Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Агеев, О спектре декартовых степеней классических автоморфизмов, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 643–647

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:42:20

УДК 517.9

О СПЕКТРЕ ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЕЙ КЛАССИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ

О. Н. Агеев

В статье доказана следующая теорема: для декартовых степеней $T^{(n)}$ преобразования Чекона T функция кратности спектра принимает набор значений $\{n, n(n-1), \dots, n!\}$ в подпространстве $\{\text{const}\}^\perp$ или, эквивалентно, оператор $T^{(n)}$ имеет простой спектр в подпространстве C_{sim} всех симметричных функций относительно группы координатных перестановок. Непосредственным следствием этой теоремы является попарная взаимная сингулярность всех сверток меры максимального спектрального типа преобразования T . При $n = 2$ $T \times T$ имеет однородный двукратный спектр в $\{\text{const}\}^\perp$, т.е. решение задачи Рохлина для преобразования Чекона. Обсуждается справедливость этой теоремы для других классических автоморфизмов.

Библиография: 8 названий.

1. Рассмотрим кусочно-линейные, сохраняющие ориентацию и меру Лебега l преобразования полуинтервала $[0, 1) = I$. Преобразование T и оператор в $L_2(l)$: $Tf(x) = f(Tx)$ часто называют *автоморфизмами* и обозначают одним символом T .

Для автоморфизма T назовем *башней* набор дизъюнктивных полуинтервалов $\{J_i\}_{i=1}^q$, где $|J_i| = |J_j|$ ($i, j = 1, q$) и T линейно отображает J_i на J_{i+1} ($i = 1, q-1$). Множество J_i называется i -м *этажом башни*, q — ее *высотой*, J_q — ее *верхом*.

Будем использовать следующий вариант определения классического преобразования T Чекона. При $n = 1$ имеем башню $C_1 = \{[0, 2/3]\}$. На n -й стадии имеем башню $C_n = \{J_1, \dots, J_{q_n}\}$ и T не определен на $J_{q_n} \cup [1 - 1/3^n, 1)$, где $q_n = (3^n - 1)/2$, $|J_k| = 2/3^n$ и $J_1 \cup \dots \cup J_{q_n} = [0, 1 - 1/3^n)$. Разобьем J_k на полуинтервалы $J_{k,0}, J_{k,1}, J_{k,2}$ равной длины. Тогда подбашни $\{J_{1,i}, J_{2,i}, \dots, J_{q_n,i}\}$ ($i = 0, 1, 2$) получены разрезанием (cutting) C_n . Башня C_{n+1} получена надставкой (stacking) $(i+1)$ -й подбашни наверх i -й, со вставкой 1-го этажа между 1-й и 2-й. Поэтому

$$C_{n+1} = \{J_{1,0}, \dots, J_{q_n,0}, J_{1,1}, \dots, J_{q_n,1}, J', J_{1,2}, \dots, J_{q_n,2}\}$$

и T не определен на $J_{q_n,2} \cup [1 - 1/3^{n+1}, 1)$, где $J' = [1 - 1/3^n, 1 - 1/3^{n+1})$. Следовательно, на этом шаге мы определили T на множестве $J_{q_n,0} \cup J_{q_n,1} \cup J'$.

Выделим работы [1]–[3], изучающие это преобразование и его обобщения. Рассмотрим его спектральные свойства. Пусть T есть унитарный оператор в $L_2(l)$. Мы используем следующие обозначения: символ “ $\rightarrow$ ” для слабой операторной сходимости;

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96135, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01104.

