Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Григорьев, С. А. Молчанов, О декамплинге функций нормальных векторов, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 401–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9856>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:25:55

О декаплинге функций нормальных векторов

П. Г. Григорьев, С. А. Молчанов

Два декаплинг-неравенства доказаны для функций гауссовских векторов. В обоих случаях оказалось, что случай линейных функций является экстремальным. В доказательствах используются некоторые свойства полиномов Вика (Эрмита), а также уточненная версия теоремы Шура о покомпонентном произведении положительно определенных матриц.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В работе [1] неявным образом использован следующий результат относительно расщеплений.

ТЕОРЕМА 1.1. Для нормально распределенного случайного вектора $\bar{Y} = (Y_i)_{i=1, \dots, d}$ со средним $E Y_i = 0$, дисперсией $E Y_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, d$, и невырожденной матрицей ковариации неравенства

$$c^- \sum_{i=1}^d \|\varphi_i(Y_i)\|_2^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^d \varphi_i(Y_i) \right\|_2^2 \leq c^+ \sum_{i=1}^d \|\varphi_i(Y_i)\|_2^2, \quad (1.1)$$

где $c^+ \geq c^- > 0$ – некоторые константы, не зависящие от функций φ_i , выполняются для всех измеримых функций $\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $E \varphi_i(Y_i) = 0$.

В данной работе мы уточняем этот результат, показав, что c^- и c^+ можно выбрать, соответственно, как наименьшее и наибольшее собственные значения корреляционной матрицы вектора $\bar{Y}$. Доказательство основано на лемме 2.2 (уточнение результата Шура), которая утверждает, что для двух заданных корреляционных матриц $R = (\rho_{i,j})_{i,j=1, \dots, d}$ и $R' = (\rho'_{i,j})_{i,j=1, \dots, d}$, собственные числа матрицы $(\rho_{i,j} \rho'_{i,j})_{i,j=1, \dots, d}$ лежат в интервале $[\max(\lambda^-, \lambda'^-), \min(\lambda^+, \lambda'^+)]$, где λ^- , λ^+ , λ'^- , λ'^+ – наименьшие и наибольшие собственные значения матриц R и R' , соответственно (см. также замечание 2.3).

Оценку (1.1) нельзя улучшить следующим образом:

$$c_- \|\varphi(X_1, \dots, X_d)\|_2^2 \leq \|\varphi(Y_1, \dots, Y_d)\|_2^2 \leq c_+ \|\varphi(X_1, \dots, X_d)\|_2^2 \quad \text{при всех } \varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

где X_i , $i = 1, \dots, d$, – независимые одинаково распределенные стандартные нормальные величины. Чтобы увидеть это, достаточно рассмотреть

$$\varphi(x_1, \dots, x_d) := \left(\sum_{i=1}^d a_i x_i \right)^k$$

выполняется с некоторым фиксированным $\bar{a} = (a_i)_{i=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d$ и $k = 1, 2, \dots$. Тогда в силу свойств стандартного нормального распределения имеем

$$\|\varphi(\bar{X})\|_2^2 = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^d a_i X_i \right)^{2k} = \text{var}(\bar{a}^T \bar{X})^k (2k-1)!! = |\bar{a}|^k (2k-1)!!,$$

где $|\bar{a}|^2 = \bar{a}^T \bar{a}$ (здесь и далее подразумевается, что векторы в матричном произведении являются столбцами). Аналогично имеем

$$\|\varphi(\bar{Y})\|_2^2 = \text{var}(\bar{a}^T \bar{Y})^k (2k-1)!! = (\bar{a}^T R \bar{a})^k (2k-1)!!,$$

где R – матрица ковариации вектора $\bar{Y}$. Считая, что $\bar{a}$ – собственные векторы, соответствующие наименьшему и наибольшему собственным значениям матрицы R , и устремляя $k \rightarrow \infty$, видим, что неравенства (1.2) не могут выполняться (если только $\bar{Y}$ также не является стандартным нормальным вектором).

