Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шандра, О геодезической подвижности римановых пространств, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 620–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm982>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:35:00

УДК 514.76

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПОДВИЖНОСТИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

И. Г. Шандра

В работе доказано, что степень геодезической подвижности n -мерного риманова пространства (M, g) , отличного от пространств постоянной кривизны, может принимать лишь значения $p = m(m+1)/2 + l$, где m – число линейно независимых конциркулярных ковекторных полей на M , а l изменяется от 1 до $[(n+1-m)/3]$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Тем самым, полностью решена задача об отыскании всех лакун в распределении степеней геодезической подвижности для данного класса пространств.

Библиография: 11 названий.

Введение. Задача о геодезическом отображении римановых пространств была впервые сформулирована Леви-Чивитой [1], исследовавшим траекторную эквивалентность динамических систем. Понятие степени геодезической подвижности риманова пространства было введено Синюковым [2] как числовая характеристика мощности геодезического класса. Максимальную степень геодезической подвижности $p = (n+1)(n+2)/2$ имеют n -мерные пространства постоянной кривизны и только они. Римановы пространства, у которых степень подвижности больше 2, являются с необходимостью пространствами $V(K)$, введенными в рассмотрение Солодовниковым [3]. Синюковым была обнаружена лакунарность в распределении степеней геодезической подвижности подобно той, которая имеет место в теории движения. Им было доказано, что не существует псевдоримановых пространств, имеющих степень геодезической подвижности, заключенную в пределах

$$\frac{(n-1)n}{2} + 3 < p < \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Позже Микешем были определены точные границы первой лакуны [4]:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 < p < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

и выделена вторая лакуна. Метод нахождения таких лакун основывается на анализе условий интегрируемости основных уравнений геодезических отображений и связан со значительными трудностями вычислительного характера. Поэтому, по всей видимости, до настоящего времени было известно лишь о двух лакунах. Примененный в настоящей работе принципиально иной подход позволил найти все лакуны в распределении степеней геодезической подвижности римановых пространств (пространств со знакоопределенной метрикой) и определить их точные границы. Исследования ведутся локально, в классе достаточно гладких функций.

1. Предварительные сведения.

1. Пусть $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – n -мерное псевдориманово пространство, ∇ – риманова связность, соответствующая метрике g , а X, Y, Z – произвольные дифференцируемые векторные поля на M .

Отображение псевдориманова пространства (M, g) на некоторое псевдориманово пространство $(\overline{M}, \overline{g})$ называется *геодезическим*, если при этом отображении каждая геодезическая пространства (M, g) переходит в геодезическую пространства $(\overline{M}, \overline{g})$. Для того чтобы псевдориманово пространство (M, g) допускало геодезическое отображение, необходимо и достаточно, чтобы на нем существовала симметрическая билинейная форма $A(X, Y)$, удовлетворяющая условиям [2]:

$$(\nabla_Z A)(X, Y) = \lambda(X)\langle Y, Z \rangle + \lambda(Y)\langle X, Z \rangle \quad (1)$$

при некотором градиентном ковекторе λ . В случае, когда $\lambda \neq 0$, геодезическое отображение называется *нетривиальным* (НГО). Если пространство (M, g) ($n > 2$) допускает два линейно независимых решения уравнений (1), не пропорциональных метрическому тензору, то имеют место следующие соотношения [4]:

$$(\nabla_Z \lambda)(X) = K A(X, Z) + \mu(X, Z), \quad (2)$$

$$\nabla_Z \mu = 2K \lambda(Z), \quad (3)$$

где K – некоторая константа, а μ – скалярное поле на M . При этом (M, g) называют *пространством* $V(K)$ (см. [3], [4]).