$C_T(f_i : i \in A)$ – наименьшее замкнутое подпространство в $L_2(l)$, содержащее векторы $T_{f_i}^n$, $n \in \mathbb{Z}$; $T^n = T \times \dots \times T$ (n раз); $\sigma_T(f)$ – единственная борелевская мера на $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ с $\widehat{\sigma_T(f)}(n) = (T^n f, f)$; σ_T – мера максимального спектрального типа (т.е. максимальная среди $\sigma_T(f)$); $\nu(\cdot | c)$ – система канонических условных мер для $\sigma_T^n = \sigma_T \times \dots \times \sigma_T$ на слоях $C = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 \dots \lambda_n = c\}$; $\sigma^{(n)}$ – образ меры σ^n при отображении $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_n$; $M(T)$ – множество существенных спектральных кратностей оператора T ; $m(T) = \max\{k : k \in M(T)\}$.

Мы говорим, что T имеет простой спектр, если $m(T) = 1$. Тогда $L_2(l) = C_T(\varphi)$ для некоторого $\varphi(x)$. Обозначим $\varphi_k(x) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)$, $C_{\text{sim}}(n)$ – пространство таких f из $L_2(I^n, l^n)$, которые инвариантны относительно любых перестановок координат; $H^{\{i_1, \dots, i_k\}} C_E(T_{\varphi_0}^{j_1}(x_{i_1}) \dots T_{\varphi_0}^{j_k}(x_{i_k}) : j_m \in \mathbb{Z})$, где E – тождественный оператор, $\varphi_0(x) = \varphi(x) - \int \varphi(x) dl$. Хорошо известно, что для преобразования Чекона T $m(T) = 1$ и $\sigma_T = \sigma_T(\varphi) = \sigma'_T + \delta$, где $\sigma'_T = \sigma_T(\varphi_0)$ непрерывна и $\text{supp } \delta = \{1\}$.

В работе [4] доказано, что $\sigma'^{(n)}_T \perp \sigma'^{(m)}_T$ при $m \neq n$.

ТЕОРЕМА 1. Если T – преобразование Чекона, то для любого n

$$M(T^n) = \{n, n(n-1), \dots, n!\} \quad \text{в} \quad \{\text{const}\}^\perp. \quad (*)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При $n = 2$ имеем конкретный пример преобразования с однородным спектром кратности 2. (Это было впервые установлено в [5] и является решением задачи Рохлина.)

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $m \neq n$, то $\sigma'^{(n)}_T \perp \sigma'^{(m)}_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n > m$. Ясно, что мера максимального спектрального типа оператора $T^{(n)}$ в $H^{\{1, \dots, k\}}$ есть $\sigma'^{(k)}_T$. Из непрерывности σ'_T имеем (см. [5])

$$M(T^{(n)}|_{H^{\{1, \dots, k\}}}) = M(T^{(k)}|_{H^{\{1, \dots, k\}}}) \subseteq k! \mathbb{N}. \quad (1)$$

Если $\sigma'^{(m)}_T \not\perp \sigma'^{(n)}_T$, то существует мера ν , являющаяся их общей компонентой. Поэтому пространства $H^{\{1, \dots, m\}}$ и $H^{\{1, \dots, n\}}$ ортогональны и имеют $m!$ и $n!$ попарно ортогональных подпространств $C_{T^{(n)}}(f_i)$, где $\sigma_{T^{(n)}}(f_i) = \nu$. Следовательно, $m(T^{(n)}) \geq m! + n!$. Это противоречит теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фактически, свойство $(*)$ будет доказано ниже для всех операторов (не обязательно преобразований), удовлетворяющим условиям леммы 1 и $(**)$, где θ_k принимает $n - 1$ различных значений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Свойство $(*)$ для типичного T было установлено в [5], что есть в точности ответ на вопрос Катка [6]. Однако часто проще проверить некоторое свойство для элемента, чем доказать, что он из типичного множества с этим свойством.

