Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ф. Гасимова, Приближенное решение одного класса двумерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом сжимающих отображений, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 395–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9855>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:25:34

Приближенное решение одного класса двумерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом сжимающих отображений

Н. Ф. Гасимова

В работе один класс двумерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта решается методом сжимающих отображений и находится скорость сходимости последовательных приближений к точному решению.

Библиография: 7 названий.

1. Некоторые обозначения и вспомогательные факты. Рассмотрим двумерное нелинейное сингулярное интегральное уравнение (НСИУ) вида

$$\varphi(x, y) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[s, t, \varphi(s, t)] \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} ds dt + f(x, y), \quad (1.0)$$

где λ – положительный действительный параметр, F и f – заданные функции, а φ – искомая функция. Уравнения вида (1.0) встречаются при изучении предельных значений на остове бицилиндра аналитической в бицилиндрической области функции [1] и в теории сингулярных интегральных уравнений [2]. В настоящей работе мы будем решать уравнение (1.0) методом сжимающих отображений.

Через $C(T^2)$ обозначим пространство непрерывных на $T^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ и 2π -периодических по каждой из переменных функций с нормой

$$\|f\|_{C(T^2)} = \max_{(x,y) \in T^2} |f(x, y)|. \quad (1.1)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_h^{1,0} f(x, y) &= f(x+h, y) - f(x, y), & \Delta_\eta^{0,1} f(x, y) &= f(x, y+\eta) - f(x, y), \\ \Delta_{h,\eta}^{1,1} f(x, y) &= f(x, y) - f(x+h, y) - f(x, y+\eta) + f(x+h, y+\eta). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Эти величины называются соответственно *частной разностью* по x с шагом h , по y с шагом η , и *смешанной разностью* по совокупности переменных с шагом h и η в точке (x, y) .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\omega_f^{1,0}(\delta) &= \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^{1,0} f(x, y)\|_{C(T^2)}, & \omega_f^{0,1}(\eta) &= \sup_{|h| \leq \eta} \|\Delta_h^{0,1} f(x, y)\|_{C(T^2)}, \\ \omega_f^{1,1}(\delta, \eta) &= \sup_{\substack{|h_1| \leq \delta \\ |h_2| \leq \eta}} \|\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} f(x, y)\|_{C(T^2)}.\end{aligned}\quad (1.3)$$

С помощью этих характеристик в работе [3] введено пространство

$$K_{\alpha, \beta}^{1,1} = \{f \in C(T^2) | \omega_f^{1,0}(\delta) = O(\delta^\alpha), \omega_f^{0,1}(\eta) = O(\eta^\beta), \omega_f^{1,1}(\delta, \eta) = O(\delta^\alpha \cdot \eta^\beta)\}, \quad (1.4)$$

$$0 < \alpha, \beta \leq 1$$

с нормой

$$\|f\|_{K_{\alpha, \beta}^{1,1}} = \max \left\{ \|f\|_{C(T^2)}, \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_f^{1,0}(\delta)}{\delta^\alpha}, \sup_{\eta > 0} \frac{\omega_f^{0,1}(\eta)}{\eta^\beta}, \sup_{\substack{\delta > 0 \\ \eta > 0}} \frac{\omega_f^{1,1}(\delta, \eta)}{\delta^\alpha \cdot \eta^\beta} \right\}$$

и доказано, что пространство $K_{\alpha, \beta}^{1,1}$ является банаховым.

Пусть $f \in C(T^2)$. Рассмотрим двумерный сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, t) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} ds dt. \quad (1.5)$$

Отметим, что интеграл (1.5) понимается в смысле главного значения по Коши.

Из оценок, полученных в работах [3], [4], следует, что сингулярный оператор (СО)

$$(Sf)(x, y) = \tilde{f}(x, y) \quad (1.6)$$

действует из $K_{\alpha, \beta}^{1,1}$ в $K_{\alpha, \beta}^{1,1}$ и ограничен при $0 < \alpha, \beta < 1$.