Степень геодезической подвижности p n -мерного псевдориманова пространства (M, g) называется размерность линейного пространства решений системы (1). Любое псевдориманово пространство имеет степень геодезической подвижности не ниже 1 (так как на нем существует по крайней мере одно решение системы (1) вида $A = \text{const } g$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показано автором в [5], [6], если $K \neq 0$, то множество решений системы (1) пространства $V(K)$ образует йорданову алгебру Q относительно операции умножения:

$$(\overset{1}{A} * \overset{2}{A})(X, Y) = K(\langle \overset{1}{a}X, \overset{2}{a}Y \rangle + \langle \overset{2}{a}X, \overset{1}{a}Y \rangle) - (\overset{1}{\lambda} \otimes \overset{2}{\lambda} + \overset{2}{\lambda} \otimes \overset{1}{\lambda})(X, Y),$$

где λ – ковектор, соответствующий решению A системы (1), a – линейный оператор, определенный условиями $\langle aX, Y \rangle = A(X, Y)$.

Йорданову алгебру абсолютно параллельных симметрических билинейных форм на (M, g) мы будем обозначать через Q_0 . Очевидно, что $Q_0 \subset Q$.

2. Ковекторное поле φ на M называется *конциркулярным* [6], если

$$(\nabla_Z \varphi)(X) = \rho \langle X, Z \rangle,$$

где ρ – некоторое скалярное поле на M . Если к тому же имеет место условие

$$\nabla_Z \rho = K \varphi(Z),$$

где K – некоторая константа, то конциркулярное ковекторное поле называется *специальным* [7].

Линейное пространство конциркулярных ковекторных полей на M обозначим через $\text{Con}(M)$, а пространство ковариантно постоянных ковекторных полей на M – через $\text{Con}_0(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Псевдоримановы пространства, допускающие конциркулярные основного типа поля, допускают НГО [2]. Так, если $\overset{1}{\varphi}, \dots, \overset{m}{\varphi}$ – базис пространства $\text{Con}(M)$, то тензорное поле

$$A = \sum_{\alpha, \beta=1}^m C_{\alpha}^{\beta} (\overset{\alpha}{\varphi} \otimes \overset{\beta}{\varphi} + \overset{\beta}{\varphi} \otimes \overset{\alpha}{\varphi}) \quad (4)$$

является решением системы (1), где C_{α}^{β} ($= C_{\beta}^{\alpha}$) – некоторые константы. Это говорит о том, что степень подвижности такого пространства не ниже $m(m+1)/2 + 1$ (для пространств, отличных от пространств постоянной кривизны). Множество решений системы (1), порожденных конциркулярными полями по формуле (4), образует идеал йордановой алгебры Q [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если (M, g) допускает два или более линейно независимых конциркулярных ковекторных поля, то все они являются специальными, соответствующими одной и той же константе K [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Псевдоримановы пространства, допускающие специальные конциркулярные основного типа ковекторные поля, являются пространствами $V(K)$. В частности, к пространствам $V(0)$ относятся пространства Широкова, т.е. псевдоримановы пространства, допускающие конциркулярное поле вида

$$(\nabla_Z \varphi)(X) = \langle X, Z \rangle,$$

называемое *сходящимся полем*. Задание такого поля на $(n+1)$ -мерном псевдоримановом пространстве $(\widetilde{M}, G)$ равносильно тому, что в специальной системе координат (x^0, x^i) на $\widetilde{M}$ компоненты метрического тензора могут быть приведены к виду [8]

$$G_{IJ} = \exp(2Kx^0) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} g_{ij} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где K ($\neq 0$) – некоторая константа, $g_{ij}(x^k)$ – компоненты метрического тензора некоторого n -мерного псевдориманова пространства (M, g) , отнесенного к системе координат (x^i) (здесь и всюду в дальнейшем индексы $i, j, \dots$ изменяются от 1 до n , а индексы $I, J, \dots$ – от 0 до $n+1$).

2. Формулировка основного результата.

ТЕОРЕМА. *Степень геодезической подвижности n -мерного ($n > 2$) риманова пространства (M, g) , отличного от пространств постоянной кривизны, может принимать лишь следующие значения:*

$$p = \frac{m(m+1)}{2} + l, \quad (6)$$

где $m = \dim \text{Con}(M)$, а l изменяется от 1 до

$$L = \left\lceil \frac{n+1-m}{3} \right\rceil \quad (7)$$

(квадратные скобки означают целую часть числа).

3. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Йорданова алгебра Q n -мерного пространства $V(K)$ ($K \neq 0$) с метрическим тензором g изоморфна йордановой алгебре Q_0 некоторого $(n+1)$ -мерного пространства Широкова $(\widetilde{M}, G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Путем прямых выкладок нетрудно убедиться, что симметрическая билинейная форма $\widetilde{A}$, является абсолютно параллельной на $(n+1)$ -мерном пространстве Широкова $(\widetilde{M}, G)$ тогда и только тогда, когда ее компоненты в специальной системе координат (x^0, x^i) на $\widetilde{M}$ приводятся к виду

$$\widetilde{A}_{IJ} = \exp(2Kx^0) \begin{pmatrix} \mu & \lambda_i \\ \lambda_j & A_{ij} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где A_{ij}, λ_i, μ – компоненты тензорных полей A, λ, μ , являющихся решениями системы (1)–(3), в системе координат (x^i) на M . Таким образом, соотношения (8) устанавливают взаимно однозначное соответствие между абсолютно параллельными квадратичными формами $(n+1)$ -мерного пространства Широкова и квадратичными формами n -мерного пространства $V(K)$ ($K \neq 0$), являющимися решениями системы (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Подобным образом нетрудно установить взаимно однозначное соответствие между абсолютно параллельными ковекторными полями $(n+1)$ -мерного пространства Широкова и конциркулярными полями n -мерного пространства $V(K)$ ($K \neq 0$).

ЛЕММА 2. *Размерность алгебры Q_0 на n -мерном римановом пространстве Широкова, отличным от плоского, может принимать лишь следующие значения:*

$$\dim Q_0 = \frac{k(k+1)}{2} + l, \quad (9)$$

где l изменяется от 1 до L_a , $k = \dim \text{Con}_0(M)$, а

$$L_a = \left\lfloor \frac{n-k}{3} \right\rfloor. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in Q_0$. Если риманово пространство (M, g) неприводимо, то, как известно [9], оно допускает такие поля только вида $B = \text{const } g$. И в этом случае теорема доказана ($m = 0, l = 1$). Если же (M, g) приводимо, то метрическая форма $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ и квадратичная форма $B = b_{ij} dx^i dx^j$ в некоторой системе координат (x^i) на M могут быть одновременно приведены к виду [9]

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{i_0 j_0} dx^{i_0} dx^{j_0} + \sum_{\alpha=1}^l g_{i_\alpha j_\alpha}^\alpha (x^{k_\alpha}) dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha}, \\ B &= C_{i_0 j_0} dx^{i_0} dx^{j_0} + \sum_{\alpha=1}^l C_{i_\alpha j_\alpha}^\alpha (x^{k_\alpha}) dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $C_{i_0 j_0} = (C_{j_0 i_0})$, C_α – некоторые константы, $g_{i_\alpha j_\alpha}^\alpha (x^{k_\alpha})$ – метрический тензор некоторого неприводимого риманового пространства $(\widetilde{M}, \overset{\alpha}{g})$, $g_{i_0 j_0}^0 (= \text{const})$ – метрический

тензор плоского риманова пространства $(\overset{0}{M}, \overset{0}{g})$, $\dim \overset{\alpha}{M} = n_\alpha$, $\dim \overset{0}{M} = n_0 = k$; индексы $i_0, j_0, k_0, \dots$ изменяются от 1 до n_0 ; $i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha, \dots$ изменяются от $1 + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} n_\beta$ до $\sum_{\beta=0}^{\alpha} n_\beta$; $\sum_{\beta=0}^l n_\beta = n$. Так как исследуемое нами риманово пространство (M, g) допускает сходящееся конциркулярное поле, то все пространства $(\overset{\alpha}{M}, \overset{\alpha}{g})$ будут также допускать такое поле; следовательно, должны иметь размерность не ниже 3, так как в противном случае они были бы плоскими, что противоречит их неприводимости. Поэтому величина l в формуле (6) может принимать значения от 0 до $[(n - k)/3]$. Причем случай $l = 0$, как очевидно, соответствует плоскому пространству.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть $A \in Q_0$ и φ – сходящееся поле на пространстве Широкова (M, g) . Тогда существует ковекторное поле ψ на M такое, что $A = L_P g$, где P – векторное поле, сопряженное относительно метрики g ковекторному полю ψ , а L_P – производная Ли в направлении P . Нетрудно проверить, что таковым является ковекторное поле $\psi(X) = \varphi(aX)$.

