Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Юдович, О неограниченном росте вихря и циркуляции скорости течений стратифицированной и однородной жидкости, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 627–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm983>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:44:37

УДК 532.5+536.25

О НЕОГРАНИЧЕННОМ РОСТЕ ВИХРЯ И ЦИРКУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ И ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Юдович

Рассмотрена система Обербека–Буссинеска без диссипации (идеальная конвекция) в горизонтальном слое или в “бочке” с плоскими дном и крышкой. Показано, что циркуляция скорости по жидкому контуру, состоящему из двух жидких кривых на дне и на крышке, соединенных парой изотермических жидких кривых, может быть вычислена явно и является линейной функцией времени. На стратифицированную жидкость распространен результат Серра о линейном росте азимутальной компоненты вихря вращательно симметричного течения идеальной жидкости между соосными цилиндрами. Доказано, что все плоские и осесимметричные изотермические течения в слое или в бочке неустойчивы относительно неадиабатических возмущений, а в случае однородной жидкости все осесимметричные течения между соосными цилиндрами неустойчивы по Ляпунову относительно возмущения азимутальной компоненты скорости в метрике, включающей максимум модуля вихря.

Библиография: 7 названий.

Данная статья примыкает к работе [1] (печатается в журнале *Chaos*).

Установлено, что при определенных условиях циркуляция скорости течения идеальной стратифицированной по температуре жидкости (уравнения Обербека–Буссинеска без вязкости и теплопроводности) может неограниченно (линейно) расти со временем. Это достигается непосредственным вычислением циркуляции для специально выбранных контуров в случае течений в горизонтальном слое или в “бочке” с плоскими дном и крышкой и ребром на их стыках с боковой поверхностью. Для плоских и осесимметричных течений из роста циркуляции следует неограниченный рост вихря.

На стратифицированную жидкость распространен результат Серра [2] о линейном росте азимутальной компоненты вихря вращательно симметричного течения идеальной жидкости между соосными цилиндрами.

Конечно, действие вязкости и теплопроводности должно подавить неограниченный рост, хотя это “физически очевидное” утверждение удастся доказать лишь для двумерных течений, а в трехмерном случае известны лишь оценки вихря в интегральных нормах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99–01-01023.

Знание условий роста вихря помогает доказывать неустойчивость течений самым прямым методом – предъявляя растущие возмущения. Так получается, что все плоские и осесимметричные изотермические течения в слое или в бочке неустойчивы относительно неизотермических возмущений, а в случае однородной жидкости все осесимметричные течения между соосными цилиндрами неустойчивы относительно возмущения азимутальной компоненты скорости. Имеется в виду неустойчивость по Ляпунову в метрике, включающей максимум модуля вихря. Напомним, что выбор метрики играет решающую роль в вопросах устойчивости течений идеальной жидкости и иных сред без диссипации (см. [1], [3]).

Мы имеем здесь дело с уравнениями, для которых проблема глобальной разрешимости начально-краевых задач принципиально трудна и долгое время остается нерешенной. Несмотря на то, что вслед за Арнольдом [4] Должанский и Вишик [5] построили красивую аналитико-динамическую модель идеальной конвекции (бесконечномерное твердое тело в потенциальном поле сил), глобальную разрешимость не удается доказать даже для двумерных течений. Другая простейшая задача среди нерешенных относится к вращательно симметричным изотермическим течениям. В такой ситуации нам приходится, считая все задаваемые функции и поверхности C^∞ -гладкими, предполагать глобальное существование достаточно гладких решений. Единственность в этом случае очевидна. Замечу, что на заключения о неустойчивости сделанные предположения не влияют – ведь случай появления сингулярности относится к неустойчивости.

Проблема возможности появления сингулярности (коллапса, взрыва) в течениях несжимаемой идеальной или вязкой жидкости в конечный момент времени – возможно, самая волнующая в математической гидродинамике. Результаты работ [1]–[3], а также и данной статьи говорят о том, что возникновение сингулярности, выражающееся в потере гладкости поля скорости за бесконечное время (“медленный взрыв”), вполне возможно.