Также, для получения оценок рисков в духе работ [1] и [2], было бы интересно изучить условия, при которых для всех измеримых функций $\varphi_1: \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi_2: \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}$ выполняются следующие оценки с некоторыми константами $c_{\pm}$, зависящими только от ковариационной структуры случайных векторов:

$$c_- (\|\varphi_1(\bar{Y}_1)\|_2^2 + \|\varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2^2) \leq \|\varphi_1(\bar{Y}_1) + \varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2^2 \leq c_+ (\|\varphi_1(\bar{Y}_1)\|_2^2 + \|\varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2^2), \quad (1.3)$$

где $\bar{Y}_1 = (Y_{1,i})_{i=1,\dots,d_1}$ и $\bar{Y}_2 = (Y_{2,j})_{j=1,\dots,d_2}$ – нормальные векторы с нулевым средним и ковариационной структурой

$$\mathbb{E} Y_{\alpha,i} Y_{\beta,j} = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta, i \neq j \\ 1, & \alpha = \beta, i = j \\ \rho_{i,j}, & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (1.4)$$

(или, коротко, $\bar{Y}_1$ и $\bar{Y}_2$ – два стандартных *зависимых* нормальных вектора).

В данной работе доказывается, что неравенства (1.3) выполняются с константами

$$c_{\pm} = 1 \pm s^*,$$

где s^* – максимальное сингулярное значение матрицы $R = (\rho_{i,j})_{i=1,\dots,d_1, j=1,\dots,d_2}$. (Напомним, что для матрицы R размера $d_1 \times d_2$, существует разложение по сингулярным значениям $R = U \Sigma V^T$, где Σ – диагональная матрица размера $d_1 \times d_2$ с неотрицательными элементами, а U и V – квадратные ортогональные матрицы соответствующих размеров. Диагональные элементы матрицы Σ называются *сингулярными значениями* матрицы R , и они определены однозначно с точностью до перестановки.) Таким образом, мы получили следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\bar{Y}_1 = (Y_{1,i})_{i=1,\dots,d_1}$ и $\bar{Y}_2 = (Y_{2,j})_{j=1,\dots,d_2}$ – стандартные нормальные векторы с корреляционной структурой как в формуле (1.4). Тогда неравенства (1.3) выполняются для всех измеримых функций $\varphi_1: \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi_2: \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}$ с константами $c_{\pm} = 1 \pm s^*$, где s^* – максимальное сингулярное значение матрицы $R = (\rho_{i,j})_{i=1,\dots,d_1, j=1,\dots,d_2}$. Эти константы невозможно улучшить.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Очевидно, что верхняя оценка в (1.3) имеет место для любой нормы при $c_+ = 2$. Здесь мы имеем $0 < c_- \leq c_+ < 2$ за исключением вырожденного случая, когда одна из компонент $\bar{Y}_1$ является линейной комбинацией компонент $\bar{Y}_2$ или наоборот, так как в невырожденном случае можно доказать, что $0 < s^* < 1$.

Как из теоремы 1.2, так и из теоремы 2.1 (т.е. из теоремы 1.1 с точными константами), следует, что наиболее экстремальный случай – это случай линейных функций φ_i .

В разделе 2 доказана оценка (1.1), в которой константы c^- и c^+ являются наименьшим и наибольшим собственными значениями корреляционной матрицы вектора $\bar{Y}$. В разделе 3 доказана теорема 1.2.

2. Доказательство теоремы 1.1 в случае точных констант. Хорошо известно, что при заданной стандартной нормальной величины Z , полиномы Эрмита от Z образуют ортогональный базис в пространстве L^2 , порожденном случайными величинами типа $f(Z)$. Здесь мы воспользуемся специальным обозначением для полиномов Эрмита, которое более удобно в многомерном случае, рассматриваемом в разделе 3. Это обозначение употребляется в литературе по математической физике благодаря работам Вика (см., например, [3]).

При $k = 0, 1, \dots$ определим полиномы Вика $:x^k:$ при помощи разложения

$$\exp\left(ax - \frac{a^2}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{:x^k:}{k!}.$$

Хорошо известно (см., например, [3]), что для любых двух совместных нормальных случайных величин Y_1 и Y_2 таких, что $E Y_1 = E Y_2 = 0$, $E Y_1^2 = E Y_2^2 = 1$ и $E Y_1 Y_2 = \rho$, имеет место

$$E :Y_1^k::Y_2^\ell: = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ k! \rho^k, & k = \ell. \end{cases} \quad (2.1)$$

