\ & & & & H_0(x) \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ F_1(x) \\ F_2(x) \\ C_1(x) \\ C_0(x) \end{array} \right\|, \quad (9''')$$

где $\|F_1(x) \ F_2(x)\|^T = F(x)$, $\|C_1(x) \ C_0(x)\|^T = C(x)$ и блоки $H_0(x), H_1(x), H_2(x)$ диагональные, $r = n - m - p$. Заметим, что в случаях с) и d) $\beta \in U_{dC_1}$ (иначе эти случаи приводятся соответственно к случаям б) и с)).

Пусть $G_0(x)$ – второй сомножитель в разложениях (9)–(9''') и

$$D_0(x) = \|F_1(x) \ F_2(x) \ C_1(x) \ C_0(x)\|^T.$$

Рассмотрим многочлен $f_0(x) = d^{G_0}(x)/d^{D_0}(x)$. Поскольку $f_0(x) \mid \varphi(x)$ и $f_0(x) \mid d^C(x)$ (иначе разложения (9)–(9''') согласно лемме 2 можно продолжить, что невозможно), то все корни многочлена $f_0(x)$ просты и существует минимальная подматрица $Q_0(x)$ матрицы $C(x)$ (по строкам) такая, что $f_0(x) \mid d^{Q_0}(x)$. Покажем, что $Q_0(x)$ является подматрицей матрицы $C_1(x)$. В самом деле, если $C_1(x) = C(x)$, т.е. $C_0(x)$ – пустая матрица, то нечего доказывать. Если же $C_0(x)$ – непустая матрица и $Q_0(x)$ содержит, скажем, последнюю строку матрицы $C_0(x)$, то от разложения (9) ((9')–(9''')) можно перейти к разложению, отличающемуся от предыдущего только n -ми строками обоих сомножителей, причем n -й столбец первого сомножителя будет иметь вид $\|0 \ \dots \ 0 \ x - \alpha\|^t$, а n -я строка второго – вид $(x - \gamma_0)\bar{a}(x)$, где $\gamma_0 \in U_{f_0}$. Далее, от полученного разложения можно перейти к разложению, в котором n -й столбец первого сомножителя имеет вид $\|0 \ \dots \ 0 \ x - \gamma_0\|^t$, а n -я строка второго – вид $(x - \alpha)\bar{a}(x)$. Но в таком разложении второй сомножитель будет простой матрицей по характеристическому корню γ_0 , и согласно лемме 2 его можно продолжить, что противоречит максимальнойности разложения (8) с условиями (7).

Обозначим: $m_0 = \deg f_0(x)$, l_0 – число строк матрицы $Q_0(x)$, $s = \deg A(x)$. Очевидно, что $m_0 \geq sr$ ($r = n - m - p$) и, так как $m_0 \leq (s - 1)l_0$, то $l_0 \geq sr/(s - 1)$, поэтому $l_0 \geq 2$. Не ограничивая общности, можем считать, что матрица $Q_0(x)$ содержит по крайней мере $l_0 - 1$ первых строк матрицы $C_1(x)$.

Фиксируем первые $l_0 - 1$ диагональных элементов $x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_{l_0-1}$ блока $H_1(x)$ (возможно, $\alpha_i = \beta$ для некоторого $i < l_0$) и от разложения (9) ((9')–(9''')) перейдем к меньшему разложению вида

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} E_r & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & \\ \hline & & H_1^{(1,1)}(x) & 0 & E_v^{(1,0)} & 0 & \\ \hline & & & * & & & \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ B_1(x) \\ F_1^{(1,0)}(x) \\ * \end{array} \right\|, \quad (10)$$

где $B_1(x) = \bar{b}_1(x) = (x - \alpha_1)\bar{u}_1(x) + \bar{c}_1(x)$, $\bar{u}_1(x)$, $\bar{c}_1(x)$ – первые строки матриц $F_1(x)$, $C_1(x)$ соответственно, символ “*” обозначает оставшиеся без изменений части матриц.

Рассмотрим теперь многочлен $f_1(x) = d^{G_1}(x)/(x - \alpha_1)d^{D_1}(x)$, где

$$G_1(x) = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_1(x) \\ D_1(x) \end{array} \right\|, \quad D_1(x) = \left\| \begin{array}{c} F_1^{(1,0)}(x) \\ F_2(x) \\ C(x) \end{array} \right\|, \quad C(x) = \left\| \begin{array}{c} C_1(x) \\ C_2(x) \end{array} \right\|,$$

и покажем, что

$$f_1(x) \mid \varphi(x), \quad f_1(x) \mid d^C(x). \quad (11)$$

Если $\deg f_1(x) = 0$, то все ясно. Если же $\deg f_1(x) > 0$, $\gamma_1 \in U_{f_1}$ и $\gamma_1 \notin U_\varphi$ либо $\gamma_1 \notin U_{d^C}$, то по лемме 2 от разложения (10) можно перейти к разложению