1. Течения стратифицированной жидкости с растущей циркуляцией. Рассматривается идеальная конвекция жидкости в слое между твердыми горизонтальными стенками $z = z_0$ и $z = z_1$ ($x_1, x_2, x_3 = z$ – декартовы координаты). При отсутствии вязкости и теплопроводности уравнения Обербека–Буссинеска имеют вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \theta \mathbf{k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{k}$ – единичный вектор оси z , направленный вверх, $\mathbf{v}$ – поле скорости, p и θ – давление и температура, отсчитываемые от некоторых равновесных значений. Скорость $\mathbf{v}$ должна удовлетворять краевому условию: $v_3 = 0$ при $z = z_0, z_1$.

Пусть γ_t – гладкий жидкий контур, начальный контур γ_0 задается параметрически: $a = a(\sigma)$, где параметр σ есть “метка” частицы. Если $X = X(a, t)$ – движение произвольной жидкой частицы, определяемое как решение задачи Коши: $\dot{X} = \mathbf{v}(X, t)$, $X(a, 0) = a$, то уравнение контура γ_t есть $x = x(\sigma, t) = X(a(\sigma), t)$.

Найдем скорость изменения циркуляции. Имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_0} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} d\sigma = \int_{\gamma_0} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} d\sigma + \int_{\gamma_0} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Отсюда следует известная кинематическая формула

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_t} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{x}.$$

Учет динамических уравнений (1) дает равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_t} \theta \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_t} \theta dz. \quad (3)$$

Отсюда видно, что при условии $\theta = \text{const}$ на γ_t (это достаточно потребовать в начальный момент правая часть равна нулю. Таким образом, *циркуляция вдоль жидкого изотермического контура не меняется со временем.*

Рис. 1

Теперь рассмотрим контур γ_t , состоящий из четырех кусков (см. рис. 1). Предположим, что жидкие кривые γ_t^1 и γ_t^3 изотермичны, причем $\theta = \theta_1$ на γ_t^1 и $\theta = \theta_3$ на γ_t^3 . Поскольку $dz = 0$ на γ_t^2 и γ_t^4 , равенство (3) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_t^1} \theta dz + \int_{\gamma_t^3} \theta dz. \quad (4)$$

Интегралы вычисляются, и мы приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = (\theta_1 - \theta_3)h, \quad (5)$$

где $h = z_1 - z_0$ — толщина слоя. Итак, *при $\theta_1 \neq \theta_3$ циркуляция скорости линейно растет со временем:*

$$\int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_0} \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{x}_0 + t(\theta_1 - \theta_3)h, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}|_{t=0}. \quad (6)$$

Интересно получить асимптотическую форму равенств (5), (6), когда контур γ_t стягивается к кривой γ_t^1 (и $\theta_3 \rightarrow \theta_1$). Пусть S_t – некоторая кусочно-гладкая жидкая поверхность, натянутая на контур γ_t . По теореме Стокса циркуляция поля $\mathbf{v}$ вдоль γ_t равна потоку вихря через S_t :

$$\int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_t} (\text{rot } \mathbf{v})_n dS. \quad (7)$$

Предположим, что контур γ_t^1 регулярен, так что всюду на нем $\nabla\theta \neq 0$. Тогда локально определена поверхность уровня $\theta = \theta_1$, на которой лежит контур γ_t^1 . Контур γ_t^3 тоже регулярен, когда он расположен достаточно близко к γ_t^1 . Заметим, что регулярность жидкого контура сохраняется, если она имеет место в начальный момент. Действительно, дифференцирование уравнения (2) дает для функций $\partial\theta/\partial x_i$ на движении жидкой частицы систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial\theta}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

а ее решение не может обращаться в нуль ни в какой момент t , если оно отлично от нуля в начальный момент.