В частности, если $Y_1 = Y_2$ (или, что эквивалентно, $\rho = 1$), то отсюда следует, что $\{ :Y_1^k: / \sqrt{k!} \}_{k=0,1,\dots}$ является ортонормальным базисом в пространстве $L^2(Y_1)$, т.е. гильбертовом пространстве, образованном случайными величинами типа $f(Y_1)$. Или если Y_1 и Y_2 независимы, то отсюда следует, что $\{ :Y_1^k::Y_2^\ell: / \sqrt{k! \ell!} \}_{k,\ell=0,1,\dots}$ является ортонормальным базисом в пространстве $L^2(Y_1, Y_2)$, т.е. гильбертовом пространстве, образованном случайными величинами типа $f(Y_1, Y_2)$. Здесь мы не доказываем равенство (2.1), поскольку в разделе 3 будет доказана более общая лемма 3.1, из которой следует (2.1) (см. также замечание 3.2).

ТЕОРЕМА 2.1. Теорема 1.1 верна, когда константы c^- , c^+ являются наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы $R = (\rho_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ соответственно, где R – матрица корреляции (ковариации) вектора $\bar{Y}$. Кроме того, эти константы являются наилучшими возможными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вектор $\bar{Y}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то его координаты Y_i являются стандартными нормальными величинами. Таким образом, из замечаний, приведенных в начале этого раздела относительно квадратично интегрируемых функций $\varphi_i(Y_i)$, получим равенство

$$\varphi_i(Y_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \frac{:Y_i^k:}{\sqrt{k!}}$$

с некоторыми коэффициентами $a_{i,k}$, и, следовательно, имеем

$$\sum_{i=1}^d \varphi_i(Y_i) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \frac{Y_i^k}{\sqrt{k!}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^d a_{i,k} \frac{Y_i^k}{\sqrt{k!}}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^d \|\varphi_i(Y_i)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^d a_{i,k}^2. \quad (2.3)$$

Заметим, что из соотношений (2.1) видно, что полиномы $\sum_{i=1}^d a_{i,k} Y_i^k / \sqrt{k!}$ ортогональны при различных k . Следовательно, в силу (2.2) и (2.3), для доказательства теоремы достаточно доказать, что при любом $k = 1, 2, \dots$

$$c^- \sum_{i=1}^d a_{i,k}^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^d a_{i,k} \frac{Y_i^k}{\sqrt{k!}} \right\|_2^2 \leq c^+ \sum_{i=1}^d a_{i,k}^2 \quad (2.4)$$

с константами, приведенными выше.

Из соотношений (2.1) имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^d a_{i,k} \frac{Y_i^k}{\sqrt{k!}} \right\|_2^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,k} a_{j,k} \rho_{i,j}^k.$$

Эта величина лежит между наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы $R^k := (\rho_{i,j}^k)_{1 \leq i, j \leq d}$, умноженными на $\sum_{i=1}^d a_{i,k}^2$. Таким образом, чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что все собственные значения всех матриц R^k лежат между наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы $R \equiv R^1$. Это следует из утверждения леммы 2.2 при $R' = R$.

В заключение заметим, что эти константы являются точными, поскольку ясно, что они являются точными для (2.4) при $k = 1$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $R = (\rho_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ и $R' = (\rho'_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ — матрицы корреляции случайных векторов $\bar{Y}$ и $\bar{Y}'$, а λ^- , λ^+ и λ'^- , λ'^+ — наименьшие и наибольшие собственные значения матриц R и R' соответственно. Тогда все собственные значения матрицы $Q := (\rho_{i,j} \rho'_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ лежат в интервале $[\max(\lambda^-, \lambda'^-), \min(\lambda^+, \lambda'^+)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности, можно считать, что случайные векторы $\bar{Y}$ и $\bar{Y}'$ независимы, их средние равны нулю и $E Y_i^2 = E Y_i'^2 = 1$ при всех $i = 1, \dots, d$.