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} E_r & & & & & \\ \hline & x - \gamma_1 & \times & \dots & \times & \\ \hline & & H_1^{(1,1)}(x) & & E_v^{(1,0)} & \\ \hline & & & H_2(x) & & \\ \hline & & & & x - \alpha_1 & \times \dots \times \\ \hline & & & & & * \\ \hline & & & & & * \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ \hline \bar{b}_1'(x) \\ \hline F_1^{(1,0)}(x) \\ \hline F_2(x) \\ \hline (x - \gamma_0)\bar{a}_1(x) \\ \hline * \end{array} \right\|,$$

где $\gamma_0 \in U_{f_0}$, символ “ $\times$ ” означает некоторые элементы, а “ $*$ ” – части матриц, не претерпевшие изменений. Так как $\gamma_1 \neq \alpha_0$, то в левом сомножителе все недиагональные элементы столбца, содержащего элемент $x - \alpha_1$, можем считать нулевыми. Таким образом, в этом разложении можно поменять местами $(n - m + 1)$ -й диагональный элемент $x - \alpha_1$ первого сомножителя и множитель $x - \gamma_0$ из $(n - m + 1)$ -й строки второго сомножителя. Но тогда полученное разложение по лемме 2 можно продолжить, что противоречит максимальности разложения (8) с условиями (7). Следовательно, мы показали справедливость условий (11). Ясно также, что если $\deg f_1(x) > 0$, то все корни многочлена $f_1(x)$ простые и $\text{НОД}(f_0(x), f_1(x)) = 1$.

Так как $f_1(x) \mid d^C(x)$, то в матрице $C(x)$ существует минимальная подматрица $Q_1(x)$ (по строкам), которая вместе с ранее определенной подматрицей $Q_0(x)$ образуют матрицу $Q_{01}(x) = \|Q_0(x) \ Q_1(x)\|^T$ такую, что $f_1(x) \mid d^{Q_{01}}(x)$. Покажем, что матрица $Q_1(x)$ является подматрицей матрицы $C_1(x)$. Действительно, если $C_1(x) = C(x)$, т.е. $C_0(x)$ – пустая матрица, или $f_1(x) \mid d^{Q_0}(x)$, т.е. $Q_1(x)$ – пустая матрица, то уже все доказано. Если же матрица $Q_1(x)$ содержит, например, последнюю строку матрицы $C_0(x)$, то из разложения (10) имеем

$$R'_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} E_r & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline & & H_1^{(1,1)}(x) & & E_v^{(1,0)} & \\ \hline & & & H_2(x) & & \\ \hline & & & & x - \alpha_1 & \times \dots \times \\ \hline & & & & & \times \\ \hline & & & & & \ddots \\ \hline & & & & & \times \\ \hline & & & & 0 & \times \dots \times x - \alpha_m \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ \hline \bar{b}_1(x) \\ \hline F_1^{(1,0)}(x) \\ \hline F_2(x) \\ \hline (x - \gamma_0)\bar{a}_1(x) \\ \hline * \\ \hline (x - \gamma_1)\bar{a}_m(x) \end{array} \right\|,$$

где $\gamma_i \in U_{f_i}$, $i = 0, 1$, символ “ $\times$ ” означает некоторые элементы, а “ $*$ ” – оставшиеся без изменений части матриц. В этом разложении $(n - m + 1)$ -й и n -й диагональные элементы $x - \alpha_1$ и $x - \alpha_m$ первого сомножителя можно поменять местами с множителями $x - \gamma_0$ и $x - \gamma_1$ соответствующих строк второго сомножителя. В полученном разложении второй сомножитель будет простой матрицей по характеристическим корням γ_0, γ_1 . Следовательно, это разложение можно последовательно дважды продолжить согласно

лемме 2. Но тогда мы приходим к разложению, большему, чем разложение (8), с условиями, аналогичными условиям (7), что невозможно.

Обозначим далее: $m_i = \deg f_i(x)$, $d_i = \deg d^{D_i}(x)$, $i = 0, 1$ ($D_0(x)$ см. выше), $g_1 = \deg d^{G_1}(x)$, l_1 — число строк матрицы $Q_{01}(x)$. Так как $m_1 = g_1 - d_1 - 1$, $g_1 = d_0 + 1$, то $m_1 = d_0 - d_1$, а поскольку $m_0 = sn - m - p - d_0$ и $d_1 \leq (s-1)(m+p-1)$, то $m_0 + m_1 \geq s(r+1) - 1$. С другой стороны, $m_0 + m_1 \leq l_1(s-1)$. Таким образом, $l_1 \geq (s(r+1) - 1)/(s-1)$, поэтому $l_1 \geq 3$. Допустим, не ограничивая общности, что матрица $Q_{01}(x)$ содержит не меньше, чем $l_1 - 1$ первых строк матрицы $C_1(x)$.

Фиксируем теперь $l_1 - 1$ первых диагональных элементов блока $H_1(x)$ в разложении (9) ((9')–(9''')). Пусть это будут элементы $x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_{l_0-1}, x - \alpha_{l_0}, \dots, x - \alpha_{l_1-1}$.