Пусть s – длина дуги на γ_t^1 , а $s \mapsto \ell(s) = \ell$ – поле единичных векторов на γ_t^1 , касательных к S_t и нормальных к γ_t^1 . Тогда $\theta_3 = \theta_1 + \nabla\theta \cdot \ell d\ell$ с точностью до малых высшего порядка относительно $d\ell$ – “расстояния” между кривыми γ_t^1 и γ_t^3 в направлении ℓ ($d\ell > 0$ при $\theta_3 > \theta_1$ и $d\ell < 0$, если $\theta_3 < \theta_1$). Для $d\ell$ получается выражение

$$d\ell = \frac{\theta_3 - \theta_1}{|\nabla_0\theta^0|},$$

где θ^0 – сужение функции θ на S_t , а ∇_0 – градиент вдоль поверхности S_t .

Далее, для бесконечно малых $\theta_3 - \theta_1$ можно написать

$$dS = ds d\ell = \frac{ds}{|\nabla_0\theta^0|} (\theta_3 - \theta_1). \quad (8)$$

Остается заметить, что $(\text{rot } \mathbf{v})_n$ стремится к компоненте вихря вдоль нормали к γ_t^1 , лежащей на поверхности уровня $\theta = \theta_1$. Таким образом, в пределе имеем

$$(\text{rot } \mathbf{v})_n = \frac{\text{rot } \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\tau} \wedge \nabla\theta)}{|\nabla\theta|}. \quad (9)$$

С использованием (7)–(9) из (5) получаем равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t^1} \frac{\nabla\theta \wedge \text{rot } \mathbf{v}}{|\nabla\theta|^2} \cdot d\mathbf{x} = h, \quad d\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau} ds. \quad (10)$$

Мы заменили $|\nabla_0\theta^0|$ на $|\nabla\theta|$, так как компонента вектора $\nabla\theta$ вдоль поверхности $\theta = \theta_1$ равна нулю. Итак, интеграл в (10) по всякой изотермической и регулярной ($\nabla\theta \neq 0$) кривой, соединяющей плоскости $z = z_0$ и $z = z_1$, линейно растет со временем.

Не обязательно рассматривать бесконечный слой – предыдущие выводы сохраняют силу и в тех случаях, когда жидкость находится в цилиндре (с произвольным сечением) или даже в “бочке” – области, ограниченной двумя плоскими площадками: Σ_0 на плоскости $z = z_0$, Σ_1 на плоскости $z = z_1$, – и гладкой боковой поверхностью. Существенно, что на стыках боковой поверхности и граничных кривых $\partial\Sigma_0$ и $\partial\Sigma_1$ гладкость границы области течения теряется, образуются ребра. Это условие гарантирует невозможность ухода жидких частиц с дна Σ_0 и с крышки Σ_1 по теореме единственности для гладкого поля скорости $\mathbf{v}(x, t)$ (жидкие частицы на ребрах границы должны покоиться). В итоге жидкий контур γ_t вечно сохраняет нужные нам свойства.

В общем трехмерном случае пока нет ответа на интригующий вопрос, что является причиной роста циркуляции или криволинейного интеграла (10). Таковыми могли бы быть рост вихря или рост длины контура γ_t . Последняя возможность особенно пикантна в случае, когда контур γ_t остается в ограниченной области пространства (скажем, для течений в бочках). Что происходит – контур сильно извивается в области течения или сильно морщится? Неизвестно также, может ли $|\nabla\theta|$ затухать при $t \rightarrow \infty$ для жидкой частицы, что могло бы привести к росту интеграла (10). Хотя и трудно, но сейчас уже возможно ответить на эти вопросы прямыми вычислениями. Рискну предположить, что все перечисленные возможности могут реализоваться в различных течениях или даже для различных контуров в одном и том же течении. Кажется вероятным, что может встретиться и более быстрый рост циркуляции, чем линейный.