Ясно, что для любого вектора столбца $\bar{a} = (a_i)_{i=1,\dots,d}$, выполняются соотношения

$$E \left(\sum_i a_i Y_i Y_i' \right)^2 = \sum_{i,j} a_i E[Y_i Y_j] E[Y_i' Y_j'] a_j = \sum_{i,j} a_i \rho_{i,j} \rho'_{i,j} a_j = \bar{a}^T Q \bar{a}. \quad (2.5)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} E \left(\sum_i a_i Y_i Y_i' \right)^2 &= E \left[E \left[\left(\sum_i a_i Y_i Y_i' \right)^2 \mid Y' \right] \right], \\ E \left[\left(\sum_i a_i Y_i Y_i' \right)^2 \mid Y' \right] &= \sum_{i,j} a_i Y_i' \rho_{i,j} Y_j' a_j \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Следовательно, так как $\lambda^- \bar{v}^T \bar{v} \leq \bar{v}^T R \bar{v} \leq \lambda^+ \bar{v}^T \bar{v}$ для любого $\bar{v} \in \mathbb{R}^d$, имеет место

$$\lambda^- \sum_i a_i^2 Y_i'^2 \leq \mathbb{E} \left[\left(\sum_i a_i Y_i Y_i' \right)^2 \mid Y' \right] \leq \lambda^+ \sum_i a_i^2 Y_i'^2 \quad \text{п.н.}$$

Усредняя это неравенство и применяя (2.5), получим

$$\lambda^- \sum_i a_i^2 \leq \bar{a}^T Q \bar{a} \leq \lambda^+ \sum_i a_i^2 \quad \text{для всех векторов } a,$$

откуда следует, что собственные значения матрицы Q лежат в интервале $[\lambda^-, \lambda^+]$. Повторяя рассуждения для $\tilde{Y}$ с заменой на $\tilde{Y}'$, получим, что собственные значения матрицы Q также лежат в интервале $[\lambda'^-, \lambda'^+]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Легко обобщить утверждение леммы 2.2 на случай, когда R и R' – симметричные положительно определенные матрицы. Тогда собственные значения матрицы Q лежат между $\max(\lambda^- r'^-, \lambda'^- r^-)$ и $\min(\lambda^+ r'^+, \lambda'^+ r^+)$, где r^- , r^+ и r'^- , r'^+ – наименьший и наибольший диагональные элементы матриц R и R' , соответственно. Как следствие, отсюда следует, что собственные значения матрицы Q лежат между $\lambda^- \lambda'^-$ и $\lambda^+ \lambda'^+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В литературе поэлементное произведение матриц называется *произведением Шура* или *произведением Адамара*. Тот факт, что произведение Шура двух положительно определенных матриц является положительно определенной матрицей, был доказан Шуром [4] (см. также [5]). Метод, который там применялся, позволяет также доказать лемму 2.2 и замечание 2.3.

3. Доказательство теоремы 1.2. Сначала заметим, что можно рассматривать только случай диагональной матрицы R . Это можно показать, применяя следующий прием, заимствованный из работы [1]. Пусть $R = U \Sigma V^T$ – разложение по сингулярным значениям. Рассмотрим $\bar{Z}_1 = U \bar{Y}_1$ и $\bar{Z}_2 = V \bar{Y}_2$. Тогда, поскольку матрицы U и V ортогональны, а $\bar{Z}_1$, $\bar{Y}_1$, $\bar{Z}_2$ и $\bar{Y}_2$ – стандартные нормальные векторы, имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(\bar{Y}_1)\|_2 &= \|\varphi_1(U^{-1} \bar{Z}_1)\|_2 = \|\varphi_1(\bar{Z}_1)\|_2, \\ \|\varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2 &= \|\varphi_2(V^{-1} \bar{Z}_2)\|_2 = \|\varphi_2(\bar{Z}_2)\|_2, \\ \|\varphi_1(\bar{Y}_1) + \varphi_2(\bar{Y}_2)\|_2 &= \|\varphi_1(U^{-1} \bar{Z}_1) + \varphi_2(V^{-1} \bar{Z}_2)\|_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для доказательства того, что (1.3) выполняется для $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$ с некоторыми φ_1 и φ_2 , достаточно доказать (1.3) для $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ с $\varphi'_1(\bar{Z}_1) := \varphi_1(U^{-1} \bar{Z}_1)$ и $\varphi'_2(\bar{Z}_2) := \varphi_2(V^{-1} \bar{Z}_2)$. Итак, в силу наблюдения, сделанного выше, можно в дальнейшем предположить, что R – диагональная матрица с неотрицательными элементами. Поэтому нет необходимости вводить Z_α и φ'_α , $\alpha = 1, 2$.