Перейдя от разложения (9) ((9')–(9''')) к разложению (10), предполагаем далее по индукции, что мы уже получили разложение

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} E_r & & & & & \\ \hline & E_t & & & & \\ \hline & & H_1^{(t,t)}(x) & 0 & E_v^{(t,0)} & 0 \\ \hline & & * & & & \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ B_t(x) \\ F_1^{(t,0)}(x) \\ * \end{array} \right\| \quad (12)$$

и попарно взаимно простые многочлены

$$f_0(x) = \frac{d^{G_0}(x)}{d^{D_0}(x)}, \quad f_i(x) = \frac{d^{G_i}(x)}{(x - \alpha_i)d^{D_i}(x)}, \quad i = 1, \dots, t,$$

где $B_t(x) = \|\bar{b}_1(x) \dots \bar{b}_t(x)\|^T$, $\bar{b}_i(x) = (x - \alpha_i)\bar{u}_i(x) + \bar{c}_i(x)$, $\bar{u}_i(x)$, $\bar{c}_i(x)$ — i -е строки матриц $F_1(x)$, $C_1(x)$ соответственно, символ “*” означает части матриц, не претерпевшие изменений,

$$G_i(x) = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_i(x) \\ D_i(x) \end{array} \right\|, \quad D_i(x) = \left\| \begin{array}{c} F_1^{(i,0)}(x) \\ F_2(x) \\ C(x) \end{array} \right\|, \quad C(x) = \left\| \begin{array}{c} C_1(x) \\ C_2(x) \end{array} \right\|,$$

причем $f_i(x) \mid \varphi(x)$. Обозначив $m_i = \deg f_i(x)$, $d_i = \deg d^{D_i}(x)$ ($i = 0, 1, \dots, t$), по предположению индукции будем иметь $m_1 + \dots + m_t = d_0 - d_t$, $m_0 + m_1 + \dots + m_t \geq s(r+1) - 1$. Кроме того, в матрице $C_1(x)$ выделены подматрицы $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $\dots$, $Q_t(x)$ так, что в матрице $Q_{01\dots j}(x) = \|Q_{01\dots j-1}(x) \ Q_j(x)\|^T$ выполняется условие $f_j(x) \mid d^{Q_{01\dots j}}(x)$ и никакая подматрица матрицы $Q_{01\dots j}(x)$ этим свойством не обладает ($j = 0, 1, \dots, t$). Матрица $Q_{01\dots j}(x)$ имеет l_j строк. Некоторые из подматриц $Q_i(x)$ ($i = 1, \dots, t$), возможно, пустые. Тогда $l_i = l_{i-1}$, однако

$$l_i \geq \frac{s(r+i) - i}{s-1}, \quad l_i \geq i+2, \quad i = 1, \dots, t. \quad (13)$$

Не ограничивая общности, предполагаем, что каждая из матриц $Q_{01\dots j}(x)$ ($j = 0, 1, \dots, t$) содержит не меньше $l_j - 1$ первых строк матрицы $C_1(x)$.

Фиксируем первые $l_t - 1$ диагональных элементов $x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_{l_t-1}$ матрицы $H_1(x)$ (возможно, $\alpha_i = \beta$ для некоторого $i < l_t$). Поскольку согласно (13) имеем $t + 1 \leq l_t - 1$, то мы от разложения (12) можем перейти к разложению

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} E_r & & & & & & \\ & E_{t+1} & & & & & \\ & & H_1^{(t+1, t+1)}(x) & 0 & E_v^{(t+1, 0)} & 0 & \\ & & * & & & & \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ B_{t+1}(x) \\ F_1^{(t+1, 0)}(x) \\ * \end{array} \right\|, \quad (14)$$

где $B_{t+1}(x) = \|B_t(x) \bar{b}_{t+1}\|^T$, $\bar{b}_{t+1}(x) = (x - \alpha_{t+1})\bar{u}_{t+1}(x) + \bar{c}_{t+1}(x)$, $\bar{u}_{t+1}(x), \bar{c}_{t+1}(x) - (t + 1)$ -е строки матриц $F_1(x), C_1(x)$ соответственно.

Рассмотрим многочлен вида $f_{t+1}(x) = d^{G_{t+1}}(x)/(x - \alpha_{t+1})d^{D_{t+1}}(x)$, где

$$G_{t+1}(x) = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{t+1}(x) \\ D_{t+1}(x) \end{array} \right\|, \quad D_{t+1}(x) = \left\| \begin{array}{c} F_1^{(t+1, 0)}(x) \\ F_2(x) \\ C(x) \end{array} \right\|, \quad C(x) = \left\| \begin{array}{c} C_1(x) \\ C_2(x) \end{array} \right\|.$$