В пространстве $K_{\alpha, \beta}^{1,1}$ возьмем шар с центром в нуле радиуса R

$$B_{\alpha, \beta}^{1,1}(R) = \{\varphi \in K_{\alpha, \beta}^{1,1} \mid \|\varphi\|_{K_{\alpha, \beta}^{1,1}} \leq R\}.$$

В работе [5] доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $f \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}$ и $p \geq 1$. Тогда верно неравенство

$$\|f\|_{C(T^2)} \leq l \|f\|_{K_{\alpha, \beta}^{1,1}}^\gamma \cdot \|f\|_{L_p}^{1-\gamma}, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1 + p(\alpha + \beta)}{(1 + \alpha p)(1 + \beta p)}, \\ l &= \max \left\{ \frac{(1 + \alpha p)(1 + \beta p)}{(\alpha \beta p)^{1-\gamma}}, \frac{\sqrt[4]{4}(1 + \alpha p)(1 + \beta p)}{\alpha \beta p \pi^{1-\gamma}} \right\}.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Далее нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [6].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть функция $F(x, y, \varphi): T^2 \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) существует частная производная $F'_\varphi(x, y, \varphi)$ и существует $C_0 > 0$ такие, что $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in [-R, R] \quad |F'_\varphi(x, y, \varphi_1) - F'_\varphi(x, y, \varphi_2)| \leq C_0 |\varphi_1 - \varphi_2|$;
- 2) $\exists C_1 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in [-\pi, \pi] \quad |F(x_1, y, \varphi) - F(x_2, y, \varphi)| \leq C_1 |x_1 - x_2|^\alpha$;
- 3) $\exists C_2 > 0 \quad \forall y_1, y_2 \in [-\pi, \pi] \quad |F(x, y_1, \varphi) - F(x, y_2, \varphi)| \leq C_2 |y_1 - y_2|^\beta$;
- 4) $\exists C_3 > 0 \quad \forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in [-\pi, \pi]$

$$|F(x_1, y_1, \varphi) - F(x_1, y_2, \varphi) - F(x_2, y_1, \varphi) + F(x_2, y_2, \varphi)| \leq C_3 |x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta;$$

- 5) $\exists C_4 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in [-\pi, \pi] \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in [-R, R]$

$$|F(x_1, y, \varphi_1) - F(x_1, y, \varphi_2) - F(x_2, y, \varphi_1) + F(x_2, y, \varphi_2)| \leq C_4 |x_1 - x_2|^\alpha |\varphi_1 - \varphi_2|;$$

- 6) $\exists C_5 > 0 \quad \forall y_1, y_2 \in [-\pi, \pi] \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in [-R, R]$

$$|F(x, y_1, \varphi_1) - F(x, y_1, \varphi_2) - F(x, y_2, \varphi_1) + F(x, y_2, \varphi_2)| \leq C_5 |y_1 - y_2|^\beta |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Тогда оператор суперпозиции $F: \varphi(x, y) \rightarrow F[x, y, \varphi(x, y)]$ действует из шара $B_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$ в шар $B_{\alpha, \beta}^{1,1}(R_1)$, где радиус R_1 однозначно определяется начальными данными.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть функция $F(s, t, \varphi): T^2 \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1)–6) и $f \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R')$, $R' < R$. Тогда при

$$\lambda < \min \left\{ \frac{1}{C^* \|S\|_{L_2 \rightarrow L_2}}, \frac{R - R'}{R_1 \cdot \|S\|_{K_{\alpha, \beta}^{1,1} \rightarrow K_{\alpha, \beta}^{1,1}}} \right\}, \quad (1.9)$$

где $C^* = \max_{x, y, \varphi} |F'_\varphi(x, y, \varphi)|$, оператор

$$(T\varphi)(x, y) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[s, t, \varphi(s, t)] \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} ds dt + f(x, y) \quad (1.10)$$

является сжимающим в шаре $B_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$ в метрике пространства $L_2(T^2)$.

2. Приближенное решение НСИУ (1.0). Из оценки (1.9) следует, что если последовательность функций $\{f_n\} \subset K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$ сходится в метрике пространства $L_2(T^2)$ к некоторой функции f_0 , то она сходится к f_0 и в метрике пространства $C(T^2)$.