В плоском случае ситуация проще. Считая теперь, что вертикально вверх направлена ось x_2 , имеем равенство

$$\int_{\gamma_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \omega \, dx_1 \, dx_2, \quad (11)$$

где $\omega = \omega_3(x_1, x_2, t)$ – единственная ненулевая компонента вихря, а Ω_t – площадка, ограниченная контуром $\gamma_t = \partial\Omega_t$. Площадь $|\Omega_t|$ жидкой области Ω_t не меняется со временем: $|\Omega_t| = |\Omega_0|$, и интеграл (11) по модулю не превосходит $\|\omega(\cdot, t)\|_{L_\infty(\Omega_t)} \cdot |\Omega_0|$. Поэтому из (4) следует, что *существование в начальный момент невырожденной линии уровня $\theta = \theta_1$ (на ней всюду $|\nabla\theta| \neq 0$) влечет неограниченный рост максимума модуля вихря по области течения*. Этот вывод, конечно, распространяется и на осесимметричные (с нулевой азимутальной компонентой) течения. Хотя и природа не изобилует причинами, может быть росту циркуляции способствует неограниченный рост длины жидкого контура.

Согласно результатам Арнольда [4] существует много устойчивых плоских и осесимметричных изотермических течений жидкости. Однако, *всякое плоское или осесимметричное (ось вертикальна) изотермическое ($\theta = \text{const}$ всюду и всегда) стационарное решение системы (1), (2) в горизонтальном слое неустойчиво относительно неизотермических возмущений в метрике, включающей $\|\text{rot } \mathbf{v}\|_{L_\infty}$* . Для доказательства достаточно в начальный момент $t = 0$ организовать возмущение температуры, допускающее существование такого контура, как на рис. 1. Это возмущение можно взять C^∞ -гладким, сколь угодно малым в метрике C^k (k любое) и локальным – с носителем в малой окрестности какой-нибудь вертикальной прямой. Например, достаточно положить $\theta(x) = x_1\chi(x)$, где χ – соответствующая срезающая функция.

2. Рост азимутальной компоненты вихря во вращательно симметричных течениях. Теперь рассмотрим вращательно симметричные решения системы (1), (2).

Для компонент скорости u, v, w в цилиндрических координатах r, φ, z (ось z направлена вертикально вверх), температуры θ и давления p в случае, когда все эти функции не зависят от φ , имеем систему

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} = -p_r, \quad \frac{dw}{dt} = -p_z + \theta, \quad u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad q = rv, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\partial_r + w\partial_z. \quad (13)$$

Будем считать, что жидкость располагается в зазоре между цилиндрами $r = r_1$ и $r = r_2 > r_1$. Из дальнейшего будет видно, что результаты без изменения переносятся и на кольцевой цилиндр конечной длины (“шайбу”) или даже на аналогичные области с кривыми дном и крышкой, которые однако должны быть вращательно симметричными гладкими поверхностями, трансверсальными к цилиндрам.

Обозначая через $\omega^r, \omega^\varphi, \omega^z$ цилиндрические компоненты вихря $\text{rot } \mathbf{v}$, запишем уравнения Гельмгольца в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\omega^r}{dt} &= \omega^r u_r + \omega^z u_z, \\ \frac{d\omega^\varphi}{dt} &= \frac{2v v_z}{r} + \frac{\omega^\varphi u}{r} - \theta_r, \\ \frac{d\omega^z}{dt} &= \omega^r w_r + \omega^z w_z. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом $\omega^r = -v_z = -q_z/r$, $\omega^\varphi = u_z - w_r$, $\omega^z = v_r + v/r = q_r/r$. Второе уравнение системы (14) для ω^φ можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega^\varphi}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{q^2}{r^4} - \frac{1}{r} \theta_r. \quad (15)$$