4. Доказательство основного результата. Всюду в дальнейшем, если это не оговорено особо, мы будем предполагать, что (M, g) является римановым пространством (т.е. метрика g положительно определена). Как уже было сказано выше, римановы пространства, допускающие степень геодезической подвижности $p > 2$, т.е. имеющие не менее двух линейно независимых решений системы (1), не пропорциональных метрическому тензору, являются по необходимости пространствами $V(K)$. Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $K = 0$. Как показано в работе [10], пространства $V(0)$ со знакоопределенной метрикой являются пространствами Широкова. Пусть A – произвольное решение уравнений (1), а $\overset{1}{\varphi}, \dots, \overset{m}{\varphi}$ – базис линейного пространства $\text{Con}(M)$. Мы можем выбрать его таким образом, что $\overset{1}{\varphi}$ будет сходящимся полем, а $\overset{2}{\varphi}, \dots, \overset{m}{\varphi}$ – ковариантно постоянными. Из соотношений (2) при $K = 0$ следует, что ковектор λ , соответствующий A , является конциркулярным полем, поэтому

$$\lambda = \sum_{\alpha=1}^m C_\alpha^\alpha \overset{\alpha}{\varphi}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, тензор

$$B = 2A - C_1^1 \overset{1}{\varphi} \otimes \overset{1}{\varphi} - 2 \sum_{\alpha=2}^m C_\alpha^\alpha \overset{\alpha}{\varphi} \otimes \overset{1}{\varphi}$$

будет ковариантно постоянным. Таким образом,

$$p = \dim Q_0 + \dim \text{Con}(M). \quad (12)$$

Учитывая, что $\dim \text{Con}_0(M) = m - 1$, из (12) и леммы 2 мы получаем утверждение нашей теоремы.

2) Пусть $K \neq 0$. Лемма 1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями системы (1) на n -мерном римановом пространстве (M, g) и ковариантно постоянными квадратичными формами на $(n+1)$ -мерном пространстве $V(0)$ с метрическим тензором G , определяемым формулой (5). Если $K < 0$, то G будет знакоопределена

и к ней применимы рассуждения, использованные нами в п. 1. Поэтому, полагая в соотношениях (9) и (10) $k := m$, $n := n + 1$, мы снова приходим к (6), (7). Если же $K > 0$, то метрика G имеет лоренцеву сигнатуру. Тогда одна из метрик $\overset{0}{G}, \overset{1}{G}, \dots, \overset{l}{G}$ в разложении (11) для G будет иметь лоренцеву сигнатуру, а остальные будут знакоопределены. Если таковой является $\overset{0}{G}$, то это ничего не изменяет по сравнению со случаем $K < 0$. Пусть таковой является одна из метрик $\overset{\alpha}{G}$. Будем считать для определенности $\overset{1}{G}$. Как отмечалось выше (см. замечание 6), пространства Широкова допускают симметрические абсолютно параллельные билинейные формы только лишь вида $A = L_Z g$. Все такие формы на неприводимом псевдоримановом пространстве $(\overset{1}{M}, \overset{1}{G})$ лоренцевой сигнатуры, как это показано Аминовой [11], определяются соотношениями

$$L_Z g = C \overset{1}{G} + C_2 \psi \otimes \psi,$$

где $C, C_2 = \text{const}$, а ψ – ковариантно постоянное изотропное ковекторное поле на $(\overset{1}{M}, \overset{1}{G})$.