Очевидно, $\text{НОД}(f_{t+1}(x), \psi_t(x)) = 1$, где $\psi_t(x) = \prod_{j=0}^t f_j(x)$. Покажем, что

$$f_{t+1}(x) \mid \varphi(x), \quad f_{t+1}(x) \mid d^C(x). \quad (15)$$

Действительно, если $f_{t+1}(x) = \text{const}$, то нечего доказывать. Если же $\deg f_{t+1}(x) > 0$ и существует корень $\gamma_{t+1} \in U_{f_{t+1}}$ такой, что $\gamma_{t+1} \notin U_\varphi$ либо $\gamma_{t+1} \notin U_{d^C}$, то согласно лемме 2 разложение (14) можно продолжить до разложения

$$R_0 A(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} E_r & & & & & & \\ & E_t & & & & & \\ & & x - \gamma_{t+1} & & & & \\ & & & H_1^{(t+1, t+1)}(x) & 0 & E_v^{(t+1, 0)} & 0 \\ & & & * & & & \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0(x) \\ B_t(x) \\ \bar{b}'_{t+1}(x) \\ F_1^{(t+1, 0)}(x) \\ * \end{array} \right\|. \quad (16)$$

Фиксируем $(t + 1)$ -й диагональный элемент $x - \alpha_{t+1}$ блока $H_1(x)$. Ему соответствует $(t + 1)$ -я строка блока $C_1(x)$. Поскольку $t + 1 \leq l_t - 1$ согласно (13), то этой строке соответствует подматрица Q_{t_1} матрицы $C_1(x)$, содержащая эту строку ($t_1 < t$). Подматрице $Q_{t_1}(x)$ соответствует многочлен $f_{t_1}(x) \neq \text{const}$. Фиксируем некоторый корень γ_{t_1} многочлена $f_{t_1}(x)$ и t_1 -й диагональный элемент $x - \alpha_{t_1}$ блока $H_1(x)$. Ему соответствует t_1 -я строка блока $C_1(x)$. Поскольку $t_1 \leq l_{t_1-1} - 1$, то этой строке соответствует подматрица $Q_{t_2}(x)$ матрицы $C_1(x)$, содержащая эту строку ($t_2 < t_1$). Подматрице $Q_{t_2}(x)$ соответствует многочлен $f_{t_2}(x) \neq \text{const}$. Фиксируем некоторый корень γ_{t_2} многочлена $f_{t_2}(x)$ и t_2 -й диагональный элемент $x - \alpha_{t_2}$ блока $H_1(x)$ и т.д. Продолжая так и далее, мы, в конце концов, придем к подматрице $Q_0(x)$, многочлену $f_0(x) \neq \text{const}$ и некоторому его корню γ_0 . Таким образом, будут зафиксированы диагональные элементы $x - \alpha_{t+1}, x - \alpha_{t_1}, \dots, x - \alpha_{t_q}$ ($t + 1 > t_1 > t_2 > \dots > t_q$) в матрице $H_1(x)$ и корни $\gamma_{t_1}, \gamma_{t_2}, \dots, \gamma_0$ многочленов $f_{t_1}(x), f_{t_2}(x), \dots, f_0(x)$ соответственно.

Теперь от (16) перейдем к разложению, которое отличается от предыдущего только тем, что на месте блоков $H_1(x), C_1(x)$ (в частях матриц, обозначенных значком “*”) стоят соответственно блоки $\tilde{H}_1(x), \tilde{C}_1(x)$ вида

$$\tilde{H}_1(x) = \left\| \begin{array}{cccc} * & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ \times \dots \times x - \alpha_{t_q} \times \dots \times & 0 & \times \dots \times & 0 & \times \dots \times \\ & & & & \\ & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & \times & \times \dots \times x - \alpha_{t_1} \times \dots \times & 0 & \times \dots \times \\ & & & & \\ & & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & \times & \times \dots \times & \times & \times \dots \times x - \alpha_{t+1} \times \dots \times \\ & & & & & * & \ddots & \\ & & & & & & * & \end{array} \right\| \begin{array}{l} -t_q\text{-я строка;} \\ \\ -t_1\text{-я строка;} \\ \\ -(t+1)\text{-я строка,} \end{array}$$

$$\tilde{C}_1(x) = \left\| \begin{array}{c} * \\ (x - \gamma_0)\bar{a}_{t_q}(x) \\ * \\ (x - \gamma_{t_2})\bar{a}_{t_1}(x) \\ * \\ (x - \gamma_{t_1})\bar{a}_{t+1}(x) \\ * \end{array} \right\| \begin{array}{l} -t_q\text{-я строка;} \\ -t_1\text{-я строка;} \\ -(t+1)\text{-я строка,} \end{array}$$