Теперь введем некоторые обозначения. Пусть $\bar{k} = (k_1, \dots, k_d)$ – d -мерный вектор с неотрицательными целыми компонентами (мы будем использовать такой вектор при $d = d_1$ и $d = d_2$), и

$$\begin{aligned} |\bar{k}| &:= k_1 + \dots + k_d, & \bar{k}! &:= k_1! k_2! \dots k_d! \\ \bar{a}^{\bar{k}} &:= a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_d^{k_d} & \text{при } \bar{a} &:= (a_i)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

$$:\bar{Y}_\alpha^{\bar{k}}: := :Y_{\alpha,1}^{k_1}::Y_{\alpha,2}^{k_2}:\cdots:Y_{\alpha,d_\alpha}^{k_{d_\alpha}}:, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.1)$$

где $:x:$ – полиномы Вика.

Хорошо известно (см., например, [3]), что $\{\bar{k}!^{-1/2}\bar{Y}_1^{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}}$ и $\{\bar{\ell}!^{-1/2}\bar{Y}_2^{\bar{\ell}}\}_{\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}}$ – ортонормальные базисы в пространствах L_2 , порожденных интегрируемыми с квадратом функциями $f(\bar{Y}_1)$ и $g(\bar{Y}_2)$, соответственно. Следовательно, для любых квадратично интегрируемых $\varphi_1(\bar{Y}_1)$ и $\varphi_2(\bar{Y}_2)$ выполняется соотношение

$$\varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha}} a_{\alpha,\bar{k}} \frac{:\bar{Y}_\alpha^{\bar{k}}:}{\bar{k}!^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha}, |\bar{k}|=n} a_{\alpha,\bar{k}} \frac{:\bar{Y}_\alpha^{\bar{k}}:}{\bar{k}!^{1/2}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.2)$$

с некоторыми коэффициентами $a_{\alpha,\bar{k}}$. Также имеем

$$\|\varphi_\alpha(\bar{Y}_\alpha)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_\alpha}, |\bar{k}|=n} a_{\alpha,\bar{k}}^2, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.3)$$

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\bar{Y}_1$ и $\bar{Y}_2$ – d_1 - и d_2 -мерные стандартные нормальные векторы с корреляциями $EY_{1,i}Y_{2,j} = \rho_{i,j}$ при $i = 1, \dots, d_1$ и $j = 1, \dots, d_2$. Тогда

$$E:\bar{Y}_1^{\bar{k}}::\bar{Y}_2^{\bar{\ell}}: = \begin{cases} 0, & |\bar{k}| \neq |\bar{\ell}| \\ \bar{k}!\bar{\ell}! \sum_{\sigma: k(\sigma)=\bar{k}, \ell(\sigma)=\bar{\ell}} R^\sigma / \sigma!, & |\bar{k}| = |\bar{\ell}|, \end{cases} \quad (3.4)$$

где суммирование проводится по матрице неотрицательных целых индексов $\sigma = (\sigma_{i,j})_{i=1,\dots,d_1, j=1,\dots,d_2}$, а $k(\sigma)$ и $\ell(\sigma)$ обозначают d_1 - и d_2 -мерные векторы, являющиеся суммами столбцов и строк матрицы σ , соответственно, наконец,

$$\sigma! := \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{d_2} \sigma_{i,j}! \quad \text{и} \quad R^\sigma := \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{d_2} \rho_{i,j}^{\sigma_{i,j}}.$$

Лемма 3.1 будет доказана позже. Сейчас заметим, что суммирование в (3.4) существенно упрощается в случае диагональной матрицы R . (Именно поэтому в замечании в начале доказательства мы свели общий случай к случаю диагональной матрицы R .) В дальнейшем удобно считать (без потери общности), что $d_2 \leq d_1$. Если матрица R диагональная, то слагаемые в (3.4), соответствующие недиагональным матрицам σ , равны нулю, а в случае диагональных σ из условий $k(\sigma) = \bar{k}$ и $\ell(\sigma) = \bar{\ell}$ следует, что $\sigma_{j,j} = \ell_j$ и $k_j = \ell_j$ при всех $j = 1, \dots, d_2$. Также имеем $k_i = 0$ при $i > d_2$. Чтобы сократить обозначения, удобно считать, что d_1 -мерный вектор $\bar{k}$ равен d_2 -мерному вектору $\bar{\ell}$, если первые d_2 компоненты вектора $\bar{k}$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\bar{\ell}$, а другие компоненты вектора $\bar{k}$ равны нулю. Итак, в случае диагональной матрицы R тождество (3.4) сводится к более простому виду