ЛЕММА 1. Если унитарный оператор T имеет простой непрерывный спектр в инвариантном подпространстве $\{\text{const}\}^\perp$, то следующие свойства эквивалентны:

- 1) оператор $T^{(n)}$ имеет простой спектр в $C_{\text{sim}}(n)$;
- 2) $M(T^{(n)}) = \{n, n(n-1), \dots, n!\}$ в $\{\text{const}\}^\perp$;
- 3) $\text{supp } \nu_n(\cdot | c)$ состоит из одной точки с точностью до перестановки координат для п.в. с по мере $\sigma_T^{(n)}$;
- 4) $C_{\text{sim}}(n) = C_{T^{(n)}}(\varphi_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно перейти к спектральному представлению оператора $T^{(n)}$. Оператор $T^{j_1} \times T^{j_2} \times \dots \times T^{j_n}$ в $L_2(I^n, l^n)$ спектрально изоморфен оператору $\lambda^{j_1} \dots \lambda^{j_n} \cdot E$ в $L_2(\mathbb{T}^n, \sigma_T^n)$. Функция спектральной кратности оператора $\tilde{T}^{(n)} = \lambda_1 \dots \lambda_n \cdot E$ в точке c равна числу точек в носителе меры $\nu_n(\cdot | c)$. Функции φ_n будет соответствовать 1, функции φ_k ($k < n$) будет соответствовать функция с носителем в множестве $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 1\}$. Аналогичное представление имеет $T^{(n)}$ и в $H^{\{i_1, \dots, i_k\}}$, но вместо σ_T^n будет σ_T^{n-k} .

Ясно, что $C_{T^{(n)}}(\varphi_n) \subseteq C_{\text{sim}}(n)$ и $\sigma_{T^{(n)}}(\varphi_n) = \sigma_T^{(n)}$. Поэтому $1 \iff 4$.

Из 3) следует, что любая симметрическая функция $\varphi_{\text{sim}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ равна функции, постоянной на каждом слое $C = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 \dots \lambda_n = c\}$ для п.в. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ по мере σ_T^n . Поэтому $\varphi_{\text{sim}} \in C_{\tilde{T}^{(n)}}(1)$ и это влечет 4).

Пусть неверно 3). Тогда нетрудно построить две симметрические функции f_1, f_2 с дизъюнктными носителями, удовлетворяющие свойству

$$\int_C f_i \cdot d\nu_n(\cdot | c) = \psi(c) \neq 0.$$

Следовательно, $\sigma_{\tilde{T}^{(n)}}(f_1) = \sigma_{\tilde{T}^{(n)}}(f_2)$. Учитывая, что $C_{\tilde{T}^{(n)}}(f_1)$ и $C_{\tilde{T}^{(n)}}(f_2)$ ортогональны, получим, что 1) неверно.

Мера σ_T^n имеет компоненту, эквивалентную $\sigma_T^k \times \delta^{n-k}$, где $\text{supp } \delta = \{1\}$. Поэтому

$$\text{supp } \nu_n(\cdot | c) \cap \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 1\} \supseteq \text{supp } \nu_k(\cdot | c).$$

Отсюда следует 3) и для $\nu_k(\cdot | c)$, где $k = 1, \dots, n$. Поэтому

$$M(T^{(n)}|_{H^{\{i_1, \dots, i_k\}}}) = M(T^{(k)}|_{H^{\{1, \dots, k\}}}) \subseteq M(T^{(k)}) \subseteq \{1, \dots, k\} \quad (2)$$

для любого набора $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Учитывая (1), получим

$$M(T^{(n)}|_{H^{\{i_1, \dots, i_k\}}}) = \{k!\}. \quad (3)$$

Учитывая (2), как и при доказательстве следствия 2, получим $\sigma_T'^{(k)} \perp \sigma_T'^{(m)}$. Поэтому из 3) следует 2).

Из 2), учитывая 1), следует (3) и свойство $\sigma_T'^{(k)} \perp \sigma_T'^{(m)}$ ($k \neq m$).