где все необозначенные элементы равны нулю, значком “ $\times$ ” обозначены некоторые элементы, а “*” – части матриц, оставшиеся без изменений. Затем от полученного перейдем к разложению, в котором вместо блоков $\tilde{H}_1(x), \tilde{C}_1(x)$ стоят блоки $\tilde{H}'_1(x), \tilde{C}'_1(x)$, причем

$$\tilde{H}'_1(x) = \left\| \begin{array}{cccc} * & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ \times \dots \times x - \gamma_0 \times \dots \times & 0 & \times \dots \times & 0 & \times \dots \times \\ & & & & \\ & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & 0 & \times \dots \times x - \gamma_{t_2} \times \dots \times & 0 & \times \dots \times \\ & & & & \\ & & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & 0 & \times \dots \times & 0 & \times \dots \times x - \gamma_{t_1} \times \dots \times \\ & & & & & * & \ddots & \\ & & & & & & * & \end{array} \right\| \begin{array}{l} -t_q\text{-я строка;} \\ \\ -t_1\text{-я строка;} \\ \\ -(t+1)\text{-я строка.} \end{array}$$

Пусть $x - \beta_1, x - \beta_2, \dots, x - \beta_{t+1}$ – первые $t+1$ диагональных элементов блока $\tilde{H}'_1(x)$. Поскольку правый сомножитель в полученном разложении будет простой матрицей по характеристическим корням $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{t+1}$, то согласно лемме 2 это разложение можно продолжить последовательно $t+1$ раз, что противоречит максимальности числа p в разложении (8) с условиями (7).

Таким образом, мы показали, что многочлен $f_{t+1}(x)$ удовлетворяет условиям (15).

Так как $f_{t+1}(x) \mid d^C(x)$, то существует минимальная подматрица $Q_{t+1}(x)$ матрицы $C(x)$ такая, что $f_{t+1}(x) \mid d^{Q_{01\dots t t+1}}(x)$, где $Q_{01\dots t t+1}(x) = \|Q_{01\dots t}(x) \ Q_{t+1}(x)\|^T$. Покажем, что $Q_{t+1}(x)$ является подматрицей матрицы $C_1(x)$. Вопреки этому допустим, что матрица $Q_{t+1}(x)$ содержит, скажем, последнюю строку матрицы $C_0(x)$. Тогда из разложения (14) можем получить разложение, которое отличается от него только блоками $H(x) = \text{diag}\{H_1(x), H_0(x)\}$, $C(x) = \|C_1(x) \ C_0(x)\|^T$, а именно, на месте этих блоков стоят соответственно блоки $H'(x), C'(x)$ вида

$$H'(x) = \left\| \begin{array}{cccc} * & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ \times \dots \times x - \alpha_{t_q} \times \dots \times & 0 & \times \dots \times & 0 & \times \dots \times 0 \\ & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & \times & \times \dots \times x - \alpha_{t_1} \times \dots \times & 0 & \times \dots \times 0 \\ & & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & \times & \times \dots \times & \times & \times \dots \times x - \alpha_{t+1} \times \dots \times & 0 \\ & & & & * & \ddots & \\ & & & & & * & \\ & & & & & & x - \alpha_l \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ -t_q\text{-я строка;} \\ \\ -t_1\text{-я строка;} \\ \\ -(t+1)\text{-я строка;} \\ -l\text{-я строка,} \end{array}$$

$$C'(x) = \left\| \begin{array}{c} * \\ (x - \gamma_0)\bar{a}_{t_q}(x) \\ * \\ (x - \gamma_{t_2})\bar{a}_{t_1}(x) \\ * \\ (x - \gamma_{t_1})\bar{a}_{t+1}(x) \\ * \\ (x - \gamma_{t+1})\bar{a}_l(x) \end{array} \right\| \begin{array}{l} -t_q\text{-я строка;} \\ -t_1\text{-я строка;} \\ -(t+1)\text{-я строка,} \\ -l\text{-я строка,} \end{array} \quad (m-2 \leq l \leq m)$$

где $\gamma_{t+1} \in U_{f_{t+1}}$, элементы $\alpha_{t_q}, \dots, \alpha_{t_1}, \alpha_{t+1}, \gamma_0, \dots, \gamma_{t_2}, \gamma_{t_1}$ определены как и раньше. Далее, от этого разложения перейдем к разложению, в котором вместо блоков $H'(x), C'(x)$ стоят соответственно блоки $H''(x), C''(x)$, причем

$$H''(x) = \left\| \begin{array}{cccc} * & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ \times \dots \times x - \gamma_0 \times \dots \times & 0 & \times \dots \times & 0 & \times \dots \times 0 \\ & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & \times & \times \dots \times x - \gamma_{t_2} \times \dots \times & 0 & \times \dots \times 0 \\ & & & * & \ddots & \\ \times \dots \times & \times & \times \dots \times & \times & \times \dots \times x - \alpha_{t_1} \times \dots \times & 0 \\ & & & & * & \ddots & \\ & & & & & * & \\ & & & & & & x - \alpha_{t+1} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ -t_q\text{-я строка;} \\ \\ -t_1\text{-я строка;} \\ \\ -(t+1)\text{-я строка;} \\ -l\text{-я строка.} \end{array}$$

Обозначим диагональные элементы матрицы $H''(x)$ через $x - \beta_1, \dots, x - \beta_l$. Поскольку в полученном разложении правый сомножитель будет простой матрицей по характеристическим корням $\beta_l, \beta_{l+1}, \dots, \beta_1$, то это разложение можно продолжить последовательно $t + 2$ раз, что невозможно.

