Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, К проблеме Хопфа, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm984>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:38:46

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ПРОБЛЕМЕ ХОПФА

Ю. А. Аминов

Предположение Хопфа состоит в том, что на произведении двух двумерных сфер $S^2 \times S^2$ не существует метрики строго положительной кривизны.

Заметим, что имеет место теорема Прайсмана, из которой следует, что на топологическом произведении двух компактных многообразий $M \times N$ не может существовать метрика строго отрицательной кривизны.

Исследованием проблемы Хопфа занимались Бергер, Бургиньон, Дешамп, Сантанак и другие [1]–[7]. Были получены интересные результаты, но полного решения проблемы пока нет.

Сформулируем некоторые из полученных результатов. Бергер показал, что если секционная кривизна K_σ метрики на многообразии $S^2 \times S^2$ заключена в пределах $\delta \leq K_\sigma \leq 1$, то $\delta < 4/17$. Приведем результат Берегера из работы [1]. Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) – два римановых многообразия и пусть $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ – их риманово произведение. Пусть $g(t)$ – семейство метрик, зависящее от одного параметра t на $M_1 \times M_2$ такое, что $g(0) = g_1 \times g_2$ и для всех точек $t \in M_1 \times M_2$ и всех векторов X_i из касательных пространств $T_m M_i$ производная кривизны

$$\left. \frac{dK(X_1, X_2)}{dt} \right|_{t=0} \geq 0.$$

Тогда

$$\left. \frac{dK(X_1, X_2)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Основной результат работы [2] состоит в следующем. Пусть (M, g_0) – многообразие, являющееся римановым произведением. Пусть на нем не существуют инфинитезимальные изометрии. Тогда не существует никакой аналитической вариации $g(t)$, исходящей из g_0 и такой, что для $\varepsilon > 0$ и всех $t \in (0, \varepsilon]$ $g(t)$ – метрика положительной кривизны.

В работе [3] установлен следующий интересный результат. Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) – два компактных римановых многообразия. Если многообразии (M_1, g_1) однородное и $\dim M_2 \geq 2$, то существует вариация метрики $g_1 \times g_2$ такая, что для каждой смешанной 2-плоскости секционная кривизна возрастает в окрестности $t = 0$. Заметим, что смешанная плоскость определяется вектором X_1 , касающимся M_1 , и вектором X_2 , касающимся M_2 . Но существуют плоскости, не являющиеся смешанными. Поэтому эта теорема не решает проблему Хопфа.

В этой работе мы докажем две теоремы, которые утверждают существование точек и площадок с нулевой кривизной.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ds_i^2 и α_i , $i = 1, 2$, – регулярные метрики и регулярные функции класса C^2 на сферах S_i^2 . Пусть $ds^2 = A^2 ds_1^2 + B^2 ds_2^2$ – метрика на топологическом произведении $M = S^2 \times S^2$, где $A = A(\alpha_1, \alpha_2)$ и $B = B(\alpha_1, \alpha_2)$ – положительные регулярные функции в прямоугольнике D плоскости α_1, α_2 . Пусть одна из производных $\partial A / \partial \alpha_2$

или $\partial B/\partial \alpha_1$ не меняет знак в прямоугольнике D . Тогда существует точка $x \in M$ и площадка $\pi \in T_x M$ такие, что $K_x(\pi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можем предположить, что не меняет знак в прямоугольнике D производная $\partial A/\partial \alpha_2$. Пусть для определенности $\partial A/\partial \alpha_2 \geq 0$. Сначала допустим, что не меняет знак и производная $\partial B/\partial \alpha_1$. Положим для упрощения записи $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$. Стороны прямоугольника D соответствуют точкам на S_i^2 , в которых хотя бы одна из функций α или β имеет экстремальное значение. На S_i^2 введем координаты, в которых метрики ds_i^2 записываются в виде

$$ds_1^2 = g_{11} du_1^2 + g_{22} du_2^2, \quad ds_2^2 = g_{33} du_3^2 + g_{44} du_4^2,$$

причем $g_{11} = g_{33} = 1$, $g_{22} = a^2(u_1, u_2)$, $g_{44} = b^2(u_3, u_4)$. Мы можем предполагать, что в рассматриваемых далее точках экстремума функций α и β имеет место условие $a \neq 0$, $b \neq 0$. Положим

$$H_i^2 = A^2 g_{ii}, \quad i = 1, 2, \quad H_j^2 = B^2 g_{jj}, \quad j = 3, 4.$$

Рассмотрим компоненту тензора Римана R_{1313} в ортогональных координатах

$$R_{1313} = -H_1 H_3 \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial H_3}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{1}{H_3} \left(\frac{\partial H_1}{\partial u_3} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial u_2} \frac{\partial H_3}{\partial u_2} + \frac{1}{H_4^2} \frac{\partial H_1}{\partial u_4} \frac{\partial H_3}{\partial u_4} \right].$$