Фиксируем $K \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|K| = k$. Рассмотрим меру $\sigma_K = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$, где $\sigma_j = \sigma_T'$ при $j \notin K$ и $\sigma_j = \delta$ иначе. Пусть $\nu_K(\cdot | c)$ – система канонических условных мер для меры σ_K на слоях $C = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 \dots \lambda_n = c\}$ ($d\sigma_K = \nu_K(\cdot | c) d\sigma_T'^{(k)}$). Ясно, что $\sigma_T'^{(k)}\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_i = \lambda_j\} = 0$ ($i \neq j$). Поэтому, учитывая (3), имеем для п.в. c по мере $\sigma_T'^{(k)}$, что множество $\text{supp } \nu_K(\cdot | c)$ состоит из $k!$ точек, полученных из $\lambda(c)$ перестановками координат из K , где $\lambda(c) = (\lambda_1(c), \dots, \lambda_n(c))$, $\lambda_j(c) \neq 1$ при $j \in K$ и $\lambda_j(c) = 1$ иначе.

Учитывая, что $\sigma_T'^{(k)} \perp \sigma_T'^{(m)}$ ($k \neq m$), имеем

$$\nu_n(\cdot | c) \sim \sum_{K: |K|=k} \nu_K(\cdot | c)$$

для п.в. c по мере $\sigma_T'^{(k)}$. Поэтому $\text{supp } \nu_n(\cdot | c)$ содержит только точки, полученные из $\lambda(c)$ перестановкой n координат для п.в. c по мере $\sigma_T'^{(k)}$. Учитывая, что

$$\sigma_T^{(n)} \sim \delta + \sum_{k=1}^n \sigma_T'^{(k)},$$

получим, что верно 3). Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если свойство $(*)$ верно при одном n , то $\sigma'_T(m) \perp \sigma'_T(k)$ ($k \neq m$; $k, m \leq n$). Действительно, $C_{\text{sim}}(n)$ есть прямая сумма инвариантных подпространств C_i ($i = 0, n$), где $\sigma'_T(i)$ есть мера максимального спектрального типа оператора $T^{(n)}$ в C_i ($i = 1, n$).

2. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующий факт.

ЛЕММА 2. Для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$T^{q_n + q_n - p} \rightarrow \frac{(3^{p+1} - 1)E + 2 \cdot (3^{p+1} + 1)T^{-1} + (3^{p+1} - 1)T^{-2}}{4 \cdot 3^{p+1}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление, вполне аналогичное проверке, показывает, что $T^{q_n} \rightarrow 0.5(E + T)$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим оператор $\tilde{T}^{(n)}$. Фиксируем типичный по мере $\sigma'_T(n)$ слой $C = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 \cdots \lambda_n = c\}$.

Докажем свойство 3) в лемме 1. Обозначим

$$P_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta) = (1 + \theta\lambda_1 + \lambda_1^2) \cdots (1 + \theta\lambda_n + \lambda_n^2).$$

Если $T^{k_i} \rightarrow Q$, то $T^{(n)k_i} \rightarrow Q^{(n)}$. Тогда для любого f $Q^{(n)}f \in C_{T^{(n)}}(f)$. Учитывая лемму 2, имеем

$$P_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta_p) \in C_{\tilde{T}^{(n)}}(1) \quad (**)$$

для разных $\theta_p \in \mathbb{R}$, т.е. $P_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta_p)$ являются константами на слое C для п.в. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ по мере $\nu_n(\cdot|c)$. Функция $P_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta)$ есть многочлен степени n по переменной θ с постоянным старшим коэффициентом на слое C . Так как количество разных $\theta_p \geq n - 1$, многочлен однозначно определен, т.е. его оставшиеся коэффициенты постоянны для п.в. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ по мере $\nu_n(\cdot|c)$ на слое C . Поэтому он имеет один набор корней для п.в. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 \cdots \lambda_n = c$. Учитывая равенство

$$P_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta) = \lambda_1 \cdots \lambda_n (\theta + \lambda_1 + \bar{\lambda}_1) \cdots (\theta + \lambda_n + \bar{\lambda}_n) \quad (|\lambda_1| \equiv 1),$$