Допустим без ограничения общности, что подматрица $Q_{t+1}(x)$, состоящая из l_{t+1} строк, содержит не менее $l_{t+1} - 1$ первых строк матрицы $C_1(x)$. Обозначив $m_{t+1} = \deg f_{t+1}(x)$, $g_{t+1} = \deg d^{G_{t+1}}(x)$, $d = \deg d^{D_{t+1}}(x)$, имеем $m_{t+1} = g_{t+1} - d_{t+1} - 1$, $g_{t+1} = d_t + 1$, $m_{t+1} = d_t - d_{t+1}$. В силу предположения индукции $m_1 + \dots + m_t = d_0 - d_t$. Следовательно, $m_1 + \dots + m_t + m_{t+1} = d_0 - d_{t+1}$ и так как $m_0 = sn - m - p - d_0$, $d_{t+1} \leq (s - 1)(m + p - t - 1)$, то $m_0 + m_1 + \dots + m_t + m_{t+1} \geq s(r + t + 1) - t - 1$. Но поскольку $m_0 + m_1 + \dots + m_t + m_{t+1} \leq l_{t+1}(s - 1)$, то $l_{t+1} \geq (s(r + t + 1) - t - 1)/(s - 1)$, откуда $t + 2 \leq l_{t+1} - 1$.

Мы можем делать еще один шаг. Но, с другой стороны, мы, в конце концов, исчерпаем матрицу $C_1(x)$ и, скажем, уже l_{t+2} должно стать большим, чем число ее строк, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает нашу лемму.

3. Основной результат. Он заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Регулярная ММ $A(x)$ с не более чем одним элементарным делителем степени 3 и со всеми остальными элементарными делителями степени не выше 2 разложима в произведение линейных регулярных множителей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s и n – степень и порядок ММ $A(x)$ соответственно. Для доказательства достаточно показать выделяемость из ММ $A(x)$ линейного регулярно-множителя и применить индукцию по s . Мы с самого начала можем предполагать, что первый инвариантный множитель ММ $A(x)$ равен 1, иначе выделяемость нужного множителя очевидна. Согласно [1] матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями приводится к треугольному виду

$$SA(x)Q(x) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ a_{21}(x) & \varepsilon_1(x) & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn-1}(x) & \varepsilon_{n-1}(x) \end{vmatrix} = F(x), \quad (17)$$

где $1, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x)$ – инвариантные множители. Стало быть, $\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x), \varepsilon_i(x) \mid a_{j+i+1}(x)$ ($j = i + 2, \dots, n, i = 1, \dots, n - 2$). Пусть $F_*(x)$ – матрица, взаимная с матрицей $F(x)$:

$$F_*(x) = \begin{vmatrix} \delta_0(x) & & & \\ b_{21}(x) & \delta_1(x) & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ b_{n1}(x) & \dots & b_{nn-1}(x) & \delta_{n-1}(x) \end{vmatrix},$$

где $\delta_0(x) = \varepsilon_1(x) \cdots \varepsilon_{n-1}(x)$, $\delta_k(x) = \delta_0(x)/\varepsilon_k(x)$. Очевидно, $\delta_k(x) \mid b_{k+1\ l}(x)$ ($k = 1, \dots, n - 1, l = 1, \dots, k$). Тогда $F_*(x) = \text{diag}(\delta_0(x), \delta_1(x), \dots, \delta_{n-1}(x))P(x)$, где матрица $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ c_{21}(x) & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ c_{n1}(x) & \dots & c_{nn-1}(x) & 1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\text{diag}(\delta_0(x), \delta_1(x), \dots, \delta_{n-1}(x))P(x)F(x) = \delta_0(x)E_n$, то, сократив (слева) последнее равенство на $\text{diag}(\delta_0(x), \delta_1(x), \dots, \delta_{n-1}(x))$, находим

$$P(x)F(x) = \text{diag}(1, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x)). \quad (18)$$

Следовательно, произведение $P(x)S$, где S взято из (17), является левой преобразующей матрицей ММ $A(x)$ к ее форме Смита $E(x) = \text{diag}(1, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x))$ ($\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x)$). Построим квадратную порядка sn числовую матрицу $P' = M_{P(x) \| E \ Ex \ Ex^{s-1} \|} (E)$, которая состоит, очевидно, из горизонтальных полос вида

$$\| \bar{a} \ \alpha \bar{a} \ \dots \ \alpha^{s-1} \bar{a} \|, \quad (19)$$

$$\left\| \begin{array}{cccc} \bar{b} & \beta \bar{b} & \dots & \beta^{s-1} \bar{b} \\ \bar{b}' & \beta \bar{b}' + \bar{b} & \dots & \beta^{s-1} \bar{b}' + (s-1)\beta^{s-2} \bar{b} \end{array} \right\|, \quad (20)$$

$$\left\| \begin{array}{cccc} \bar{c} & \gamma \bar{c} & \dots & \gamma^{s-1} \bar{c} \\ \bar{c}' & \gamma \bar{c}' + \bar{c} & \dots & \gamma^{s-1} \bar{c}' + (s-1)\gamma^{s-2} \bar{c} \\ \bar{c}'' & \gamma \bar{c}'' + 2\bar{c}' & \dots & \gamma^{s-1} \bar{c}'' + 2(s-1)\gamma^{s-2} \bar{c}' + (s-1)(s-2)\gamma^{s-3} \bar{c} \end{array} \right\|, \quad (21)$$