Используем зависимость A и B от α и β . Получим

$$R_{1313} = -H_1 H_3 [(B_\alpha \alpha \alpha_{u_1}^2 + B_\alpha \alpha_{u_1 u_1}) A^{-1} - A_\alpha B_\alpha \alpha_{u_1}^2 A^{-2} + (A_\beta \beta \beta_{u_3}^2 + A_\beta \beta_{u_3 u_3}) B^{-1} - A_\beta B_\beta \beta_{u_3}^2 B^{-2} + A_\alpha B_\alpha \alpha_{u_2}^2 (Aa)^{-2} + A_\beta B_\beta \beta_{u_4}^2 (Bb)^{-2}].$$

Пусть для определенности $B_\alpha \geq 0$. Пусть $p_0 = (u_1^0, u_2^0)$ – точка минимума функции α на S_1^2 и $q_0 = (u_3^0, u_4^0)$ – точка минимума функции β на S_2^2 . Тогда в точке $x_0 = (p_0, q_0) \in M$ имеем

$$R_{1313} = -H_1 H_3 (B_\alpha \alpha_{u_1 u_1} A^{-1} + A_\beta \beta_{u_3 u_3} B^{-1}) \leq 0.$$

Следовательно, в точке x_0 смешанная кривизна $K_{13} \leq 0$, т.е. в этом случае утверждение теоремы справедливо.

Пусть теперь функция B_α меняет знак в D . Обозначим через q_0 точку минимума функции β на S_2^2 . В точках (p, q_0) получим

$$R_{1313} = -H_1 H_3 [(B_\alpha \alpha \alpha_{u_1}^2 + B_\alpha \alpha_{u_1 u_1}) A^{-1} - A_\alpha B_\alpha \alpha_{u_1}^2 A^{-2} + A_\beta \beta_{u_3 u_3} B^{-1} + A_\alpha B_\alpha \alpha_{u_2}^2 (Aa)^{-2}].$$

Если в точке $(\max \alpha, \min \beta)$ имеем $B_\alpha \leq 0$, то в соответствующей точке на M имеем $R_{1313} \leq 0$. Поэтому в вершине $(\max \alpha, \min \beta)$ прямоугольника D должно выполняться условие $B_\alpha > 0$. Если в вершине $(\min \alpha, \min \beta)$ прямоугольника D имеем $B_\alpha \geq 0$, то в соответствующей точке на M имеем $R_{1313} \leq 0$. Поэтому можем предположить, что в этой точке $B_\alpha < 0$. Рассмотрим функцию $B(\alpha, \min \beta)$. Из условий на значения функции B_α в концах нижней стороны прямоугольника D следует, что существует точка $(\bar{\alpha}, \min \beta)$, в которой $B_\alpha = 0$, $B_{\alpha\alpha} \geq 0$. В соответствующей точке M имеем

$$R_{1313} = -H_1 H_3 (B_\alpha \alpha \alpha_{u_1}^2 A^{-1} + A_\beta \beta_{u_3 u_3} B^{-1}) \leq 0,$$

что и доказывает теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть α и β – две регулярные функции на топологическом произведении двух сфер $M = S_1^2 \times S_2^2$. Пусть метрика $d\sigma^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ – риманово произведение двух метрик ds_i^2 на S_i^2 и метрика $ds^2 = d\sigma^2 + \alpha^2 d\beta^2$. Тогда существуют точка $x \in M$ и площадка $\pi \in T_x M$ такие, что кривизна метрики ds^2 для этой площадки равна нулю: $K_x(\pi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим связь тензоров Римана метрику $d\sigma^2$ и ds^2 . Пусть R_{ijkl} и $\bar{R}_{ijkl}$ – тензоры Римана метрику $d\sigma^2$ и ds^2 соответственно.

ЛЕММА 1. В критической точке функции β тензоры Римана метрику ds^2 и $d\sigma^2$ связаны соотношением

$$\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + (\beta_{,ik}\beta_{,jl} - \beta_{,il}\beta_{,jk})\alpha^2,$$

где запятая обозначает вторые ковариантные производные в метрике $d\sigma^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g_{ij} и a_{ij} – коэффициенты метрику ds^2 и $d\sigma^2$ соответственно. Тогда $g_{ij} = a_{ij} + \alpha^2\beta_{,i}\beta_{,j}$. Легко найти связь символов Кристоффеля метрику ds^2 и $d\sigma^2$

$$\bar{\Gamma}_{ij,k} = \Gamma_{ij,k} + \alpha(\alpha_j\beta_i\beta_k + \alpha_i\beta_j\beta_k - \alpha_k\beta_i\beta_j) + \alpha^2\beta_{,ij}\beta_k.$$

Пусть P_0 – критическая точка функции β . В окрестности точки P_0 введем координаты такие, что в этой точке символы Кристоффеля метрики $d\sigma^2$ равны нулю. Тогда и $\bar{\Gamma}_{ij,k} = 0$ в этой точке и обычные производные совпадают с ковариантными. С учетом условия на символы Кристоффеля имеем в точке P_0