Предположим, что существует пара жидких поверхностей вращения S_t^1 и S_t^2 , которые трансверсально пересекают оба цилиндра при всех t , являются поверхностями уровня функции $q = rv$ (удельного момента количества движения), так что $q = q_1$ на S_t^1 и $q = q_2$ на S_t^2 , и вместе с цилиндрами ограничивают жидкую область D_t (см. рис. 2). Достаточно задать такие поверхности S_0^1 и S_0^2 при $t = 0$. Тогда, поскольку величина q сохраняется для каждой жидкой частицы, жидкие поверхности S_t^1 и S_t^2 определяются для любого t – в предположении, что гладкое решение системы (12), (13) существует. В силу единственности решения задачи Коши для уравнений движения жидких частиц

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u, & r\dot{\varphi} &= v, & \dot{z} &= w, \\ r|_{t=0} &= r_0, & \varphi|_{t=0} &= \varphi_0, & z|_{t=0} &= z_0, \end{aligned}$$

поверхности S_t^1 и S_t^2 не могут пересекаться и на них не могут образовываться самопересечения. Из рассмотрения линейной системы для производных q_r, q_z вдоль движения жидкой частицы нетрудно вывести, что поверхности S_t^1 и S_t^2 вечно остаются регулярными ($\nabla q \neq 0$ на них всюду), если они таковы в начальный момент.

Рис. 2

Применяя формулу дифференцирования интеграла по области, зависящей от времени, с учетом несжимаемости жидкости получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \frac{\omega^\varphi}{r} dx = \int_{D_t} \frac{d}{dt} \frac{\omega^\varphi}{r} dx, \quad dx = r dr d\varphi dz.$$

Используя уравнение (14) и интегрируя по частям, выводим

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \frac{\omega^\varphi}{r} dx = \int_{\partial D_t} \frac{q^2}{r^4} n_z dS - 2\pi \int_{z_2^-}^{z_2^+} \theta(r_2, z, t) dz + 2\pi \int_{z_1^-}^{z_1^+} \theta(r_1, z, t) dz. \quad (16)$$

Здесь z_1^+, z_2^+ – аппликаты верхних, а z_1^-, z_2^- – нижних концов тех частей контура γ_t , которые лежат на цилиндрах $r = r_1$ и $r = r_2$. Далее, n_z есть z -компонента орта внешней нормали $\mathbf{n}$. Поскольку на цилиндрах $n_z = 0$, интеграл по ∂D_t сводится к сумме интегралов по S_t^1 и S_t^2 .

Пусть γ_t^1, γ_t^2 и Ω_t – меридиональные сечения соответственно поверхностей S_t^1, S_t^2 и области D_t (см. рис. 2). После интегрирования по углу φ равенство (16) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \omega^\varphi dr dz = q_1^2 \int_{\gamma_t^1} \frac{n_z}{r^3} ds + q_2^2 \int_{\gamma_t^2} \frac{n_z}{r^3} ds - \int_{z_2^-}^{z_2^+} \theta(r_2, z, t) dz + \int_{z_1^-}^{z_1^+} \theta(r_1, z, t) dz. \quad (17)$$

Интегралы по γ_t^1 и γ_t^2 вычисляются явно. Если ориентированная кривая γ_t^1 задана натуральными уравнениями $r = r_0(s), z = z_0(s)$ (s – длина дуги), то касательный орт $\boldsymbol{\tau}$

и орт $\mathbf{n}$ внешней к Ω_t нормали суть $\boldsymbol{\tau} = (r'_0(s), z'_0(s))$ и $\mathbf{n} = (-z'_0(s), r'_0(s))$. Таким образом, $n_z = r'_0(s)$ и выполняется соотношение

$$\int_{\gamma_t^1} \frac{n_z}{r^3} ds = \int_{\gamma_t^1} \frac{r'_0(s)}{r_0^3(s)} ds = \int_{\gamma_t^1} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right).$$