Учитывая, что помимо поля φ пространство $(\overset{1}{M}, \overset{1}{G})$ допускает еще и сходящееся конциркулярное поле, его размерность должна быть не менее 4, так как в противном случае оно было бы плоским. С другой стороны, $\dim \overset{0}{M} = m - 1$. Поэтому суммарно это не повлияет на оценку l в разложении (11) для G . Таким образом, и в этом случае мы опять приходим к формулам (6), (7).

Непосредственно из доказанной теоремы в случае, когда $m = 0$, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Римановы пространства $(n > 2)$, не допускающие конциркулярных ковекторных полей, имеют степень геодезической подвижности, не превышающую $[(n + 1)/3]$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Покажем, что существуют римановы пространства, для которых достигаются степени геодезической подвижности, указанные в (6), т.е. что границы лагун, определенные этой теоремой, являются точными. Действительно, рассмотрим $\hat{n}$ -мерное риманово пространство Широкова $(\widehat{M}, \widehat{g})$, метрическая форма которого в некоторой системе координат на $\widehat{M}$ приводится к виду

$$d\widehat{s}^2 = \exp(2x^1)((dx^1)^2 + \widetilde{g}_{i_2 j_2}(x^{k_2})dx^{i_2}dx^{j_2}), \quad (13)$$

где $\widetilde{g}_{i_2 j_2}(x^{k_2})$ – метрический тензор некоторого $(\hat{n} - 1)$ -мерного симметрического риманового пространства $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$; индексы i_2, j_2, k_2 изменяются от 2 до $\hat{n}$. Очевидно, что $(\widehat{M}, \widehat{g})$ может допускать абсолютно параллельные квадратичные формы только лишь вида $b = \text{const } g$. Действительно, в противном случае на основании леммы 1 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ допускало бы квадратичную форму, являющуюся решением системы (1) (т.е. допускало бы НГО), и мы пришли бы к противоречию, ведь, как известно [2], симметрические пространства не допускают НГО. Таким образом, если в соотношении (11) в качестве $\overset{\alpha}{g}$ выбрать метрики вида (13), то степень геодезической подвижности (M, g) будет равна $p = m(m + 1)/2 + l$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche // *Annali Mat.* 1896. V. 60. № 2. P. 255–300.
- [2] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.
- [3] Солодовников А. С. Пространства с общими геодезическим // *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.* 1961. № XI. С. 43–102.
- [4] Микеш Й. Геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств // *Итоги науки и техн. ВИНТИ. Тематические обзоры. Геометрия-2*, 1994.
- [5] Шандра И. Г. Пространства $V(K)$ и Йордановы алгебры // *Тр. геом. семинара, посвященного памяти Лобачевского.* Т. 1. Казань: КГУ, 1992. С. 99–104.
- [6] Шандра И. Г. Геодезические отображения эквидистантных пространств и Йордановых алгебр пространства $V(K)$ // *Дифференциальная геометрия многообразий фигур.* № 24. Калининград: Калинингр. ун-т, 1993. С. 104–111.
- [7] Fialkow A. Conformal geodesics // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1939. V. 45. P. 443–473.
- [8] Широков П. А. О сходящихся направлениях в римановых пространствах // *Изв. физ.-матем. общества* (3). Т. 7. Казань, 1934–1935. С. 77–88.
- [9] Кручкович Г. И., Солодовников А. С. Постоянные симметрические тензоры римановых пространств // *Изв. вузов. Матем.* 1959. № 3. С. 147–158.
- [10] Микеш Й. Об эквидистантных келеровых пространствах // *Матем. заметки.* 1985. Т. 38. № 4. С. 627–633.
- [11] Аминова А. В. Группы преобразований римановых пространств // *Итоги науки и техн. ВИНТИ. Проблемы геометрии.* 1990. Т. 22. С. 97–165.

Финансовая академия при правительстве Российской Федерации
E-mail: shandra@orc.ru

Поступило
29.11.1999