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijkl} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2(a_{il} + \alpha^2\beta_{,i}\beta_{,l})}{\partial u^j \partial u^k} + \frac{\partial^2(a_{jk} + \alpha^2\beta_{,j}\beta_{,k})}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2(a_{ik} + \alpha^2\beta_{,i}\beta_{,k})}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2(a_{jl} + \alpha^2\beta_{,j}\beta_{,l})}{\partial u^i \partial u^k} \right] \\ &= R_{ijkl} + \alpha^2(\beta_{,ik}\beta_{,lj} - \beta_{,il}\beta_{,kj}). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Пусть $X = \{X^i\}$ и $Y = \{Y^i\}$ – ортогональные, единичные в метрике $d\sigma^2$ векторы в касательном пространстве к $S^2_1 \times S^2_2$ в точке P_0 . Обозначим

$$\nabla_X^2 \beta = \beta_{,ij} X^i X^j, \quad \nabla_{X,Y} = \beta_{,ij} X^i Y^j.$$

В критической точке функции β имеет место равенство $g_{ij} = a_{ij}$. Поэтому нормы векторов X и Y в этих метриках совпадают. Можем записать соотношение кривизн двумерных площадок

$$\bar{K}(X, Y) = K(X, Y) + \alpha^2(\nabla_X^2 \beta \nabla_Y^2 \beta - (\nabla_{X,Y} \beta)^2).$$

ЛЕММА 2. Выражение $\nabla_X^2 \beta \nabla_Y^2 \beta - (\nabla_{X,Y} \beta)^2$ есть инвариант площадки векторов X, Y и функции β , т. е. не зависит от выбора пары векторов X, Y в этой площадке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится поворотом векторов X, Y .

Так как рассматриваемое многообразие не гомеоморфно сфере, то для каждой функции β существует либо вырожденная критическая точка, либо невырожденная критическая точка индекса 2. Пусть P_0 является такой критической точкой. В ее окрестности в некоторых координатах x_i функция β записывается в виде

$$\beta = \beta(P_0) + b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 + \dots,$$

причем относительно постоянных b_i можем считать, что либо $b_1, b_2 > 0$, а $b_3, b_4 < 0$ (невырожденная критическая точка), либо некоторое $b_i = 0$ (вырожденная критическая точка).

Используя метрику $d\sigma^2$, мы уже предполагаем, что многообразие $S^2 \times S^2$ расслоено на два семейства сфер: через каждую точку этого многообразия проходят две сферы из различных семейств. Пусть T_i – касательная площадка этих сфер S^2_i в точке P_0 . Пусть P_i – оператор проектирования на T_i . Направление $\xi = \{\xi^i\}$ в касательном пространстве называется асимптотическим для функции β , если $\nabla_\xi^2 \beta = \beta_{,ij} \xi^i \xi^j = 0$. В обоих случаях – и для невырожденной критической точки, и для вырожденной – существует асимптотическое направление ξ . Пусть $X = P_1 \xi$,

$Y = P_2\xi$. Пусть оба вектора X, Y ненулевые. Так как они определяют смешанную площадку, то $K(X, Y) = 0$. Пусть η – единичный вектор в этой площадке, ортогональный ξ . Тогда

$$\overline{K}(X, Y) = -\alpha^2(\nabla_{\xi, \eta}\beta)^2 \leq 0,$$

что и доказывает теорему при X и Y , отличных от нуля. Если, например, вектор $X = 0$, то асимптотическое направление ξ лежит в плоскости T_2 . В этом случае в качестве вектора η можем взять любой вектор из плоскости T_1 . Тогда опять получим

$$\overline{K}(\xi, \eta) = -\alpha^2(\nabla_{\xi, \eta}\beta)^2 \leq 0.$$

Теорема доказана.

Автор благодарен профессору Д. В. Аносову за указание на последние четыре работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berger M. // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1966. V. 263. P. 76–78.
2. Bourguignon J.-P., Deschamps A., Sentenac P. // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1972. V. 5. P. 277–302.
3. Bourguignon J.-P., Deschamps A., Sentenac P. // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1973. V. 6. P. 1–16.
4. Бургињон Ж.-П. // Четырехмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе 1978/79. М.: Мир, 1985–1986. С. 290–296.
5. Baer C. // Diff. Geom. Appl. 1994. V. 4. № 1. P. 71–75.
6. Hsiang Wu-Yi, Kleiner. B. // J. Diff. Geom. 1989. V. 29. № 3. P. 615–621.
7. Bourguignon J.-P. // Proc. Amer. Math. Soc. Symp. on Pure Math. XXVII. Differential Geometry. (Stanford), 1975. P. 33–37.

Физико-технический институт низких температур НАН Украины

Поступило
04.08.1999