Интеграл по γ_t^2 вычисляется аналогично. В результате из (17) получаем равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \omega^\varphi dr dz = \frac{1}{2} (q_1^2 - q_2^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - \int_{z_2^-}^{z_2^+} \theta(r_2, z, t) dz + \int_{z_1^-}^{z_1^+} \theta(r_1, z, t) dz. \quad (18)$$

Эта красивая выкладка в изотермическом случае была проведена Серром [2]. Рассуждая, как при выводе формулы (10), приходим к следующей формуле, получаемой в результате стягивания сечения Ω_t к кривой γ_t^1 :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{\omega^\varphi}{|\nabla q|} ds = q_1 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - \frac{\theta(r_2, z_2^+(t), t)}{q_z(r_2, z_2^+(t), t)} + \frac{\theta(r_1, z_1^+(t), t)}{q_z(r_1, z_1^+(t), t)}. \quad (19)$$

Что касается знаменателей в последних членах равенства (19), достаточно потребовать, чтобы они были отличны от нуля в начальный момент. Действительно, $u = 0$ при $r = r_1, r_2$. Поэтому θ_z удовлетворяет на цилиндрах уравнению

$$\frac{d\theta_z}{dt} = -w_r \theta_z,$$

из которого следует, что для каждой частицы θ_z не меняет знака и не может от ненулевого значения прийти к нулевому.

При постоянном θ и $|q_1| \neq |q_2|$ получается, что $\int_{\Omega_t} \omega^\varphi dr dz$ есть линейная функция времени, откуда следует, что $\max |\omega^\varphi/r|$ по Ω_t линейно растет при $t \rightarrow \pm\infty$ [2]. Формула (18) указывает на второй механизм роста ω^φ , связанный со стратификацией. Он работает, когда температура θ на каждом из цилиндров сохраняет знак, причем знаки при $r = r_1$ и $r = r_2$ противоположны; достаточно этого потребовать от начальной температуры θ^0 .

Два указанных механизма могут конкурировать или работать кооперативно. В случае конкуренции результат неясен – впрочем, конечно, вывод о линейном росте сохраняется, когда температура θ при $r = r_1, r_2$ достаточно мала (в начальный момент, а тогда и вечно).

Когда действия вращения и стратификации направлены в одну сторону, рост величины $\max_{\Omega_t} |\omega^\varphi/r|$ остается не менее чем линейным. Пусть, например, $q_1^2 > q_2^2$ и для начальной температуры при любом z выполняются неравенства

$$\theta(r_1, z, 0) \geq 0, \quad \theta(r_2, z, 0) \leq 0.$$

Тогда из (18) следует оценка снизу ($\omega_0^\varphi = \omega^\varphi|_{t=0}$)

$$\int_{\Omega_t} \omega^\varphi dr dz \geq \int_{\Omega_t} \omega_0^\varphi dr dz + \frac{1}{2} t (q_1^2 - q_2^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right). \quad (20)$$

Ввиду несжимаемости жидкости

$$\int_{\Omega_t} r \, dr \, dz = \frac{|D_t|}{2\pi}$$

не зависит от t , так что из (20) следует, что

$$\max_{\Omega_t} \left| \frac{\omega^\varphi}{r} \right| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty$$

(аналогично устанавливается, что то же верно и для $t \rightarrow -\infty$).

3. Потеря гладкости вращательно симметричных течений и неустойчивость осесимметричных течений. Сейчас речь пойдет об изотермических вращательно симметричных течениях – в (12), (13) $\theta \equiv 0$. Сначала мы опишем класс течений, для которых растут со временем компоненты вихря ω^r, ω^z (а ω^φ не растет). Из уравнений (12), (13) следует равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{q_r q_z}{r} = -\frac{w_r}{r} q_z^2 - \frac{u_z}{r} q_r^2. \quad (21)$$

Если жидкая частица движется вдоль твердой поверхности $z = z_0$, то на всей ее траектории $w = 0$, $w_r = 0$, $\omega^\varphi = u_z$. Тогда (21) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{q_r q_z}{r} = -\frac{\omega^\varphi}{r} q_r^2. \quad (22)$$