где $\bar{a} = \|a_1 \ \dots \ a_i \ 1 \ 0 \ \dots \ 0\|$, $\bar{b} = \|b_1 \ \dots \ b_j \ 1 \ 0 \ \dots \ 0\|$, $\bar{b}' = \|b'_1 \ \dots \ b'_j \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\|$, $\bar{c} = \|c_1 \ \dots \ c_{n-1} \ 1\|$, $\bar{c}' = \|c'_1 \ \dots \ c'_{n-1} \ 0\|$, $\bar{c}'' = \|c''_1 \ \dots \ c''_{n-1} \ 0\|$, $1 \leq i, j \leq n-1$, α, β, γ – некоторые (возможно, равные) характеристические корни ММ $A(x)$, причем полоса ширины 3 единственная. Умножением (слева) каждой из полос матрицы P' соответственно на матрицы вида

$$\|q\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} q & 0 \\ r & q \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} q & 0 & 0 \\ r_1 & q & 0 \\ r_2 & r_3 & q \end{array} \right\| \quad (q \neq 0)$$

и умножением справа матрицы P' на матрицу $\text{diag}\{\underbrace{D, \dots, D}_s\}$, где

$$D = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & 1 & q_1 \\ & & \ddots \\ & & 1 & q_{n-2} \\ & & & 1 \end{array} \right\|,$$

можно прийти к матрице G , в которой вместо полос вида (19)–(21) будут стоять соответственно полосы вида

$$\| \bar{d} \ \alpha \bar{d} \ \dots \ \alpha^{s-1} \bar{d} \|, \\ \left\| \begin{array}{cccc} \bar{f} & \beta \bar{f} & \dots & \beta^{s-1} \bar{f} \\ \bar{f}' & \beta \bar{f}' + \bar{f} & \dots & \beta^{s-1} \bar{f}' + (s-1)\beta^{s-2} \bar{f} \end{array} \right\|, \\ \left\| \begin{array}{cccc} \bar{g} & \gamma \bar{g} & \dots & \gamma^{s-1} \bar{g} \\ \bar{g}' & \gamma \bar{g}' + \bar{g} & \dots & \gamma^{s-1} \bar{g}' + (s-1)\gamma^{s-2} \bar{g} \\ \bar{g}'' & \gamma \bar{g}'' + 2\bar{g}' & \dots & \gamma^{s-1} \bar{g}'' + 2(s-1)\gamma^{s-2} \bar{g}' + (s-1)(s-2)\gamma^{s-3} \bar{g} \end{array} \right\|,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{d} &= \|d_1 \dots d_{n-1} \ 1\|, & \bar{f} &= \|f_1 \dots f_{n-1} \ 1\|, & \bar{f}' &= \|f'_1 \dots f'_{n-1} \ 0\|, \\ \bar{g} &= \|g_1 \dots g_{n-1} \ 1\|, & \bar{g}' &= \|g'_1 \dots g'_{n-1} \ 0\|, & \bar{g}'' &= \|g''_1 \dots g''_{n-1} \ 0\|.\end{aligned}$$

Количество p полос матрицы G (так же, как и матрицы P') равно числу элементарных делителей ММ $A(x)$. Каждой полосе соответствует некоторый характеристический корень ММ $A(x)$. Различным полосам могут соответствовать одинаковые корни. Заменяем теперь фигурирующий в каждой полосе характеристический корень некоторой переменной x_i так, чтобы различные полосы “получили” различные переменные. Таким образом, мы приходим к матрице $U(x_1, \dots, x_p)$ над кольцом $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_p]$. Поскольку согласно лемме 1 из [14] $\det P' \neq 0$, то $\det U(x_1, \dots, x_p) \neq 0$. Следовательно, можно найти попарно различные элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ такие, что матрица V , полученная из матрицы $U(x_1, \dots, x_p)$ подстановкой $x_i = \alpha_i$ ($i = 1, \dots, p$), неособенная. Каждому из зафиксированных элементов α_i ($i = 1, \dots, p$) припишем число k_i , равное ширине соответствующей ему полосы. Очевидно, $k_1, \dots, k_p$ – степени всех элементарных делителей ММ $A(x)$, поэтому $\sum k_i = sn$. Далее, по m -у столбцу v_m матрицы V найдем единственный элемент $h_m(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg h_m(x) < sn$ такой, что $M_{h_m(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] = -v_m$ ($m = 1, \dots, n-1$), и построим матрицу

$$B(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_{n-1} & 0 \\ \hline h_1(x) \dots h_{n-1}(x) & \delta(x) \end{array} \right\|,$$