Верна следующая

ЛЕММА 1. Если последовательность $\{f_n\} \subset K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$ сходится в метрике пространства $C(T^2)$ к f_0 , то $f_0 \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $f_n \xrightarrow{C} f_0$ и $f_n \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$

$$\forall n > N(\varepsilon) \quad \forall (x, y) \in T^2 \quad |f_n(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Возьмем произвольные точки $(x_1, y), (x_2, y) \in T^2$ и произвольное $\varepsilon_0 > 0$ и их зафиксируем. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon/|x_1 - x_2|^\alpha < \varepsilon_0$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{|f_0(x_1, y) - f_0(x_2, y)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \\
 &= \frac{|f_0(x_1, y) - f_n(x_1, y) + f_n(x_1, y) - f_n(x_2, y) + f_n(x_2, y) - f_0(x_2, y)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \\
 &\leq \frac{|f_0(x_1, y) - f_n(x_1, y)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} + \frac{|f_n(x_1, y) - f_n(x_2, y)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} + \frac{|f_n(x_2, y) - f_0(x_2, y)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \\
 &< 2\varepsilon_0 + R.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Аналогично доказывается соотношение

$$\frac{|f_0(x, y_1) - f_0(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|^\beta} < 2\varepsilon_0 + R. \tag{2.3}$$

Теперь зафиксируем точки $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2) \in T^2$ и $\varepsilon_0 > 0$. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\varepsilon}{|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta} < \varepsilon_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \frac{|f_0(x_1, y_1) - f_0(x_1, y_2) - f_0(x_2, y_1) + f_0(x_2, y_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta} \\
 &= (|f_0(x_1, y_1) - f_n(x_1, y_1) + f_n(x_1, y_1) - f_0(x_1, y_2) + f_n(x_1, y_2) - f_n(x_1, y_2) \\
 &\quad - f_0(x_2, y_1) + f_n(x_2, y_1) - f_n(x_2, y_1) + f_0(x_2, y_2) - f_n(x_2, y_2) + f_n(x_2, y_2)|) \\
 &\quad / |x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta \\
 &\leq \frac{|f_0(x_1, y_1) - f_n(x_1, y_1)|}{|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta} + \frac{|f_0(x_1, y_2) - f_n(x_1, y_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta} \\
 &\quad + \frac{|f_0(x_2, y_1) - f_n(x_2, y_1)|}{|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta} + \frac{|f_0(x_2, y_2) - f_n(x_2, y_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta} \\
 &\quad + \frac{|f_n(x_1, y_1) - f_n(x_1, y_2) - f_n(x_2, y_1) + f_n(x_2, y_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta} < 4\varepsilon_0 + R.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из оценок (2.2)–(2.4) вытекает, что $f_0 \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R + 4\varepsilon_0)$. Так как $\varepsilon_0 > 0$ произвольно, получим, что $f_0 \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$. Лемма доказана.

А теперь докажем следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $F(s, t, \varphi): T^2 \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1)–6) и $f \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R')$, $R' < R$. Тогда при

$$\lambda < \min \left\{ \frac{1}{C^* \|S\|_{L_2}}, \frac{R - R'}{R_1 \|S\|_{K_{\alpha, \beta}^{1,1} \rightarrow K_{\alpha, \beta}^{1,1}}} \right\}$$

НСИУ (1.0) в шаре $B_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$ имеет единственное решение φ^* , и последовательные приближения $\varphi_n = T\varphi_{n-1}$ сходятся к этому решению в метрике $C(T^2)$ со скоростью

$$\|\varphi_n - \varphi^*\|_{C(T^2)} \leq M \cdot \omega^n \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{L_2(T^2)}^{\gamma/(1+\gamma)}, \tag{2.5}$$

где M – некоторая постоянная,

$$\omega = \{\lambda C^* \|S\|_{L_2(T^2)}\}^{\gamma/(1+\gamma)}, \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии теоремы оператор T является сжимающим в метрике $L_2(T^2)$. Тогда по принципу сжимающих отображений получим, что

$$\|\varphi_n - \varphi^*\|_{L_2(T^2)} \leq \frac{1}{1 - \omega_0} \omega_0^n \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{L_2(T^2)}, \quad \text{где } \omega_0 = \lambda C^* \|S\|_{L_2(T^2)}. \quad (2.6)$$

Оценим норму $\|\varphi_n - \varphi^*\|_{C(T^2)}$ нормой $\|\varphi_n - \varphi^*\|_{L_2(T^2)}$. Через $B((x, y); h)$ обозначим круг радиуса $h > 0$ с центром в точке $(x, y) \in T^2$. Далее, пусть

$$V_2 = V_2^h(x, y) = T^2 \cap B((x, y); h).$$

Ясно, что для функции $g \in C(T^2)$ имеет место следующее представление [7]:

$$g(x, y) = \frac{1}{\text{mes } V_2} \iint_{V_2} g(s, t) ds dt - \frac{1}{\text{mes } V_2} \iint_{V_2} [g(s, t) - g(x, y)] ds dt.$$