имеем систему $\lambda_i + \bar{\lambda}_i = c_i$ для п.в. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ на слое C с точностью до перестановки набора $(c_1, \dots, c_n)$. Ясно, что $c_i \in \mathbb{R}$, поэтому $\lambda_i \in \{\lambda_i^{(0)}, \bar{\lambda}_i^{(0)}\}$ для п.в. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ на слое C с точностью до перестановки набора $(\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)})$. Поэтому $\text{supp } \nu_n(\cdot|c)$ лежит в конечном множестве точек, полученных перестановкой координат из

$$A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_i \in \{\lambda_i^{(0)}, \bar{\lambda}_i^{(0)}\}, i = 1, \dots, n\}.$$

Так как $\nu_n(\cdot|c)$ симметрична, достаточно доказать, что $\nu_n(\cdot|c)(a) > 0$ только для одного элемента a из A .

Предположим, что $\nu_n(\cdot|c)(a_i) > 0$, где $a_i \in A$ ($i = 1, 2$; $a_1 \neq a_2$). Так как $a_i \in C$, то

$$a_i \in \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k} = \pm 1\} = B_{\pm}(j_1, \dots, j_k)$$

для некоторого набора $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, где $k \geq 2$.

Так как борелевская мера σ_T имеет атом только в точке 1, отсюда нетрудно вывести, что

$$\sigma_T^n(B_{\pm}(j_1, \dots, j_k) \setminus \{(1, 1, \dots, 1)\}) = 0.$$

Поэтому на типичном слое C имеем равенство

$$\nu_n(\cdot|c)(B_{\pm}(j_1, \dots, j_k) \cap C \setminus \{(1, 1, \dots, 1)\}) = 0.$$

Получим противоречие с предположением. Теорема 1 доказана.

3. Классическим обобщением преобразования Чекана является преобразование T Рудольфа–дель Юнко [7]. Здесь каждая башня C_{n+1} получена разрезанием C_n на 2^{n+1} подбашни и надставкой $(i+1)$ -й подбашни наверх i -й, сделав вставку из 1 этажа между 2^n -й и $(2^n + 1)$ -й подбашнями. В этом случае свойство $(*)$ было доказано в работе [5], так как $T^{k_i} \rightarrow \theta E + (1 - \theta)T$ для любого $\theta \in [0, 1]$.

4. Другим естественным обобщением преобразования Чекона является следующая лестничная конструкция. Фиксируем $r \in \{3, 4, \dots\}$. Каждая башня C_{n+1} получена разрезанием C_n на r подбашен и надставкой $(i+1)$ -й подбашни наверх i -й, сделав вставку из $i - 1$ этажа между ними.

ТЕОРЕМА 2. Для любого лестничного T и любого n $M(T^{(n)}) = \{n, n(n-1), \dots, n!\}$ в $\{\text{const}\}^\perp$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Junco A. del, Rahe M., Swanson L. Chacon's automorphism has minimal self-joinings // J. Anal. Math. 1980. V. 37. P. 276–284.
- [2] Park K. K., Robinson E. A., Jr. The joinings within a class of $\mathbb{Z}^2$ -actions // J. Anal. Math. 1991. V. 57. P. 1–36.
- [3] Hamachi T., Silva C. E. On nonsingular Chacon transformations // Illinois J. Math. (to appear).
- [4] Prihod'ko A. A., Ryzhikov V. V. Disjointness of the convolutions for Chacon's transformations // Colloq. Math. (to appear).
- [5] Ageev O. N. On ergodic transformations with homogeneous spectrum // J. Dynamical Cont. Systems. 1999. V. 5. № 1. P. 149–152.
- [6] Katok A. B. Constructions in ergodic theory // Unpublished Lecture Notes. 1987. V. 7. P. 229–248.
- [7] Junco A. del, Rudolph D. J. A rank one, rigid, simple, prime map // Ergodic Theory Dynamical Systems. 1987. V. 7. P. 229–248.
- [8] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: ageev@mx.bmstu.ru

Поступило
31.01.2000