где $\delta(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_p)^{k_p}$. Легко убедиться, что матрица

$$H(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_{n-1} & 0 \\ \hline -h_1(x) \dots -h_{n-1}(x) & 1 \end{array} \right\|$$

является левой преобразующей матрицей ММ $B(x)$ к ее форме Смита $\Delta(x) = \text{diag}(1, \dots, 1, \delta(x))$ и $M_{H(x) \| E \ x \ E x^{s-1} \|}(\Delta) = V$. На основании упоминавшейся уже леммы 1 из [14] существует матрица $R(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{C}[x])$ такая, что $C(x) = B(x)R(x)$ – регулярная ММ. Согласно лемме 3 из ММ $C(x)$ выделяется линейный регулярный множитель. Это значит, что на основании теоремы 5 и утверждения 4 из [1, разд. II, §§ 2, 4] для некоторого делителя $\rho(x)$ степени n многочлена $\delta(x)$ $(n \times n)$ -матрица $M_{\| h_1(x) \dots h_{n-1}(x) \ 1 \|}(\rho)$, являющаяся подматрицей $(sn \times n)$ -матрицы $M_{\| h_1(x) \dots h_{n-1}(x) \ 1 \|}(\delta)$ полного ранга, неособенная. Следовательно, в $(sn \times n)$ -матрице $M_{P(x)}(E)$ существует неособенная подматрица $M_{P(x)}(\Phi)$ порядка n , где $\Phi(x)$ – некоторый диагональный делитель ММ $E(x)$, т.е. $E(x) = \Phi(x)\Psi(x)$, причем $\deg \det \Phi(x) = n$. На основании (17) и (18) запишем равенство

$$CA(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)\Psi(x)Q^{-1}(x). \quad (22)$$

Обозначим $\varphi(x) = \det \Phi(x)$. Учитывая неособенность матрицы $M_{P(x)}(\Phi)$ и структуру матрицы $M_{\Phi_*(x)P(x)}(\varphi)$, делаем вывод, что последняя имеет ранг n . А это на основании теоремы 3 из [1, разд. III, § 2] значит, что матрица $P^{-1}(x)\Phi(x)$ в соотношении (22) регуляризуется умножением справа на некоторую обратимую ММ. Поэтому $A(x) = M(x)N(x)$, где $M(x)$ – регулярная ММ степени 1. Теорема доказана.

В заключение отметим, что полученный результат нельзя улучшить, допуская наличие в ММ больше одного элементарного делителя степени 3 или же допуская наличие элементарного делителя степени 4.

Рассмотрим матричные уравнения вида

$$\begin{aligned} X^s + X^{s-1}A_1 + \dots + XA_{s-1} + A_s &= 0, \\ X^s + A_1X^{s-1} + \dots + A_{s-1}X + A_s &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где X – неизвестная $(n \times n)$ -матрица, и соответствующую им ММ

$$A(x) = E_n x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_{s-1} x + A_s.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если ММ $A(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то каждое из уравнений (23) разрешимо.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. Київ: Наукова думка, 1981.
- [2] Gochberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. New York: Acad. Press, 1982.
- [3] Маркус А. С., Мереуца И. В. О некоторых свойствах простых λ -матриц // Матем. исслед. 1975. Т. 10. №3. С. 207–213.
- [4] Казимирский П. С. Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев: Институт математики АН УССР, 1976. С. 29–40.
- [5] Сахнович Л. А. О факторизации передаточных оператор-функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. №4. С. 781–784.
- [6] Казимирский П. С., Петричкович В. М. Одно достаточное условие разложимости матричного квадратного трехчлена на линейные множители // II Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Резюме сообщений. Кишинев: Штиинца, 1974. С. 29–30.
- [7] Казимирский П. С., Петричкович В. М. Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители // Матем. методы и физ.-мех. поля. 1978. №8. С. 3–9.
- [8] Зелиско В. Р., Шаваровский Б. З. Разложение матричного многочлена в произведение множителей простой структуры // Матем. методы и физ.-мех. поля. 1982. №15. С. 43–48.
- [9] Шаваровский Б. З. Преобразования подобия матричных многочленов и их разложимость на множители. Дисс. ... к.ф.-м.н. Львов: ИПММ, 1985.
- [10] Мельник О. М. Некоторые вопросы подобия и факторизации матричных многочленов. Дисс. ... к.ф.-м.н. Львов: ИПММ, 1989.
- [11] Крупник И. Н. О разложении матричного пучка на линейные множители // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №2. С. 95–101.
- [12] Krupnik I. Decomposition of a monic matrix polynomial into a product of linear factors // Linear Algebra and Appl. 1992. V. 167. P. 239–242.
- [13] Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
- [14] Щедрик В. П. К вопросу разложимости матричных многочленов на множители. Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. Ленинград: ЛГУ, 1988.