Здесь взяв $g(x, y) = \varphi^*(x, y) - \varphi_n(x, y)$, получим

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, y) - \varphi_n(x, y) &= \frac{1}{\text{mes } V_2} \iint_{V_2} [\varphi^*(s, t) - \varphi_n(s, t)] ds dt \\ &\quad - \frac{1}{\text{mes } V_2} \iint_{V_2} [\varphi^*(s, t) - \varphi^*(x, y) - \varphi_n(s, t) + \varphi_n(x, y)] ds dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Так как $\varphi^*, \varphi_n \in K_{\alpha, \beta}^{1,1}(R)$, имеем

$$\begin{aligned} &|\varphi^*(s, t) - \varphi^*(x, y) - \varphi_n(s, t) + \varphi_n(x, y)| \\ &\leq |\varphi^*(s, t) - \varphi^*(s, y) - \varphi^*(x, t) + \varphi^*(x, y)| \\ &\quad + |\varphi^*(s, y) - \varphi^*(x, y)| + |\varphi^*(x, t) - \varphi^*(x, y)| \\ &\quad + |\varphi_n(s, t) - \varphi_n(s, y) - \varphi_n(x, t) + \varphi_n(x, y)| \\ &\quad + |\varphi_n(s, y) - \varphi_n(x, y)| + |\varphi_n(x, t) - \varphi_n(x, y)| \\ &\leq 2M_1(|s - x|^\alpha |t - y|^\beta + |s - x|^\alpha + |t - y|^\beta) \leq 2M_2 h^\gamma, \end{aligned}$$

причем здесь M_2 – некоторая постоянная и $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Тогда из (2.7) следует, что

$$|\varphi^*(x, y) - \varphi_n(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt{\text{mes } V_2}} A_n + M_2 h^\gamma \leq M_3 h^{-1} A_n + M_2 h^\gamma, \quad (2.8)$$

где $A_n = \|\varphi_n - \varphi^*\|_{L_2(T^2)}$.

Если взять $h = A_n^{1/(1+\gamma)}$, то из (2.8) имеем

$$|\varphi^*(x, y) - \varphi_n(x, y)| \leq M_4 A_n^{\gamma/(1+\gamma)} = M_4 \|\varphi_n - \varphi^*\|_{L_2(T^2)}^{\gamma/(1+\gamma)},$$

откуда следует, что

$$|\varphi^* - \varphi_n|_{C(T^2)} \leq M_4 \|\varphi_n - \varphi^*\|_{L_2(T^2)}^{\gamma/(1+\gamma)}.$$

Учитывая последнее неравенство и взяв

$$M = M_4 \left(\frac{1}{1 - \omega_0} \right)^{\gamma/(1+\gamma)},$$

получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Какичев, “Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных”, *Изв. вузов. Матем.*, 1959, № 2, 80–93.
- [2] Б. Г. Габдулхаев, “Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений, II”, *Изв. вузов. Матем.*, 1976, № 1, 30–41.
- [3] Б. И. Мусаев, В. В. Салаев, “О сопряженных функциях многих переменных, Г”, *Учен. зап. Азербайджан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. наук*, 1978, № 4, 5–18.
- [4] А. Г. Джваршейшвили, “Об одном неравенстве А. Зигмунда для функций двух переменных”, *Сообщ. АН ГрузССР*, **15**:9 (1954), 561–568.
- [5] Ф. А. Абдуллаев, “О некоторых мультипликативных неравенствах для функций двух переменных”, *Azərbaycan Respublikası “Təhsil” Cəmiyyəti. “Bilgi” dərgisi. Fizika, Riyaziyyat, Yer elmləri*, 2004, № 2, 56–60.
- [6] Н. Ф. Гасимова, “Об одном нелинейном сингулярном интегральном операторе с ядром Гильберта”, *Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*, 2005, № 4, 56–63.
- [7] В. П. Ильин, “Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов”, *Работы по приближенному анализу*, Тр. МИАН СССР, **53**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1959, 64–127.

Н. Ф. Гасимова

Бакинский государственный университет
E-mail: enusabe@yahoo.com

Поступило

12.11.2010