$$E:\bar{Y}_1^{\bar{k}}::\bar{Y}_2^{\bar{\ell}}: = \begin{cases} 0, & \bar{k} \neq \bar{\ell}, \\ \bar{\ell}!\bar{s}^{\bar{\ell}}, & \bar{k} = \bar{\ell}, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\bar{s}$ – d_2 -мерный вектор диагональных элементов матрицы R (совпадающий с сингулярными значениями в силу замечаний, сделанных в начале доказательства).

Из тождества (3.5) следует, что полиномы

$$P_n = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, |\bar{k}|=n} a_{1,\bar{k}} \frac{:\bar{Y}_1^{\bar{k}}:}{\bar{k}!^{1/2}} + \sum_{\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}, |\bar{\ell}|=n} a_{2,\bar{\ell}} \frac{:\bar{Y}_2^{\bar{\ell}}:}{\bar{\ell}!^{1/2}}$$

ортогональны при различных $n = 0, 1, \dots$. Таким образом, принимая во внимание тождества (3.2) и (3.3) следует, что для доказательства (1.3) достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} c_- \left(\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, |\bar{k}|=n} a_{1,\bar{k}}^2 + \sum_{\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}, |\bar{\ell}|=n} a_{2,\bar{\ell}}^2 \right) \\ \leq \|P_n\|_2^2 \leq c_+ \left(\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, |\bar{k}|=n} a_{1,\bar{k}}^2 + \sum_{\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}, |\bar{\ell}|=n} a_{2,\bar{\ell}}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

с константами, объявленными ранее.

Применяя (3.5), получим

$$\begin{aligned} \|P_n\|_2^2 &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, |\bar{k}|=n} a_{1,\bar{k}}^2 + \sum_{\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}, |\bar{\ell}|=n} a_{2,\bar{\ell}}^2 \\ &\quad + 2 \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, |\bar{k}|=n} \sum_{\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}, |\bar{\ell}|=n} a_{1,\bar{k}} a_{2,\bar{\ell}} E \frac{:\bar{Y}_1^{\bar{k}}:}{\bar{k}!^{1/2}} \frac{:\bar{Y}_2^{\bar{\ell}}:}{\bar{\ell}!^{1/2}} \\ &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, |\bar{k}|=n} a_{1,\bar{k}}^2 + \sum_{\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}, |\bar{\ell}|=n} a_{2,\bar{\ell}}^2 + 2 \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}: |\bar{\ell}|=n, \bar{k}=\bar{\ell}} a_{1,\bar{k}} a_{2,\bar{\ell}} \bar{s}^{\bar{\ell}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Чтобы оценить (3.7), заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}: |\bar{\ell}|=n, \bar{k}=\bar{\ell}} 2a_{1,\bar{k}} a_{2,\bar{\ell}} \bar{s}^{\bar{\ell}} &\leq \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}: |\bar{\ell}|=n, \bar{k}=\bar{\ell}} (a_{1,\bar{k}}^2 + a_{2,\bar{\ell}}^2) \bar{s}^{\bar{\ell}} \\ &\leq s^* \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}: |\bar{\ell}|=n, \bar{k}=\bar{\ell}} (a_{1,\bar{k}}^2 + a_{2,\bar{\ell}}^2), \end{aligned}$$

где s^* – максимальное сингулярное значение матрицы R . Также мы использовали неравенство $s^* \leq 1$, которое всегда выполняется (см. замечание 1.3). Из последнего неравенства вместе с (3.7) следует (3.6), что доказывает (1.3) при $c_{\pm} = 1 \pm s^*$.