Предположим еще, что для данной частицы не только θ , но и $q = 0$. Тогда согласно (15)

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega^\varphi}{r} = 0. \quad (23)$$

Из (22), (23) нетрудно вывести (см. [1, лемма 5.1]), что если для данной частицы выполнено $\omega^\varphi q_r q_z < 0$, то $q_r^2 + q_z^2 \rightarrow \infty$ или, что все равно, $(\omega^r)^2 + (\omega^z)^2 \rightarrow \infty$ с вероятностью 1. Это означает, что

$$\frac{1}{T} \text{mes}\{t : 0 \leq t \leq T, q_r^2 + q_z^2 > N^2\} \rightarrow 1$$

каково бы ни было N .

Если же частица движется вдоль непроницаемого цилиндра $r = r_0$, то на ее траектории $u = 0$, $u_z = 0$, $\omega^\varphi = -w_r$,

$$\frac{d}{dt} \frac{q_r q_z}{r} = \frac{\omega^\varphi}{r} q_z^2.$$

Снова предполагая, что на этой траектории $q = 0$, можно заключить, что $q_r^2 + q_z^2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью 1, если в начальный момент для данной жидкой частицы $\omega^\varphi q_r q_z > 0$. Повторяя рассуждения из § 5 работы [1], можно прийти к выводу, что *все стационарные вращательно симметричные движения, обладающие хотя бы одной траекторией, лежащей на твердой плоскости $z = z_0$ или на твердом цилиндре $r = r_0$, причем на этой траектории $q = 0$, неустойчивы в метрике вихря.*

Существование стационарных течений с линией тока, обладающей требуемыми свойствами, нетрудно установить, пользуясь общим представлением стационарного вращательно симметричного течения [6], [7].

Плоские стационарные движения неустойчивы относительно трехмерных возмущений в метрике вихря [1]. Можно предположить, что стационарные осесимметричные течения неустойчивы относительно вращательно симметричных возмущений. В общем случае это не доказано. Однако, *произвольное (даже не обязательно стационарное) осесимметричное течение между соосными цилиндрами неустойчиво относительно малых вращательно симметричных возмущений в метрике вихря* ($\max |\operatorname{rot} \mathbf{v}(\cdot, t)| + \text{мл. норма}$). Для доказательства достаточно в начальный момент, не трогая компоненты u и w , задать компоненту v так, чтобы существовал такой контур, как на рис. 2. При этом v можно выбрать C^∞ -гладким, сколь угодно малым в метрике C^k и с носителем в малой окрестности какого-нибудь отрезка $z = z_0$. Неустойчивость сразу следует из (17). Можно предположить, что всякое осесимметричное течение неустойчиво относительно вращательно симметричных возмущений [1]. Общий результат неизвестен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Юдович В. И. О порче гладкости решений уравнений Эйлера и неустойчивости, присущей течениям идеальной жидкости // Деп. ВИНТИ 22.07.98, № 2331–В98. М.: ВИНТИ, 1998.
- [2] Serre D. La croissance de la vorticit dans les coulements parfaits incompressibles // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris Sr. I. 1999. V. 328. P. 549–552.
- [3] Юдович В. И. О потере гладкости решений уравнений Эйлера со временем // Сб. “Динамика сплошной среды”. Вып. 16. Новосибирск, 1974. С. 71–78.
- [4] Arnold V. I. Sur la gometrie diffrentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications l’hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier. 1966. V. 16. № 1. P. 316–361.
- [5] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.
- [6] Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Ленинград: Госэнергоиздат, 1958.
- [7] Meissel E. ber den Ausfluss des Wassers aus Gefssen in zwei besonderen Fllen nach Eintritt des Beharrungszustandes // Archiv der Mathematik und Physik. 1873. V. 55.

Ростовский государственный университет
E-mail: yudovich@math.rsu.ru

Поступило
12.01.2000