Остается показать, что константы $c_{\pm} = 1 \pm s^*$ невозможно улучшить. В силу замечаний, сделанных в начале доказательства, достаточно рассмотреть случай диагональной матрицы R . Также, без ограничения общности, можно считать, что $s^* = E Y_{1,1} Y_{2,1}$. Но тогда точность констант очевидна, если положить $\varphi_1(\bar{Y}_1) = Y_{1,1}$ и $\varphi_2(\bar{Y}_2) = \pm Y_{2,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Из определения полиномов Вика следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{\bar{a}_1^T \bar{Y}_1 - |\bar{a}_1|^2/2} e^{\bar{a}_2^T \bar{Y}_2 - |\bar{a}_2|^2/2} &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{d_1} \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} a_{1,i}^{k_i} \frac{:Y_{1,i}^{k_i}:}{k_i!} \right) \prod_{j=1}^{d_2} \left(\sum_{\ell_j=0}^{\infty} a_{2,j}^{\ell_j} \frac{:Y_{2,j}^{\ell_j}:}{\ell_j!} \right) \\ &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_0^{d_1}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_0^{d_2}} \bar{a}_1^{\bar{k}} \bar{a}_2^{\bar{\ell}} \mathbb{E} \frac{:Y_1^{\bar{k}} : : Y_2^{\bar{\ell}} :}{\bar{k}! \bar{\ell}!} \end{aligned} \quad (3.8)$$

при всех $\bar{a}_1 = (a_{1,i})_{i=1,\dots,d_1} \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $\bar{a}_2 = (a_{2,j})_{j=1,\dots,d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}$ (предполагается, что все векторы являются столбцами и $|\bar{a}|$ – евклидова длина).

С другой стороны, в силу хорошо известных свойств нормального распределения имеем

$$\mathbb{E} e^{\bar{a}_1^T \bar{Y}_1 - |\bar{a}_1|^2/2} e^{\bar{a}_2^T \bar{Y}_2 - |\bar{a}_2|^2/2} = \exp \left(\frac{1}{2} \text{var} \left(\bar{a}_1^T \bar{Y}_1 + \bar{a}_2^T \bar{Y}_2 \right) - \frac{|\bar{a}_1|^2 + |\bar{a}_2|^2}{2} \right).$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{2} \text{var} \left(\bar{a}_1^T \bar{Y}_1 + \bar{a}_2^T \bar{Y}_2 \right) - \frac{|\bar{a}_1|^2 + |\bar{a}_2|^2}{2} = \bar{a}_1^T R \bar{a}_2 = \sum_{i,j} a_{1,i} a_{2,j} \rho_{i,j}$$

и, следовательно,

$$\mathbb{E} e^{\bar{a}_1^T \bar{Y}_1 - |\bar{a}_1|^2/2} e^{\bar{a}_2^T \bar{Y}_2 - |\bar{a}_2|^2/2} = \exp \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq d_1 \\ 1 \leq j \leq d_2}} a_{1,i} a_{2,j} \rho_{i,j} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq d_1 \\ 1 \leq j \leq d_2}} a_{1,i} a_{2,j} \rho_{i,j} \right)^n.$$

Применяя мультиномиальную формулу, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{\bar{a}_1^T \bar{Y}_1 - |\bar{a}_1|^2/2} e^{\bar{a}_2^T \bar{Y}_2 - |\bar{a}_2|^2/2} &= \exp \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq d_1 \\ 1 \leq j \leq d_2}} a_{1,i} a_{2,j} \rho_{i,j} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma: |\sigma|=n} \frac{n!}{\sigma!} \bar{a}_1^{k(\sigma)} \bar{a}_2^{\ell(\sigma)} R^{\sigma} \right)^n. \end{aligned}$$

Теперь для доказательства леммы остается сравнить коэффициенты, стоящие перед $\bar{a}_1^{\bar{k}} \bar{a}_2^{\bar{\ell}}$ в данной формуле и в (3.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В частности, если $d_1 = d_2 = 1$, то из леммы 3.1 следует (2.1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Cherny, R. Douady, S. Molchanov, “On measuring nonlinear risk with scarce observations”, *Finance Stoch.*, 14:3 (2010), 375–395.
- [2] A. S. Cherny, R. Douady, S. A. Molchanov, *On Measuring Hedge Fund Risk*, Preprint, 2008.
- [3] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений*, Наука, М., 1985.

- [4] I. Schur, “Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen”, *J. Reine Angew. Math.*, **140** (1911), 1–28.
- [5] Г. Поля, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа Ч. 2. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел*, Наука, М., 1978.

П. Г. Григорьев

University of North Carolina Charlotte, USA

E-mail: thepavel@mail.ru

Поступило

01.07.2011

С. А. Молчанов

University of North Carolina Charlotte, USA

E-mail: smolchan@uncc.edu